Emir Sokić
Melita Ahić-Đokić



Deterministički signali





Sarajevo, 2026.

Deterministički signali

Emir Sokić
Melita Ahić-Đokić

Sarajevo, 2026.





Izdavač
Univerzitet u Sarajevu - Elektrotehnički fakultet

Za izdavača
Red. prof. dr. Jasmin Velagić

Autori
Emir Sokić, Melita Ahić-Đokić

Naziv djela
Deterministički signali

Recenzenti
Prof. dr. Jasmin Kevrić
Prof. dr. Mirza Hamza

DTP
Emir Sokić, Melita Ahić-Đokić

Godina izdanja i godina štampanja
2026.

Odlukom Senata Univerziteta u Sarajevu broj 01-20-144/26 od 28.10.2026. g. data je saglasnost da se udžbenik "Deterministički signali" izda kao univerzitetsko izdanje, u otvorenom pristupu na Univerzitetu u Sarajevu.

ISBN: **978-9926-575-14-4**

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke BiH pod **ID brojem 71425286**.

Sadržaj

Predgovor **vii**

1 Uvod **1**
1.1 Uvod u signale i sisteme . . . 1
1.1.1 Signal . . . 1
1.1.2 Deterministički i slučajni signali . . . 1
1.1.3 Vremenski kontinualni i vremenski diskretni signali . . . 2
1.1.4 Analogni i digitalni signali . . . 3
1.1.5 Procesiranje signala . . . 4
1.1.6 Sistem . . . 4
1.1.7 Osnovne primjene procesiranja signala . . . 6
1.2 Programsko okruženje Python . . . 7
1.2.1 Repozitorij i priprema radnog okruženja . . . 7
1.2.2 Modul `sis` . . . 8

2 Kontinualni signali i sistemi **9**
2.1 Klasifikacija kontinualnih signala . . . 9
2.1.1 Periodički i aperiodički signali . . . 9
2.1.2 Parni i neparni signali . . . 10
2.1.3 Signali snage i energije . . . 13
2.2 Specijalni kontinualni signali . . . 17
2.2.1 Sinusni signal . . . 17
2.2.2 Kompleksni eksponencijalni signal . . . 21
2.2.3 Jedinična, step, odskočna ili Heavisideova funkcija . . . 24
2.2.4 Signum funkcija . . . 26
2.2.5 Jedinična rampa ili jedinična linearna funkcija . . . 27
2.2.6 Trougaoni signal . . . 28
2.2.7 Pravougaoni signal . . . 28
2.2.8 Jedinična impulsna funkcija . . . 29
2.2.9 Periodički niz (povorka) impulsa ili češljasta funkcija . . . 35
2.2.10 Jedinična sinc(t) funkcija . . . 35
2.3 Transformacija nezavisno promjenljive kontinualnih signala . . . 36
2.3.1 Vremenski pomak . . . 36
2.3.2 Vremensko skaliranje . . . 37
2.3.3 Refleksija . . . 38
2.3.4 Pravilo za vremenski pomak, skaliranje i refleksiju . . . 38

2.4 Kontinualni sistemi . . . 41
2.4.1 Osobine kontinualnih sistema . . . 41
2.5 Kontinualni LTI sistemi . . . 43
2.5.1 Proizvoljan signal predstavljen pomoću pomaknutih delta funkcija 43
2.5.2 Impulsni odziv . . . 44
2.5.3 Odziv kontinualnog LTI sistema . . . 45
2.5.4 Osobine konvolucije . . . 45
2.5.5 Osobine LTI sistema . . . 47
2.5.6 Step odziv LTI sistema . . . 48
2.5.7 Grafička interpretacija konvolucije . . . 53
2.5.8 Konvolucija kontinualnih signala realizirana Pythonom . . . 56
2.6 Frekventna funkcija sistema . . . 60
2.7 Blok dijagram sistema . . . 64

3 Diskretni signali i sistemi 68
3.1 Diskretni signali . . . 68
3.2 Specijalni diskretni signali . . . 69
3.2.1 Impulsna ili delta sekvenca . . . 69
3.2.2 Jedinična sekvenca . . . 72
3.2.3 Rampa . . . 73
3.2.4 Realna kauzalna eksponencijalna sekvenca . . . 74
3.2.5 Sinusna sekvenca . . . 75
3.2.6 Kompleksna eksponencijalna sekvenca . . . 78
3.3 Transformacija nezavisno promjenljive diskretnih signala . . . 80
3.3.1 Vremenski pomak . . . 80
3.3.2 Vremensko skaliranje . . . 82
3.3.3 Refleksija . . . 82
3.4 Diskretni sistemi . . . 86
3.4.1 Osobine diskretnih sistema . . . 87
3.5 Diskretni LTI sistemi . . . 91
3.5.1 Impulsni odziv . . . 91
3.5.2 Odziv diskretnog LTI sistema . . . 91
3.5.3 Osobine konvolucione sume . . . 92
3.5.4 Određivanje impulsnog odziva rekurzijom . . . 100
3.5.5 Step odziv LTI diskretnih sistema . . . 101
3.6 Funkcija sistema . . . 103
3.7 Operacije nad sekvencama . . . 106
3.7.1 Suma i proizvod sekvenci . . . 106
3.7.2 Vremenski pomak sekvence . . . 106
3.7.3 Kaskadna i paralelna veza LTI sistema . . . 107

4 Aproksimacija kontinualnih signala 109
4.1 Aproksimacija realne funkcije realnim funkcijama . . . 109
4.1.1 Aproksimacija funkcije drugom funkcijom . . . 109
4.1.2 Aproksimacija sa dvije funkcije . . . 112
4.1.3 Aproksimacija sa više funkcija i princip ortogonalnosti . . . 112
4.1.4 Potpun skup ortogonalnih funkcija . . . 114

4.2 Aproksimacija funkcije kompleksnim funkcijama . . . 114
4.2.1 Princip ortogonalnosti za kompleksne funkcije . . . 114
4.3 Sistemi ortogonalnih funkcija . . . 116
4.3.1 Walshove funkcije . . . 116
4.3.2 Haarove funkcije . . . 123
4.4 Ortogonalnost u odnosu na težinsku funkciju . . . 131
4.5 Aproksimacija Walshovim funkcijama u Pythonu . . . 132

5 Spektralna analiza periodičkih signala 139
5.1 Razvoj periodičkih signala u Fourierov red . . . 139
5.2 Grafički prikaz spektra . . . 142
5.3 Spektar realnog signala . . . 143
5.4 Trigonometrijski oblici Fourierovog reda . . . 152
5.5 Osobine Fourierovog reda kontinualnih signala . . . 153
5.6 Prostiranje periodičkih signala kroz LTI sisteme . . . 155
5.7 Niskopropusni filter . . . 158
5.8 Srednja snaga periodičkog signala . . . 159
5.9 Promjena srednje snage signala pri prostiranju kroz LTI sistem . . . 161
5.10 Uticaj pojedinih harmonika na oblik signala . . . 163
5.11 Aproksimacija periodičkih kontinualnih signala Fourierovim redom u Pythonu . . . 169

6 Fourierova transformacija 179
6.1 Fourierova transformacija vremenski kontinualnih signala . . . 179
6.1.1 Izvođenje Fourierove transformacije . . . 179
6.1.2 Uslovi egzistencije Fourierove transformacije . . . 181
6.2 Odnos originala i lika . . . 182
6.2.1 Odnos realnih i imaginarnih dijelova funkcije i spektra . . . 182
6.2.2 Odnos parnog i neparnog dijela funkcije i spektra . . . 184
6.3 Impulsni odziv i frekventna funkcija sistema . . . 187
6.4 Osobine Fourierove transformacije i Fourierova transformacija specijalnih signala . . . 190
6.4.1 Linearnost . . . 190
6.4.2 Simetrija . . . 190
6.4.3 Fourierova transformacija impulsne funkcije . . . 192
6.4.4 Fourierova transformacija konstante . . . 192
6.4.5 Fourierova transformacija signum funkcije . . . 194
6.4.6 Fourierova transformacija jedinične funkcije . . . 195
6.4.7 Vremensko skaliranje . . . 195
6.4.8 Vremenski pomak . . . 197
6.4.9 Teorema o modulaciji . . . 199
6.4.10 Fourierova transformacija kompleksne harmonijske funkcije . . . 199
6.4.11 Fourierova transformacija kosinusne funkcije . . . 199
6.4.12 Fourierova transformacija sinusne funkcije . . . 199
6.4.13 Fourierova transformacija periodičke funkcije . . . 200
6.4.14 Fourierova transformacija niza (povorke) impulsa . . . 201
6.4.15 Konjugovanje i konjugovana simetrija . . . 202

6.4.16 Konjugovanje: parni i neparni signali . . . 203
6.4.17 Izvod i integral originala . . . 204
6.4.18 Izvod lika . . . 209
6.4.19 Konvolucija originala . . . 210
6.4.20 Korelaciona funkcija aperiodičkih signala . . . 213
6.4.21 Parsevalova teorema i teorema o energiji . . . 215
6.4.22 Frekventna konvolucija . . . 218
6.5 Distorzija signala pri prenosu kroz LTI sistem . . . 219
6.6 Modulacija signala . . . 222
6.6.1 Amplitudna modulacija harmonijskim nosiocem . . . 223
6.6.2 Demodulacija . . . 225
6.6.3 Frekventno multipleksiranje . . . 227
6.7 Hilbertova transformacija . . . 229
6.7.1 Hilbertova transformacija harmonijskih funkcija . . . 230
6.7.2 Analitička funkcija . . . 232
6.7.3 Modulacija s jednim bočnim opsegom (SSB) . . . 233
6.8 Računanje Fourierove transformacije u Pythonu . . . 243
6.9 Tabele osobina Fourierove transformacije i Fourierovih transformacionih parova . . . 249

7 Amplitudno impulsna modulacija 252
7.1 Diskretizacija kontinualnog signala: teorema o uzorkovanju . . . 252
7.1.1 Aliasing efekat . . . 253
7.1.2 Zvjezdasta funkcija . . . 254
7.1.3 Kolo zadrške nultog reda . . . 255
7.1.4 Zvjezdasta funkcija u Pythonu . . . 257
7.1.5 Spektar zvjezdaste funkcije . . . 258
7.1.6 Spektar zvjezdaste funkcije u Pythonu . . . 261
7.1.7 Rekonstrukcija uzoraka kontinualnog signala iz spektra zvjezdaste funkcije . . . 263
7.1.8 Teorema o uzorkovanju . . . 263
7.1.9 Izbor učestanosti uzorkovanja . . . 265
7.1.10 Rekonstrukcija kontinualnog signala iz uzoraka . . . 268
7.1.11 Energija frekventno ograničenog signala . . . 272
7.1.12 Rekonstrukcija kolom zadrške nultog reda . . . 272
7.2 Diskretizacija spektra . . . 273
7.2.1 Izvedena periodička funkcija . . . 273
7.2.2 Izvedena periodička funkcija u Pythonu . . . 276
7.2.3 Poissonova sumaciona formula . . . 277

8 Diskretna Fourierova transformacija - DFT 285
8.1 Uvod . . . 285
8.1.1 Izbor intervala uzorkovanja funkcije i njenog spektra . . . 285
8.1.2 Numeričko računanje Fourierove transformacije . . . 286
8.2 Brza Fourierova transformacija - FFT . . . 295
8.2.1 Brza Fourierova transformacija po bazi 2 sa decimiranjem po vremenu (DIT FFT) . . . 297

8.2.2 Brza Fourierova transformacija po bazi 2 sa decimiranjem po učestanosti (DIF FFT) . . . 302
8.3 Primjena diskretne Fourierove transformacije . . . 305
8.3.1 Odredivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma . . . 305
8.3.2 Određivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma u Pythonu . . . 306
8.3.3 Približno određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičkih funkcija . . . 309
8.3.4 Približno određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičkih funkcija u Pythonu . . . 311
8.3.5 Približno određivanje uzoraka spektra kontinualnih funkcija . . . 313
8.3.6 Približno određivanje uzoraka spektra kontinualnih funkcija u Pythonu . . . 314
8.3.7 Konvolucija dvije sekvence . . . 316
8.3.8 Konvolucija dvije sekvence u Pythonu . . . 319

9 Fourierova transformacija diskretnih signala - DTFT 322
9.1 Frekventni odziv LTI sistema . . . 322
9.2 Direktna i inverzna Fourierova transformacija diskretnog signala . . . 325
9.2.1 Osobine Fourierove transformacije diskretnih signala . . . 327
9.2.2 Pregled važnijih transformacionih parova . . . 332

10 Z - transformacija 334
10.1 Uvod . . . 334
10.2 Definicija z-transformacije . . . 335
10.2.1 Veza z-transformacije, Fourierove transformacije diskretnog signala (DTFT) i diskretne Fourierove transformacije (DFT) . . . 336
10.2.2 Polovi i nule $F(z)$ . . . 338
10.2.3 Oblast konvergencije $F(z)$ . . . 339
10.2.4 Z-transformacija kauzalnih i nekauzalnih sekvenci . . . 342
10.3 Osobine z-transformacije . . . 347
10.3.1 Linearnost z-transformacije . . . 347
10.3.2 Refleksija vremenske sekvence . . . 348
10.3.3 Z-transformacija vremenski pomjerene sekvence . . . 349
10.3.4 Teorema o početnoj vrijednosti sekvence . . . 352
10.3.5 Teorema o krajnjoj vrijednosti sekvence . . . 353
10.3.6 Z-transformacija konvolucije sekvenci u vremenskom domenu . . . 354
10.3.7 Množenje sekvence sa α^n ili skaliranje u oblasti kompleksne učestanosti . . . 355
10.3.8 Množenje signala promjenljivom n ili diferenciranje u z-domenu . . . 361
10.4 Inverzna z-transformacija . . . 364
10.4.1 Određivanje inverzne z-transformacije iz Laurentovog reda . . . 364
10.4.2 Odredivanje inverzne z-transformacije metodom parcijalnih razlomaka (formula Heavisideovog razvoja) . . . 367
10.4.3 Određivanje inverzne z-transformacije pomoću Laurentove formule 370
10.5 Analiza diskretnog LTI sistema korištenjem z-transformacije . . . 375

10.5.1 Kauzalnost i stabilnost LTI sistema 375
10.5.2 Z-transformacija impulsnih odziva kauzalnih LTI sistema 376
10.5.3 Primjena unilateralne z-transformacije za rješavanje diferentnih jednačina 377
10.6 Rješavanje diferentnih jednačina pomoću Pythona 385
10.7 Tabele osobina z-transformacije i nekih z-transformacionih parova 387

Literatura **391**

Indeks pojmova **394**

Predgovor

Predmet "Signali i sistemi" predstavlja okosnicu kurikuluma na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu već decenijama. Iako suština i fundamentalni principi ove oblasti ostaju nepromijenjeni, pedagoški pristup i metodologija usvajanja znanja kontinuirano evoluiraju. Udžbenička literatura iz ovog domena tradicionalno se obnavlja u decenijskim ciklusima, nerijetko prateći prirodnu akademsku smjenu generacija: nekadašnji studenti, učeći iz prethodnih izdanja, vremenom stasavaju u nastavnike koji oblikuju nova. Ova knjiga je plod upravo takvog kontinuiteta. Ona se snažno oslanja na bogato naslijeđe i iskustva prethodnih generacija, ali istovremeno reflektira savremene okolnosti u kojima se nastavni proces danas odvija – okolnosti koje su pretrpjele značajne transformacije u samo nekoliko proteklih godina.

Jedna od ključnih specifičnosti ovog izdanja jeste odmak od tradicionalnog, štampanog formata. Knjiga je koncipirana u duhu otvorenog pristupa i u potpunosti je dostupna u elektronskom obliku. Svi programski kodovi korišteni u primjerima javno su pohranjeni na platformi GitHub, čime je čitaocima omogućeno slobodno eksperimentisanje, modifikacija i prilagođavanje koda vlastitim potrebama. Ovakav interaktivni model nosi i značajnu praktičnu prednost: eventualne greške i propusti u tekstu – na kojima se unaprijed i iskreno izvinjavamo – moći će se promptno i periodično korigovati, omogućavajući knjizi da s vremenom organski raste i akademski sazrijeva.

Otvorenost ovog izdanja nadilazi isključivo potrebe studenata i sve više korespondira sa zahtjevima modernih alata baziranih na vještačkoj inteligenciji. Svjesni aktuelnih tehnoloških trendova, željeli smo da struktura knjige bude lako prohodna za analizu i diskusiju posredstvom takvih alata, s obzirom na to da oni postaju nezaobilazan mehanizam za učenje i produbljivanje gradiva. Prateći te aktuelne trendove, sasvim prirodno, i mi smo se prilikom pripreme ove knjige oslonili na iste, ali je važno istaći da oni ni u kom slučaju nisu zamijenili naše autorsko promišljanje niti višedecenijsko pedagoško iskustvo. Oni su nam poslužili isključivo kao koristan pomoćni instrument za efikasnije formatiranje, tehničko uobličavanje i analizu pripremljenog sadržaja. Upravo takav, izbalansiran pristup očekujemo i od studenata koji će u budućnosti koristiti ovu knjigu: vještačka inteligencija je izvanredna i dobrodošla podrška u učenju, ali ona ne može i ne smije postati zamjena za suštinsko usvajanje gradiva i razvoj nezavisnog, kritičkog inženjerskog promišljanja.

Ovo izdanje predstavlja prirodnog prethodnika odnosno komplementarnu cjelinu, sa još jednom knjigom otvorenog pristupa – *Slučajni signali i procesi* (autori Emir Sokić, Almir Salihbegović), koja se fokusira na stohastičke signale. Zajedno, ove dvije publikacije pokrivaju cjelokupan spektar fundamentalnih znanja iz domena analize signala, neophodnih studentima dodiplomskih i postdiplomskih studija na tehničkim fakultetima.

Knjiga *Deterministički signali* posvećena je analizi vremenski kontinualnih i vremenski diskretnih determinističkih signala i sistema. Primarno je namijenjena studentima treće godine Odsjeka za automatiku i elektroniku na Elektrotehničkom fakultetu u okviru predmeta "Signali i sistemi", te studentima druge godine Odsjeka za telekomunikacije na predmetu "Teorija signala". Zahvaljujući svojoj strukturiranosti, podjednako dobro može poslužiti studentima srodnih disciplina, kao i široj stručnoj javnosti kojoj je potreban čvrst temelj iz obrade signala. Za razliku od prethodnih izdanja koja su se primarno bazirala na programskom paketu MATLAB, svi primjeri u ovoj knjizi implementirani su u jeziku Python. Pored analitičkih i grafičkih rješenja, čitaocu je ponuđen i izvorni kod koji se može direktno pokretati i testirati. Python je danas dominantan alat, izuzetno pogodan za ovakve otvorene edukativne forme i, što je najvažnije, potpuno je besplatan, čime je otklonjena potreba za komercijalnim licencama prilikom samostalnog praćenja primjera.

Prvo poglavlje ima uvodni karakter i bavi se fundamentalnim definicijama – prirodom signala, njihovom klasifikacijom (deterministički naspram slučajnih, kontinualni naspram diskretnih, analogni naspram digitalnih) te konceptualizacijom pojma sistema.

Drugo poglavlje, *Kontinualni signali i sistemi*, detaljnije razrađuje klasifikaciju kontinualnih signala uz analizu njihove energije i snage. Poseban fokus stavljen je na linearne vremenski invarijantne (LTI) sisteme i operaciju konvolucije, koja je temeljito obrađena kroz analitički, grafički i programski pristup. Također je uveden koncept frekventne funkcije sistema, uz prateću notaciju za blok dijagrame.

Treće poglavlje, *Diskretni signali i sistemi*, predstavlja konceptualni pandan prethodnom poglavlju, prenesen u diskretnu domenu. Definišu se osnovni pojmovi diskretnih signala i sistema, obrađuje se konvoluciona suma i demonstrira rekurzivno određivanje impulsnog i step odziva.

U četvrtom poglavlju, *Aproksimacija kontinualnih signala*, analizira se metodologija aproksimacije složenih signala linearnom kombinacijom elementarnih funkcija. Prezentirani su Fourierovi redovi, te Walshove i Haarove funkcije kao reprezentativni primjeri potpunih skupova ortogonalnih funkcija.

Peto poglavlje, *Spektralna analiza periodičkih signala*, nastavlja se na prethodno poglavlje detaljnije razmatrajući aproksimaciju periodičkih signala pomoću Fourierovih redova. Uvodi se pojam spektra signala, analizira propagacija periodičkog signala kroz LTI sistem, te uspostavlja fundamentalni koncept filtera.

Šesto poglavlje, ujedno i najobimnije u knjizi, posvećeno je direktnoj i inverznoj Fourierovoj transformaciji, neophodnoj za analizu aperiodičkih signala. Pored osnovnih teorema i transformacija specifičnih signala, elaboriran je fenomen modulacije s naglaskom na amplitudne modulacije sa jednim i sa dva bočna opsega, što je zahtijevalo prethodnu implementaciju matematičkog aparata Hilbertove transformacije i analitičke funkcije.

Sedmo poglavlje bavi se amplitudno-impulsnom modulacijom. Uvodi se zvjezdasta funkcija, izvedena periodička funkcija i teorema o uzorkovanju, te se demonstrira proces egzaktne rekonstrukcije kontinualnog signala iz njegovih diskretnih uzoraka.

Osmo poglavlje usmjereno je na diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) i efikasni algoritam brze Fourierove transformacije (FFT). Prezentiran je širok spektar praktičnih primjena, od računanja koeficijenata Fourierovog reda do ubrzane realizacije konvolucije.

Deveto poglavlje analizira Fourierovu transformaciju diskretnih signala (DTFT), definisanje frekvencijskog odziva LTI sistema i ključne matematičke osobine ove transformacije.

Deseto, zaključno poglavlje, obrađuje z-transformaciju, uspostavljajući njenu jasnu spregu sa DTFT i DFT transformacijama. Detaljno je prikazana direktna i inverzna z-transformacija te njena primjena u rješavanju diferentnih jednačina.

* * * *

Na kraju, preostaje nam izraziti zahvalnost. Kao prvi autor, želim se zahvaliti svojoj porodici na neizmjernom strpljenju i razumijevanju tokom rada na ovoj knjizi, kao i studentima i kolegama koji su svojim uvidima, komentarima i korekcijama doprinijeli da ona bude kvalitetnija. Posebnu i duboku zahvalnost dugujem koautorici ovog izdanja, Meliti Ahić-Đokić, koja će za mene zauvijek ostati moja draga profesorica. Njeno bogato stručno znanje i iskustvo nemjerljivo su doprinijeli uobličavanju ove materije, a ja se iskreno nadam da sam svojim radom na ovom materijalu uspio opravdati ukazano povjerenje i dostojno nastaviti njeno akademsko naslijeđe.

Kao drugi autor želim istaći da nakon 44 godine provedene u učionici sa studentima, koji su znatno uticali na profiliranje, oblikovanje i metodološku sistematiku cjelokupnog materijala, bilo je sasvim prirodno prikloniti se zahtjevima novih tehnologija i vještačke inteligencije. Želim da studentima otvoreni pristup u elektronskom obliku ukaže na nove mogućnosti i motiviše ih za dalje usavršavanje u ovoj izuzetnu dinamičnoj oblasti, posebno u izučavanju digitalnog procesiranja signala.

Naša zajednička zahvalnost upućena je i recenzentima ove knjige, čije su pažljivo čitanje rukopisa, te konstruktivne primjedbe i sugestije, imale presudnu ulogu u definisanju konačnog oblika teksta koji je pred vama.

1. Uvod

1.1 Uvod u signale i sisteme

1.1.1 Signal

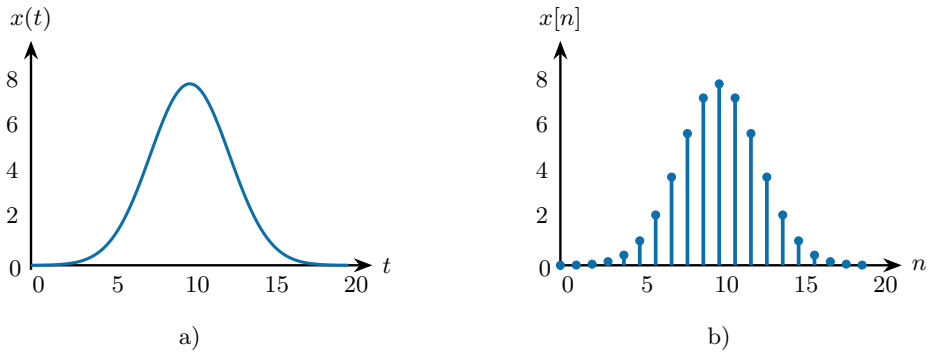
Signal je fizička veličina koja zavisi od vremena, prostornih koordinata ili drugih nezavisno promjenljivih i nosi informaciju koja je sadržana u promjenama signala. Znači, promjena je ta koja nosi informaciju. Informacija se pretvara u signal kada ju je potrebno sačuvati, prenijeti na daljinu ili obraditi. Informacija ne može postojati bez promjene prethodnog stanja. Primjeri prirodnih signala koji nose neku informaciju su: ljudski govor, glasovi životinja, muzika, svjetlost, video signal, seizmički signal, atmosferski pritisak, temperatura vode ili zraka, itd. Naponi i struje su signali koji se najčešće javljaju u elektrotehnici, ali signal može također biti i električno opterećenje ili električno polje. Grafički prikaz signala naziva se talasni oblik signala.

Raznovrsnost signala je velika i posljedica je raznovrsnosti prirode izvora i prenosnog medija. Svaki signal se definira kao funkcija jedne (1-D) ili više nezavisno promjenljivih (M-D) koje nose informacije o fizikalnom fenomenu. Govorni signal je jednodimenzioni signal (1-D), a nezavisno promjenljiva je vrijeme. Signal slike je primjer dvodimenzionog signala gdje su nezavisno promjenljive dvije prostorne promjenljive.

Analiza signala omogućava generiranje, formatiranje, prenos i pohranjivanje signala i izdvajanje korisne informacije koju oni nose. Prvi korak u analizi signala je razvrstavanje signala. Kako je signal povezan sa prenošenjem informacije, a informacija predstavlja unaprijed nepoznatu promjenu u odnosu na prethodno stanje, to znači da će promjene u talasnom obliku signala u narednim momentima biti nepoznate. Signal koji dolazi od procesa čije je ponašanje unaprijed poznato ne nosi nikakvu informaciju, jer nema neizvjesnosti. S obzirom na informacioni aspekt, klasifikacija svih signala bi se mogla izvršiti na *determinističke* i *slučajne* signale.

1.1.2 Deterministički i slučajni signali

Signal kojem je fizički opis potpuno poznat, bilo analitički (matematički) ili grafički, je deterministički signal. Kod takvog signala nema neizvjesnosti u promjenljivim signala ili u njegovim osobinama. Drugim riječima, deterministički signali su potpuno opisani jednačinama, tako da se sve buduće vrijednosti signala mogu predvidjeti na osnovu tih jednačina. U determinističke signale spadaju periodički i aperiodički signali čije se promjene odvijaju po unaprijed poznatim zakonima. Sinusni signal (sa poznatom fazom i frekvencijom) je očigledan primjer determinističkog, periodičkog signala.



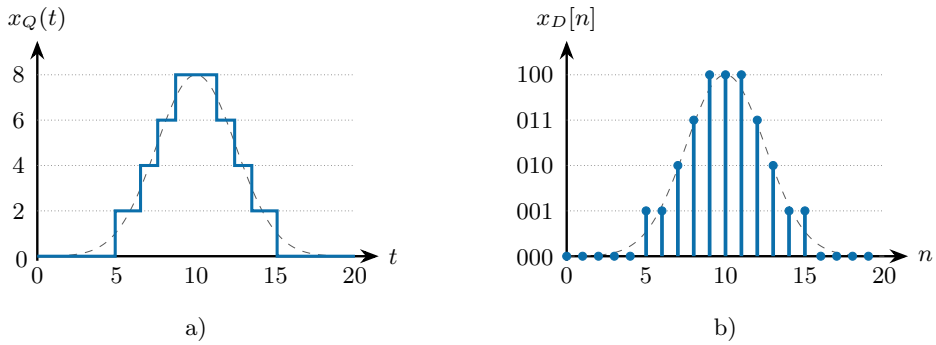
Slika 1.1: Grafička interpretacija signala: a) vremenski kontinualni signal, b) vremenski diskretan signal.

Ako je signal poznat (određen) samo u domenu vjerovatnog opisa, odnosno kada se umjesto njegovog potpunog analitičkog ili grafičkog opisa pojavljuje funkcija vjerovatnoće ili drugi statistički pokazatelji, kao što su srednja vrijednost, srednja kvadratna vrijednost, varijansa, funkcija raspodjele, itd. signal je *slučajni* (engl. *random*) signal. Buduća vrijednost slučajnog signala se ne može predvidjeti, već samo pretpostavljati, a stanje izvora se saznaje tek kada "signalni" izraz stigne na odredište. Tako, samo slučajni signali nose informaciju. Signali šuma (engl. *noise signals*) su uglavnom slučajni signali. Slučajni signali se često pojavljuju u digitalnoj obradi signala. Na primjer, analiza uticaja konačne dužine riječi ne može se napraviti bez primjene teorije slučajnih diskretnih signala.

1.1.3 Vremenski kontinualni i vremenski diskretni signali

Deterministički i slučajni signali se mogu klasificirati i prema njihovom ponašanju u vremenu. *Vremenski kontinualni signal* definiran je u svakom trenutku vremena u određenom vremenskom intervalu. Signal koji ima definirane vrijednosti samo u diskretnim trenucima nezavisno promjenljive, a ne i između njih, naziva se *vremenski diskretni signal*. Dakle, termini "kontinualni" i "diskretni" odnose se isključivo na ponašanje signala u vremenu. Analogni telefonski signal i signal video kamere su primjeri vremenski kontinualnih signala, dok se recimo, redovna mjesečna ili godišnja primanja mogu posmatrati kao primjeri vremenski diskretnih signala. Vrijednost signala za specifičnu veličinu nezavisno promjenljive naziva se amplituda signala.

U knjizi će biti razmatrana dva tipa signala: vremenski kontinualni signali i vremenski diskretni signali. Nezavisno promjenljiva vremenski kontinualnog signala se označava sa (t), a nezavisno promjenljiva vremenski diskretnog signala se označava sa $[n]$. Na slici 1.1 prikazani su jednodimenzionalni vremenski kontinualni signal $x(t)$ definiran za svako $t \in \mathbb{R}$ i jednodimenzionalni vremenski diskretni signal $x[n]$ definiran samo za cjelobrojne vrijednosti diskretnog vremena $n \in \mathbb{Z}$.



Slika 1.2: Grafička interpretacija signala sa definiranim amplitudnim nivoima: a) u kontinualnom vremenu, b) u diskretnom vremenu.

1.1.4 Analogni i digitalni signali

Signal čija amplituda može imati bilo koju vrijednost iz nekog kontinualnog opsega, i definiran je u svakom trenutku vremena u određenom vremenskom intervalu, je *analogni signal*. *Digitalni signal* je takav signal kod koga su i amplituda i vrijeme diskretni. Tipično, digitalni signali podrazumijevaju da postoji konačan broj mogućih amplitudnih nivoa, te da su ti amplitudni nivoi binarno kodirani. Obzirom da je i vremenski "indeks" digitalnog signala zapravo cijeli broj, to je obrada digitalnog signala na računaru bitno olakšana, jer se uzorci signala mogu zapisati u formi niza ili vektora elemenata sa unaprijed poznatom memorijskom alokacijom, npr. $x_Q[n] = \{..., 011, 100, 111, 011, ...\}$. Tako recimo, digitalna slika predstavlja dvodimenzionalni digitalni signal kod kojeg se vrijednosti pojedinih piksela zapisuju (najčešće) 8-bitnim zapisom po pojedinom kanalu boje, odnosno signal kod kojeg amplituda signala u nekoj tački može poprimiti samo jednu od mogućih $2^8 = 256$ vrijednosti.

Na slici 1.2 su dati primjeri signala sa konačnim brojem amplitudnih nivoa u kontinualnom vremenu (kvantizirani signal) i diskretnom vremenu (digitalni signal). Govorni signal je primjer analognog signala. Signali koji se obrađuju digitalnim računarima su digitalni, jer mogu imati samo binarne vrijednosti, i predstavljaju specijalan slučaj signala sa konačnim brojem amplitudnih nivoa. Primjer digitalnog signala je digitalna slika ili digitalizovana muzika na tvrdom disku računara. U tabeli 1.1. data je klasifikacija signala na četiri vrste prema tipu diskretizacije.

Tabela 1.1: Klasifikacija signala.

Signal	**Oznaka**	**Karakteristike**
Analogni	$x(t)$	Kontinualno vrijeme i kontinualna amplituda
Diskretni	$x[n]$	Diskretno vrijeme i kontinualna amplituda
Kvantizirani	$x_Q(t)$	Kontinualno vrijeme i diskretna amplituda
Digitalni	$x_D[n]$	Diskretno vrijeme i diskretna amplituda



Slika 1.3: Idealizovani sistem za digitalnu obradu analognih signala.

1.1.5 Procesiranje signala

Kako je većina prirodnih signala analogna (kontinualna i po vremenu i po amplitudi), za obradu računarskim sistemima potrebno ih je konvertirati u digitalni oblik (diskretni i po vremenu i po amplitudi), tj. u niz brojeva. Pri tome se obavlja proces dvostruke diskretizacije: diskretizacija po vremenu (odabiranje, odmjeravanje, engl. *sampling*) i diskretizacija po amplitudi (kvantovanje, kvantizacija). Kompletan proces diskretizacije naziva se analogno-digitalna (A/D) konverzija (engl. *analog-to-digital*) i obavlja se pomoću A/D konvertora. Učestanost diskretizacije ne mora biti konstantna, ali većina sistema za digitalnu obradu signala radi sa konstantnom učestanošću diskretizacije.

Ukoliko se poslije procesa diskretizacije analognog signala izvrši i obrada diskretnog (digitalnog) signala, a zatim rekonstrukcija procesiranog digitalnog signala u analogni, dobija se sistem za diskretnu (digitalnu) obradu analognih signala koji je prikazan na slici 1.3. Nakon propuštanja kroz idealno kolo za uzorkovanje (S/H engl. *sample-and-hold*)) i analogno digitalnu konveziju (A/D), signal se prostire kroz digitalni procesor (DSP). Rekonstrukcija analognog signala iz uzoraka obavlja se u idealnom D/A konvertoru (engl. *discrete-to-analog*).

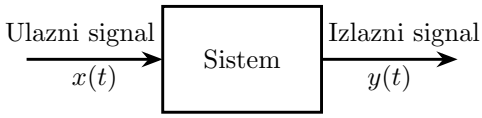
Bitno je napomenuti da sistem na slici 1.3 sadrži i komponente koje se ne mogu realizirati u praksi, kao što su idealna kola za uzorkovanje i rekonstrukciju signala. U praktičnim realizacijama koriste se realne komponente koje aproksimiraju rad idealnih komponenti. Međutim, značaj ovakvog idealnog sistema je veliki, jer pokazuje princip digitalne (diskretne) obrade analognih signala.

1.1.6 Sistem

Na pitanje "šta je to sistem?" ne postoji jednoznačan odgovor. Definicija pojma sistema se mijenja zavisno od područja nauke i tehnologije. U ovoj knjizi pod pojmom sistem će se podrazumijevati dinamički tehnički sistem.

U svrhu analize sistema njegov rad treba opisati nekim formalnim jezikom. Rezultat formalizacije je skup matematičkih relacija koje opisuju funkcionisanje sistema, tako što definiraju veze između odziva sistema i pobude. Ove relacije mogu imati oblik linearnih ili nelinearnih diferencijalnih jednačina, logičkih jednačina, algebarskih jednačina, itd. i nazivaju se model sistema. Pošto se analiza vrši na modelima, a ne na realnim sistemima, pojam sistem biće "prenesen" sa skupa realnih uređaja na skup apstraktnih matematičkih relacija. Teorija signala operiše gotovim modelima, ne ulazeći u njihovu tačnost. Ulazi i izlazi modela daju se u obliku vremenskih funkcija, koje se tretiraju kao signali. Modeli mogu imati jedan ili više ulaza i izlaza. Sistemi s jednim ulazom i jednim izlazom slikovito se predstavljaju blok dijagramom (slika 1.4).

Ulazni signal ili pobuda $x(t)$ predstavljen je strelicom koja ulazi u blok, a izlazni signal ili odziv sistema $y(t)$ predstavljen je strelicom koja izlazi iz bloka. Matematički model za



Slika 1.4: Grafički prikaz (model) sistema - blok dijagram.

sistem predstavljen blok dijagramom može biti jedna jednačina ili skup jednačina, koje daju vezu izlaza iz sistema i ulaza u sistem.

Osnovni matematički modeli za opisivanje sistema, koji se najčešće koriste u tehnici, su diferencijalne i diferentne jednačine ili njihovi sistemi. Diferencijalne ili diferentne jednačine mogu biti linearne ili nelinearne, stacionarne ili nestacionarne.

Ako se sa $x(t)$ označi "ulaz", dakle poznati signal, a $y(t)$ nepoznati signal ili "izlaz" iz sistema, onda linearna diferencijalna jednačina ima oblik ($t \in \mathbb{R}, t \geq 0$):

$$\begin{aligned} &a_N(t)y^{(N)}(t) + a_{N-1}(t)y^{(N-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = \\ &\quad = b_M(t)x^{(M)}(t) + b_{M-1}(t)x^{(M-1)}(t) + \ldots + b_0(t)x(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Ako su koeficijenti a_i i b_j ($i = 0 \div N, j = 0 \div M$) vremenske funkcije, jednačina 1.1 (pa i sistem koji je njome opisan) je nestacionarna. Jednačina 1.1 je stacionarna ako su koeficijenti a_i i b_j konstante (ne ovise od vremena).

Za nelinearne sisteme ne može se dati univerzalni oblik diferencijalne jednačine. Matematička relacija koja daje vezu izlaza iz sistema i ulaza u sistem, može biti bilo kakva nelinearna funkcija ulaza $x(t)$, izlaza $y(t)$ i njihovih izvoda i integrala. Linearnost je svojstvo koje nije povezano sa svojstvom stacionarnosti, odnosno nelinearni sistem može biti i stacionaran i nestacionaran. U knjizi će biti analizirani isključivo *linearni stacionarni sistemi.*

Linearna diferentna jednačina ima oblik ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$):

$$\sum_{i=0}^{N} a_i[n]y[n-i] = \sum_{j=0}^{M} b_j[n]x[n-j] \tag{1.2}$$

Ako su koeficijenti a_i i b_j vremenske funkcije, jednačina 1.2 je nestacionarna. Jednačina 1.2 je stacionarna ako su koeficijenti a_i i b_j konstante. Pomoću diferentnih jednačina opisuje se ponašanje sistema u diskretnim vremenskim trenucima n. Postoji još jedan oblik jednačine sistema tzv. *normalni oblik*, a koji se sastoji od konačnog broja diferencijalnih ili diferentnih jednačina prvog reda. Ove jednačine se nazivaju *jednačine stanja.*

Poruke i signali se pri prenosu transformiraju u analogne i digitalne signale, pa se u skladu s tim i prenos dijeli na analogni i digitalni. Harmonijskom analizom funkcija koje predstavljaju analogne signale može se doći do zaključka da ih je moguće diskretizirati, a da se pri tome ne "okrnje" njihove osobine koje imaju kao nosioci signala i poruka. Ovaj stav je od fundamentalnog značaja u savremenim telekomunikacijama i predstavlja naučnu osnovu na kojoj se grade moderni telekomunikacioni sistemi. Naime, kada se provede statistička analiza realnih kontinualnih poruka, dolazi se do zaključka da je osnovni i glavni dio njihovog spektra koncentriran u nekom konačnom intervalu učestanosti. Npr. pri prenosu govora dovoljno je prenijeti sve komponente u opsegu do 3.4[kHz] a pri prenosu

TV slike do 5[MHz]. Bitno je napomenuti da ovo ne znači da se deterministički signali mogu isključiti iz razmatranja, već je pravo pitanje kako koristiti determinističke signale za analizu i prenos slučajnih signala. Za ispitivanje osobina determinističkih signala koristi se harmonijska analiza koja se zasniva na teoriji Fourierovih redova (za periodičke signale) i Fourierove transformacije (za aperiodičke signale). Odgovor na pitanje zašto se baš sinusni oblik koristi kao osnovni se krije u činjenici da samo sinusna funkcija ima tu osobinu da su joj i izvod i integral opet sinusnog oblika.

Dekompozicija funkcije kojom je predstavljen signal omogućava sagledavanje nekih njegovih svojstava koja se ne bi mogla vidjeti neposredno iz njegovog talasnog oblika. U komunikacijama je osnovni cilj da se ostvari korektan prenos signala od izvora do korisnika. U slučaju kada je čovjek i izvor i korisnik, potrebno je da prijemni signal bude po obliku što bliži poslatom signalu, a u idealnom slučaju isti. Pri tome, izvor šalje signal u medij ili prenosni sistem, a udaljeni korisnik prima signal iz medija (sistema). U tom smislu se teži da korisnik što manje "primijeti" postojanje prenosnog sistema. Bez obzira na to, prenosni sistem, kao tehnički posrednik, neminovno unosi promjene talasnog oblika prenošenog signala, odnosno izobličava ga. Ne ulazeći u fizičke uzroke izobličenja, razlika između poslatog i primljenog signala može se izraziti tzv. *operatorom prenosa*. Matematički, operator prenosa izražava uticaj prenosnog sistema (medija). Operator zavisi od prenosnih svojstava medija (ili prenosnog sistema), a ne zavisi od oblika prenošenog signala. Prema tome, poznajući ovaj operator uvijek se može, za poznati signal, odrediti oblik signala na korisničkoj strani i utvrditi kvalitet prenosa. Očigledno je da nije svejedno kakav je operator, jer u slučaju da je komplikovan, postavljeni zadatak se teško rješava. Primjenjujući postupak preslikavanja signala kao vremenske funkcije u odgovarajući funkcionalni domen, dobiva se slika signala. Tada se razmatranje uticaja prenosnog sistema na prenošeni signal svodi na odgovarajuće matematičke operacije, odnosno prenos signala se posmatra u matematičkom domenu.

1.1.7 Osnovne primjene procesiranja signala

Procesiranje signala i njihova digitalna obrada pripada onim disciplinama koje svoj razvoj duguju razvoju računarske tehnike. Veliki podsticaj ovoj oblasti predstavljala je pojava mikroprocesora, a posebno specijalnih integriranih digitalnih procesora signala, koji su brzini hardverskih realizacija dodali i mogućnost programiranja. Obrada signala izučava prezentaciju signala pomoću sekvenci brojeva ili simbola i obradu (procesiranje) tih sekvenci. Svrha takve obrade može biti estimacija karkterističnih parametara signala ili pretvaranje signala u formu pogodnu za dalju obradu.

Proučavajući sve primjene procesiranja signala, od telekomunikacija, akustike, obrade slike, biomedicinskog inženjeringa, aeronautike, astronomije, seizmologije, kontrole hemijskih procesa, itd., može se vidjeti da je to interdisciplinarna oblast i da se ne mogu povući oštra razgraničenja između ove i drugih oblasti, kao što su analogna i digitalna elektronika, numerička analiza, vjerovatnoća i statistika, analogna obrada signala, teorija informacija, teorija komunikacija, itd.

U telekomunikacionoj industriji i područjima kao što su: generiranje i detekcija signala, filtriranje, pomjeranje frekventnog opsega itd., digitalna obrada signala je nezamjenjiva. Primjeri primjene digitalnog procesiranja signala kao što su: multipleksiranje, kompresija i kontrola eha su karakteristični za telekomunikacionu mrežu. Teorija akustike govornog signala razvila je širok opseg matematičkih modela za reprezentiranje govornog

signala. Ovo je također jedno od značajnijih područja primjene obrade signala.

Obrada slike predstavlja obradu signala specijalnih karakteristika. Npr. signali kojima se opisuju slike su zanimljivi i zbog toga što se ne opisuju samo u vremenskom domenu, već i u tzv. prostornom domenu, a signali su višedimenzionalne vektorske funkcije. Obrada slike ima mnogobrojne primjene. Aktuelna je primjena obrade u identifikaciji ljudi i predmeta, u oblasti sigurnosti, robotici (rješavanje problema lokalizacije) i mnogim drugim oblastima.

Digitalna obrada slike ima poseban značaj u domenu medicinske dijagnostike. Medicina je doživjela revoluciju uz tehnike procesiranja biomedicinskih signala, koje su omogućile otkrivanje značajnih informacija o fiziološkim procesima i potpuno izmijenile način dijagnosticiranja raznih bolesti. Savremena medicina je nezamisliva bez oslanjanja na informacije koje se dobiju akvizicijom i tumačenjem signala, kao što je na primjer kompjuterska tomografija (CT), pri čemu je CT skener klasični primjer korištenja digitalne obrade signala. Automatizirana obrada signala koji predstavljaju električnu aktivnost srca, odnosno mozga (elektrokardiogram (EKG) odnosno elektroencefalogram (EEG)) u frekventnom i vremenskom domenu je od izuzetne važnosti za dijagnostiku bolesti srca, epilepsije, poremećaja sna, fizičkih nedostataka, itd.

1.2 Programsko okruženje Python

1.2.1 Repozitorij i priprema radnog okruženja

Prije svega, važno je naglasiti da je programski jezik Python u okviru ove knjige tretiran isključivo kao instrument za obradu i vizualizaciju signala, a ne kao samostalni predmet izučavanja. Iz tog razloga, kodovi su pisani s ciljem maksimalne jednostavnosti i čitljivosti kako bi vjerno pratili i objašnjavali inženjerske koncepte, dok je savladavanje kompleksnije sintakse jezika prepušteno samostalnom istraživanju čitaoca.

Nadalje, svi primjeri i zadaci korišteni u ovoj knjizi dostupni su u javnom GitHub repozitoriju `https://github.com/esokic/sis`, gdje su organizovani po odgovarajućim poglavljima, u obliku tzv. Jupyter notebook-a (`.ipynb` fajlova), tako da se kod iz svakog poglavlja može pratiti, pokretati i po volji mijenjati usporedo sa čitanjem teksta.

Notebook-e nije potrebno pokretati lokalno. Najjednostavniji način je otvoriti ih direktno online, u nekom od besplatnih okruženja za rad sa Jupyter notebook-ima – na primjer Google Colab – gdje se repozitorij otvara direktno preko GitHub linka, bez ikakve instalacije na sopstvenom računaru. Isti pristup nude i druga slična online okruženja (npr. Binder), pa se čitalac može opredijeliti za ono koje mu najviše odgovara.

Za eventualno lokalno pokretanje navedenih kodova potrebno je imati instaliran Python (3.x) i biblioteke `numpy`, `matplotlib` i `jupyter`, koje su također javno dostupne putem interneta. Nakon preuzimanja repozitorija (korištenjem `git clone` ili preuzimanjem ZIP arhive sa GitHub-a), instalacija se svodi na pokretanje komandi:

```
pip install numpy matplotlib jupyter
```

nakon čega se, iz direktorija u koji je repozitorij preuzet, notebook pokreće komandom:

```
jupyter notebook
```

1.2.2 Modul `sis`

Uz standardne biblioteke, repozitorij sadrži i pomoćni modul `sis.py`, korišten prvenstveno za pomoć pri vizualizaciji rezultata izvršavanja programskih kodova u ovoj knjizi. Modul se importuje na početku svakog notebooka:

Programski kod 1.1

```
import sis
```

Za kontinualni signal, komanda koja omogućava crtanje signala, izgleda, na primjer:

Programski kod 1.2

```
sis.dijagram(t, x, naslov='u(t)')
```

dok ekvivalentni Python (matplotlib) kod (bez modula `sis`) izgleda ovako:

Programski kod 1.3

```
fig, ax = plt.subplots(figsize=(4.5, 2.5))
ax.plot(t, x, color='darkgreen', linestyle='-')
ax.axhline(0, color='k', linewidth=0.5, linestyle='--')
ax.set_xlabel('$t$')
ax.set_title('u(t)')
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Za diskretnu sekvencu, dovoljno je promijeniti tip:

Programski kod 1.4

```
sis.dijagram(n, x, tip='uzorci', naslov='x[n]')
```

Funkcija podržava i prikaz više krivih u istom dijagramu, miješanje linija i uzoraka u istom prikazu, kao i dodatne parametre za granice i oznake osa, boje, oznake u legendi i markere. Detaljniji pregled svih parametara funkcije `sis.dijagram()`, kao i način korištenja ostalih funkcija u okviru pomoćnog modula `sis.py` dat je na repozitoriju (`https://github.com/esokic/sis`).

2. Kontinualni signali i sistemi

Kontinualni signal $f(t)$ je realna ili kompleksna jednoznačno određena vremenska funkcija, definirana za svako t. Dakle, termin kontinualni odnosi se isključivo na kontinualnost signala u vremenskom domenu. Većina signala nastalih iz prirodnih izvora, kao i većina vještački proizvedenih signala su kontinualni po vremenu i amplitudi (tzv. analogni signali).

2.1 Klasifikacija kontinualnih signala

Signali se mogu klasificirati na više načina. Pored podjele na kontinualne i diskretne signale, signali mogu biti: periodički i aperiodički, parni i neparni, signali snage i signali energije, deterministički i slučajni.

2.1.1 Periodički i aperiodički signali

Za signal $f(t)$ se kaže da je periodički i da ima period T_0 ako zadovoljava relaciju:

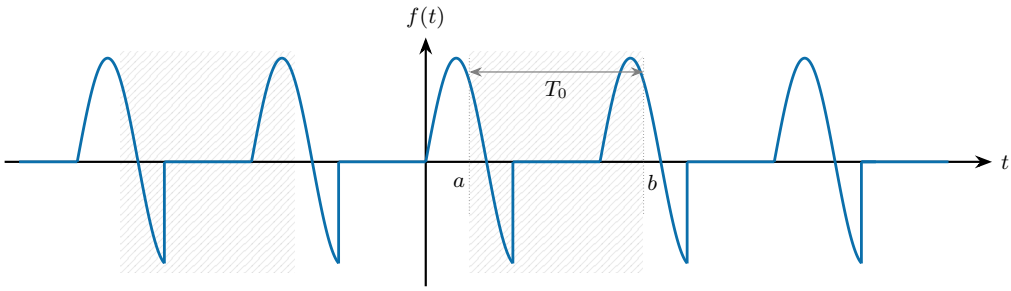
$$f(t) = f\left(t + T_0\right) \text{ za svako } t \in (-\infty, \infty) \tag{2.1}$$

gdje je T_0 bilo koja pozitivna konstanta. Ako je uslov (2.1) ispunjen za T_0, onda je ispunjen i za $2T_0, 3T_0, 4T_0, \ldots, mT_0$, gdje je m cijeli (pozitivan) broj. Najmanja vrijednost T_0 naziva se osnovni (fundamentalni) period signala. U skladu sa definicijom, periodički signal $f(t)$ ostaje nepromijenjen kada se vremenu t doda osnovni period T_0 (slika 2.1). Ukoliko uslov (2.1) nije ispunjen, signal je aperiodički.

Druga važna osobina periodičkog signala $f(t)$ je ta da se $f(t)$ može dobiti periodičkim ponavljanjem bilo kojeg segmenta signala $f(t)$ u trajanju osnovnog perioda T_0 u oba smjera t ose. Na slici 2.1. prikazan je periodički signal $f(t)$ perioda T_0. Šrafirani dio signala na slici 2.1. je segment signala $f(t)$ koji počinje u trenutku $t = a$, a završava se trenutku $t = b = a + T_0$ i ima trajanje jednog perioda T_0. Kada se taj segment preslika beskonačno puta (slika 2.1.) u oba smjera t ose, dobije se periodički signal $f(t)$.

Periodički signal perioda T_0 ima uvijek istu površinu ispod signala na intervalu T_0 za bilo koje realne brojeve a i b, što je treća osobina i analitički se može napisati kao:

$$\int_a^{a+T_0} f(t)dt = \int_b^{b+T_0} f(t)dt \tag{2.2}$$



Slika 2.1: Primjer periodičkog signala sa periodom T_0. Signal je moguće formirati beskonačnim preslikavanjem jednog segmenta signala, u trajanju od jednog perioda.

2.1.2 Parni i neparni signali

Realni signal $f(t)$ se može rastaviti na sumu parnog $f_p(t)$ i neparnog $f_n(t)$ dijela signala, odnosno:

$$f(t) = f_p(t) + f_n(t) \tag{2.3}$$

Za realni signal $f(t)$ se kaže da je paran ako vrijedi relacija:

$$f(t) = f(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Za parne signale (slika 2.2.a) također vrijedi:

$$\int_{-a}^{+a} f(t)dt = 2\int_{0}^{+a} f(t)dt \tag{2.5}$$

Signal je neparan ako vrijedi relacija:

$$f(t) = -f(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

Za neparne signale (slika 2.2.b) vrijedi relacija:

$$\int_{-a}^{+a} f(t)dt = 0 \tag{2.7}$$

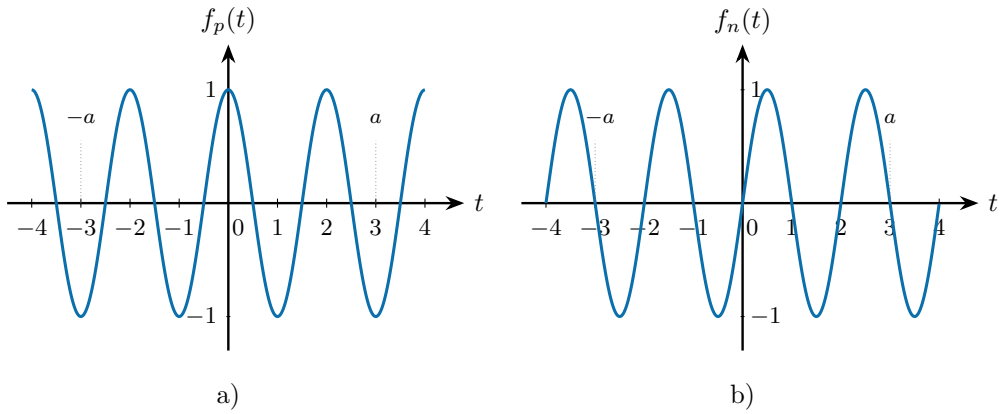
Kako je, na osnovu relacija (2.3), (2.4) i (2.6):

$$f(-t) = f_p(-t) + f_n(-t) = f_p(t) - f_n(t) \tag{2.8}$$

to se $f_p(t)$ i $f_n(t)$ određuju iz relacija (2.3) i (2.8), tako da je:

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_n(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \tag{2.9}$$

Može se jednostavno pokazati da su proizvodi dva parna ili dva neparna signala također parni signali, dok je proizvod parnog i neparnog signala neparan signal.



Slika 2.2: a) Primjer parnog signala, b) primjer neparnog signala.

Primjer 2.1:

Aperiodički signal $f(t)$ prikazan na slici 2.3.a rastaviti na parni i neparni dio.

Rješenje:
Parni i neparni dio signala $f(t)$ prikazani su na slikama 2.3.c i 2.3.d. Vidljivo je da se sabiranjem parnog $f_p(t)$ i neparnog $f_n(t)$ dijela signala ponovo dobija originalni signal $f(t)$ koja nije ni parna ni neparna vremenska funkcija.

Primjer 2.2:

Odrediti da li je signal:

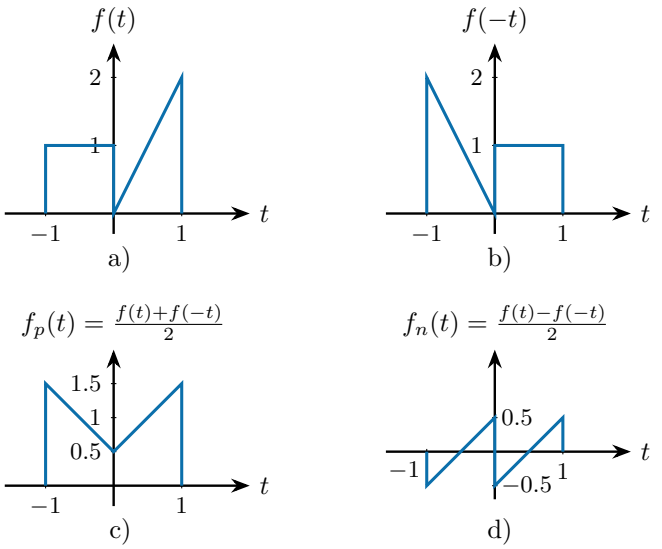
$$f(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases}$$

parna ili neparna vremenska funkcija.

Rješenje:
Zamjenjujući t sa $-t$ dobija se:

$$f(-t) = \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases} = \begin{cases} -\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right), & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases} = -f(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

što zadovoljava relaciju (2.6), odnosno signal $f(t)$ je neparna vremenska funkcija.



Slika 2.3: Razlaganje signala $f(t)$ na parni i neparni dio (primjer 2.1).

Primjer 2.3:

Odrediti analitički oblik parnog i neparnog dijela signala:

$$f(t) = e^{-2t}\cos t$$

Rješenje:
Zamjenjujući promjenljivu t sa $-t$ u relaciji za $f(t)$ dobija se:

$$f(-t) = e^{2t}\cos(-t) = e^{2t}\cos t$$

Na osnovu relacije (2.9) analitički oblici parnog i neparnog dijela zadatog signala su:

$$f_p(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t}\cos t + e^{2t}\cos t\right) = \mathrm{ch}(2t)\cdot\cos t$$
$$f_n(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-2t}\cos t - e^{2t}\cos t\right) = -\,\mathrm{sh}(2t)\cdot\cos t$$

gdje su $\cosh(2t)\mathrm{i}\sinh(2t)$ hiperbolni kosinus i sinus.

Signali prikazani na slikama 2.2.a i 2.2.b u Pythonu se mogu zadati programskim kodom 2.1.

Iako se kontinualni signali po svojoj definiciji suštinski razlikuju od diskretnih signala, način njihovog zadavanja i predstavljanja u Pythonu je sličan. Naime, kontinualna funkcija $f(t)$, po definiciji, definirana je za svaku vrijednost vremena t. Međutim, prili-

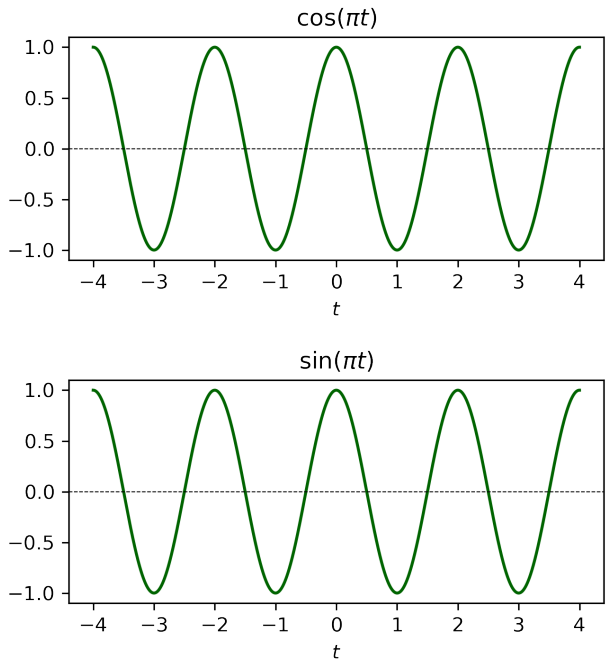
kom procesiranja signala digitalnim računarima, vrijeme t tipično ima diskretni karakter, tj. definirano je kao niz vrijednosti u odgovarajućim vremenskim trenucima. Funkcija $f(t)$ zadana izrazom $f(t) = \cos(\pi t)$, za vremenski niz t = $[-4, -3.999, -3.998, \ldots, 4]$, predstavlja sekvencu od 8001 člana jer je vremenski korak 0.001. Prvi element niza $f[0]$ definiran je za $t = -4$, drugi $f[1]$ za $t = -3.999$, i tako redom do posljednjeg elementa $f[8000]$, koji je definiran za $t = 4.000$. Smanjivanjem vremenskog koraka kontinualni signal se približava idealnoj predstavi.

Programski kod 2.1

```
t = np.arange(-4, 4.001, 0.001)

x1 = np.cos(np.pi * t)
sis.dijagram(t, x1, naslov='$\cos(\pi t)$')

x2 = np.cos(np.pi * t)
sis.dijagram(t, x1, naslov='$\sin(\pi t)$')
```



2.1.3 Signali snage i energije

U električnim sistemima izvor signala je napon ili struja. Bilo kakva promjena u izvoru signala zahtijeva ulaganje određene količine energije. Brzina kojom se energija ulaže predstavlja trenutnu snagu definiranu kao:

$$p(t) = \frac{dE(t)}{dt} \tag{2.10}$$

Trenutna promjena snage može se izraziti kao odgovarajuća promjena signala.

U električnim sistemima tipičan signal je napon ili struja. Ako električno kolo sadrži otpornik R, kroz koga protiče struja $i(t)$, onda je pad napona na otporniku $u(t)$. Trenutna promjena snage na otporniku R je:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \frac{1}{R} \cdot u^2(t) = R \cdot i^2(t) \tag{2.11}$$

Iz relacije (2.11) slijedi da je trenutna snaga proporcionalna kvadratu naponskog ili strujnog signala. Ako se u relaciji (2.11) koeficijent proporcionalnosti proglasi jediničnim ($R = 1[\Omega]$), onda je u općem slučaju za neki realni signal $f(t)$ trenutna snaga data sa:

$$p(t) = f^2(t)$$

U slučaju kompleksnog signala $f(t)$ snaga je:

$$p(t) = f(t)f^*(t) \tag{2.12}$$

Na osnovu relacije (2.12) ukupna energija E, za signal $f(t)$, je:

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)dt \tag{2.13}$$

Energija signala u određenom intervalu $[a, b]$, određuje se na osnovu relacije:

$$E_{ab} = \int_a^b p(t)dt \tag{2.14}$$

a zavisi od veličine intervala $[a, b]$ i njegove pozicije na vremenskoj osi.

Računanje energije periodičkog signala na neograničenom vremenskom intervalu nema smisla, jer za $t \in (-\infty, \infty)$ ukupna energija je u općem slučaju beskonačna. Za periodičke signale vrijednost energije računa se samo na jednom periodu, odnosno za interval $[a, a + T]$.

Srednja snaga signala, u općem slučaju, definira se relacijom:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f^*(t)dt \tag{2.15}$$

Za periodički signal snaga $p(t)$ također je periodički signal, pa se srednja snaga periodičkog signala $f(t)$, na osnovnom periodu T_0, nalazi na osnovu relacije:

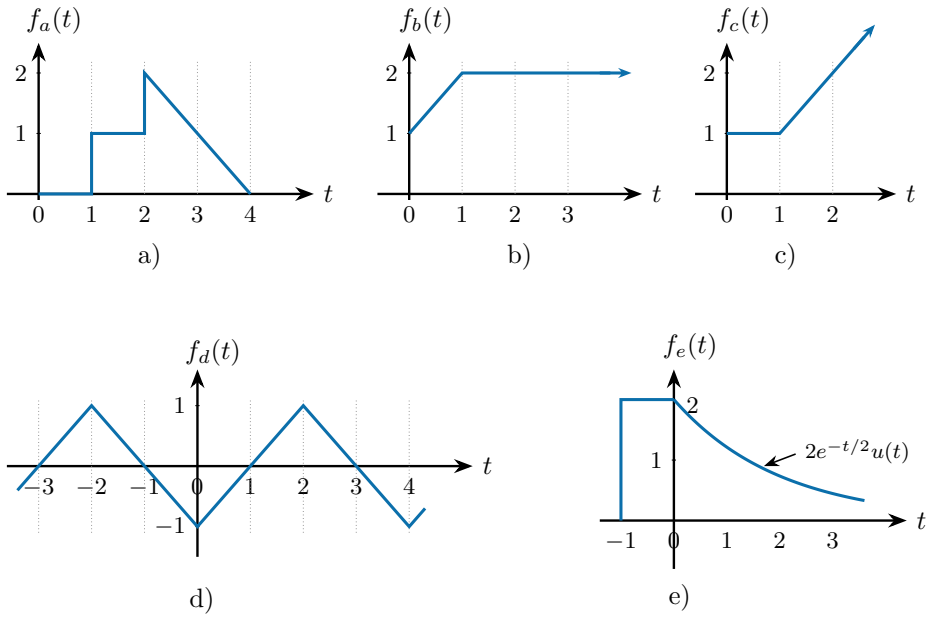
$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)f^*(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} p(t)dt \tag{2.16}$$

Kvadratni korijen srednje snage P je efektivna vrijednost (engl. *Root Mean-Square - RMS*) signala $f(t)$.

U odnosu na definiciju ukupne energije (2.13) i srednje snage (2.15) i (2.16) definiraju se dvije klase signala: signali snage i signali energije.

Signal $f(t)$ naziva se **signal snage** ako i samo ako srednja snaga signala zadovoljava uslov:

$$0 < P < \infty \tag{2.17}$$



Slika 2.4: Kontinualni signali (primjer 2.4).

Signal snage ima beskonačnu energiju ($E = \infty$). Takvi su slučajni signali i periodički signali kod kojih amplituda, za $t \to \infty$, ne pada na nulu.

Signal $f(t)$ naziva se **signal energije** ako i samo ako ukupna energija signala zadovoljava uslov:

$$0 < E < \infty \tag{2.18}$$

Signal energije ima srednju snagu jednaku nuli:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t)dt = 0 \tag{2.19}$$

Takvi su aperiodički signali kod kojih amplituda signala, za $t \to \infty$, pada na nulu.

Primjer 2.4:

Izračunati energiju i srednju snagu kontinualnih signala prikazanih na slici 2.4.

Rješenje:

a) Sa slike 2.4. se vidi da je signal $f_a(t)$ aperiodički. Kako amplituda signala $f_a(t)$, za

$t \to \infty$, pada na nulu, kao mjera signala računa se energija signala:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a^2(t)dt = \int_1^2 (1)^2 dt + \int_2^4 (-t+4)^2 dt =$$
$$= t|_1^2 + \int_2^4 \left(t^2 - 8t + 16\right) dt = 1 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_2^4 - 4t^2|_2^4 + 16t|_2^4 = \frac{11}{3}$$

Srednja snaga signala $f_a(t)$, za $T \to \infty$, je:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_a^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_1^2 (1)^2 dt + \int_2^4 (-t+4)^2 dt \right\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ t|_1^2 + \int_2^4 \left(t^2 - 8t + 16\right) dt \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ 1 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_2^4 - 4t^2|_2^4 + 16t|_2^4 \right\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{11}{3} = 0$$

b) Sa slike 2.4. vidi se da je signal $f_b(t)$ aperiodički. Kako amplituda signala $f_b(t)$, za $t \to \infty$, ne pada na nulu energija je $E = \infty$, a kao mjera signala računa se srednja snaga signala:

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_b^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^1 (t+1)^2 dt + \int_1^{T/2} (2)^2 dt \right\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \left.\left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right)\right|_0^1 + 4t|_1^{T/2} \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ 2T - \frac{5}{3} \right\} = 2$$

c) Signal $f_c(t)$ je aperiodički (slika 2.4.). Kako amplituda signala $f_c(t)$, za $t \to \infty$, ne pada na nulu, nego teži u beskonačno, energija je $E = \infty$, a kao mjera signala računa se srednja snaga signala koja je također ∞ :

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_c^2(t)dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^1 (1)^2 dt + \int_1^{T/2} (t)^2 dt \right\}$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ t|_0^1 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{T/2} \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{T}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \right\} = \infty$$

d) Signal $f_d(t)$ je periodički sa periodom $T = 4$ (slika 2.4.). Kako amplituda signala $f_d(t)$, za $t \to \infty$, ne pada na nulu, energija signala je $E = \infty$, a kao mjera signala računa se srednja snaga signala na periodu T:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_d^2(t)dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^{+2} f_d^2(t)dt = \frac{1}{4} \left\{ \int_{-2}^0 (-t-1)^2 dt + \int_0^2 (t-1)^2 dt \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \left\{ \int_{-2}^0 \left(t^2 + 2t + 1\right) dt + \int_0^2 \left(t^2 - 2t + 1\right) dt \right\}$$
$$= \frac{1}{4} \left\{ \left.\left(\frac{t^3}{3} + t^2 + t\right)\right|_{-2}^0 + \left.\left(\frac{t^3}{3} - t^2 + t\right)\right|_0^2 \right\} = \frac{1}{3}$$

e) Signal $f_e(t)$ je aperiodički (slika 2.4.). Kako amplituda signala $f_e(t)$, za $t \to \infty$, pada na nulu, srednja snaga signala je $P = 0$, a kao mjera signala računa se energija signala:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f_e^2(t)dt = \int_{-1}^{0} (2)^2 dt + \int_{0}^{+\infty} \left(2e^{-t/2}\right)^2 dt = 4t|_{-1}^{0} + 4 \cdot \frac{e^{-t}}{-1}\Big|_{0}^{+\infty} = 8$$

2.2 Specijalni kontinualni signali

Za analizu signala i sistema važni su tzv. specijalni signali (elementarne funkcije): sinusni (kosinusni) signal, kompleksni i realni eksponencijalni signal, jedinična funkcija, signum funkcija, jedinična rampa, trougaoni signal, pravougaoni signal, delta funkcija, povorka impulsa i periodička Sa funkcija.

2.2.1 Sinusni signal

Sinusni (kosinusni) signal $x(t)$ osnovne frekvencije f_0 [Hz], amplitude A (čija mjerna jedinica zavisi od fizičke prirode signala) i faze θ, može se napisati u obliku:

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{2.20}$$

gdje je ugaona frekvencija:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{2.21}$$

Recipročna vrijednost osnovne frekvencije f_0 naziva se osnovni period T_0 periodičkog signala, a određuje se iz relacije:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} \quad [s] \tag{2.22}$$

Za sinusni signal frekvencije nf_0, gdje je n cijeli pozitivan broj, kaže se da je n-ti harmonik sinusnog signala frekvencije f_0.

Neka je $x_1(t)$ periodički signal s periodom T_1, a $x_2(t)$ periodički signal s periodom T_2. Primjenom relacije (2.1) na signale $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dobija se:

$$x_1(t) = x_1(t + T_1) = x_1(t + mT_1) \tag{2.23}$$

gdje je mT_1 period koji je m puta veći od osnovnog ($m \in \mathbb{N}$), odnosno:

$$x_2(t) = x_2(t + T_2) = x_2(t + kT_2) \tag{2.24}$$

gdje je kT_2 period koji je k puta veći od osnovnog ($k \in \mathbb{N}$). Ukoliko je signal $x_3(t)$ linearna kombinacija signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$, periodičnost signala $x_3(t)$ zavisi od perioda T_1 i T_2:

$$x_3(t) = x_3(t + T_3) = ax_1(t) + bx_2(t) = ax_1(t + mT_1) + nx_2(t + kT_2) \tag{2.25}$$

Signal $x_3(t)$ će biti periodički ako je:

$$T_3 = mT_1 = kT_2 \quad \text{ili} \quad T_1/T_2 = k/m \tag{2.26}$$

T_1/T_2 mora biti racionalan pozitivan broj. Period linearne kombinacije signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dat je relacijom (2.26). Ako je T_1/T_2 iracionalan broj, onda signali $x_1(t)$ i $x_2(t)$ nemaju zajednički period, a $x_3(t)$ nije periodički signal, ali je veoma blizak periodičkom signalu (tzv. kvaziperiodički signal ili "skoro periodički" signal).

Primjer 2.5:

Odrediti da li su signali:

a) $x_1(t) = \cos(t)$

b) $x_2(t) = \cos^2(2\pi t)$

c) $x_3(t) = \sin(10\pi t)$

d) $x_4(t) = \sin(0.2\pi t)$

e) $x_5(t) = \sin(39t)$

f) $x_6(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

periodički ili aperiodički. Ako su periodički, odrediti osnovni (fundamentalni) period.

Rješenje:
a) Za signal $x_1(t) = \cos(t)$ period se određuje iz:

$$\frac{2\pi}{T_1} \cdot t = t \Rightarrow T_1 = 2\pi, \quad f_1 = \frac{1}{2\pi}[\text{ Hz}], \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 1\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

Signal je periodički ako vrijedi relacija (2.1). Ako se ta relacija primjeni na signal $x_1(t)$ dobije se:

$$x_1(t+T_1) = x_1(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) = \cos(t)\underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - \sin(t)\sin(2\pi)^0 = \cos(t)$$

Dakle, signal $x_1(t) = \cos(t)$ je periodički signal osnovnog perioda $T_1 = 2\pi$.

b) Signal $x_2(t) = \cos^2(2\pi t)$ se može napisati u obliku:

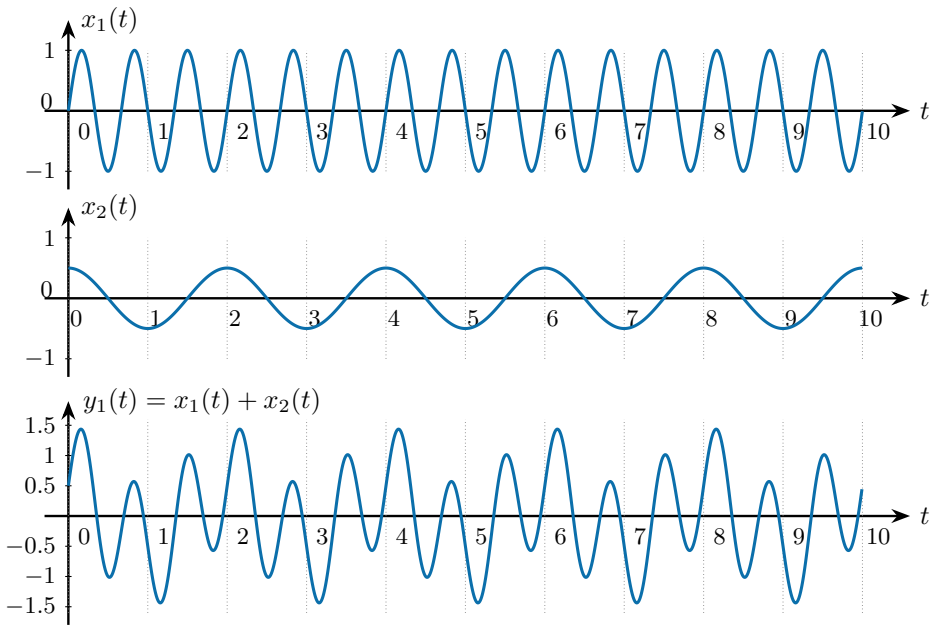
$$x_2(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1}{2}[1 + \cos(4\pi t)]$$

Osnovni period signala $x_2(t)$ određuje se iz relacije:

$$4\pi = \frac{2\pi}{T_2} \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}$$

Jednosmjerna komponenta 1/2 ne utiče na period signala. Na osnovu relacije (2.1) može se napisati:

$$x_2(t+T_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos[4\pi(t+T_2)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t + 2\pi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi t)$$



Slika 2.5: Periodički signal kao linearna kombinacija periodičkih signala (primjer 2.6.a).

Dakle, signal $x_2(t)$ je periodički signal.

c) Signal $x_3(t) = \sin(10\pi t)$ ima period $T_3 = \frac{1}{5}$, te je $x_3(t)$ periodički signal.

d) Signal $x_4(t) = \sin(0.2\pi t)$ ima period $T_4 = 10$, te je $x_4(t)$ periodički signal.

e) Signal $x_5(t) = \sin(39t)$ ima period $T_5 = \frac{2\pi}{39}$, te je $x_5(t)$ periodički signal.

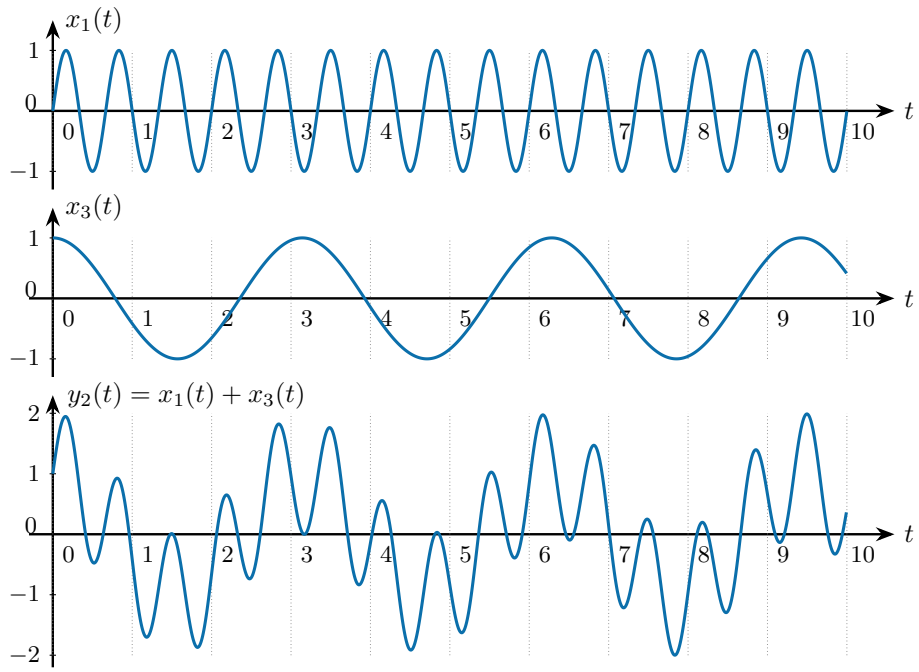
f) Signal $x_6(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$ je proizvod aperiodičkog i periodičkog signala, što znači da je aperiodički signal.

Primjer 2.6:

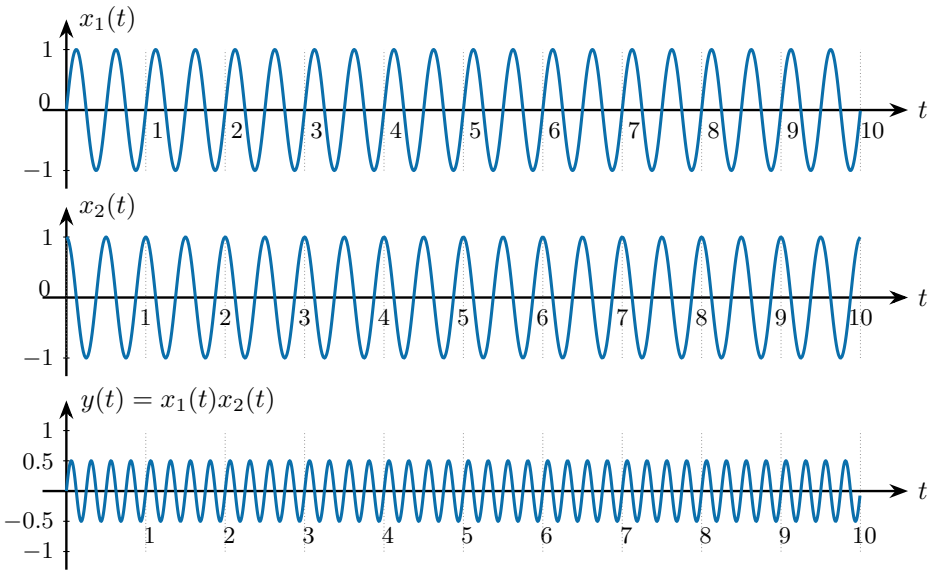
Periodički signali $x_1(t)$, $x_2(t)$ i $x_3(t)$ zadati su analitički:

$$x_1(t) = \sin(3\pi t), \quad x_2(t) = 0.5\cos(\pi t), \quad x_3(t) = \cos(2t)$$

Da li su signali:
a) $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$
b) $y_2(t) = x_1(t) + x_3(t)$
periodički? Ako jesu, odrediti period.



Slika 2.6: Kvaziperiodički signal kao linearna kombinacija periodičkih signala (primjer 2.6.b).



Slika 2.7: Periodički signali istog perioda i njihov proizvod (primjer 2.7).

Rješenje:
a) Signal $x_1(t) = \sin(3\pi t)$, prikazan na slici 2.5. ima period $T_1 = 2/3[s]$, dok signal $x_2(t) = 0.5\cos(\pi t)$ ima period $T_2 = 2[s]$. Odnos $T_1/T_2 = 1/3$ je racionalan broj, te je $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ periodički signal sa periodom $T = 3T_1 = T_2 = 2[s]$.
Dakle, period sume signala $x_1(t) + x_2(t)$ je $T = 2[s]$. Za to vrijeme signal $x_1(t)$ se ponovi tri puta, a signal $x_2(t)$ jedanput (slika 2.5.).

b) Signal $x_1(t) = \sin(3\pi t)$, prikazan na slici 2.6. ima period $T_1 = 2/3[s]$, a signal $x_3(t) = \cos(2t)$ ima period $T_3 = \pi[s]$. Odnos $T_1/T_3 = 2/3\pi$ je iracionalan broj, te suma $y_2(t) = x_1(t) + x_3(t)$ nije periodički signal, ali je veoma blizak periodičkom signalu. Takav signal se naziva kvaziperiodički signal ili skoro periodički signal.

Primjer 2.7:

Periodički signali su zadati slijedećim relacijama:

$$x_1(t) = \sin(2\pi t), \quad x_2(t) = \cos(2\pi t)$$

Da li je signal $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ koji predstavlja njihov proizvod, periodički? Ako jeste, odrediti period.

Rješenje:
Kako je signal $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ proizvod signala sistim periodom $T = 1[s]$, to je: $y(t) = \sin(2\pi t)\cos(2\pi t) = 0.5\sin(4\pi t)$. Dakle, $y(t)$ je perodički signal s periodom $0.5[s]$. Dakle, u slučaju određivanja perioda proizvoda dva signala ne važi pravilo (2.26). Komponente signala, kao i sam signal prikazani su na slici 2.7.

2.2.2 Kompleksni eksponencijalni signal

Kompleksni eksponencijalni signal predstavlja generalizaciju sinusnog signala, i opisan je izrazom:

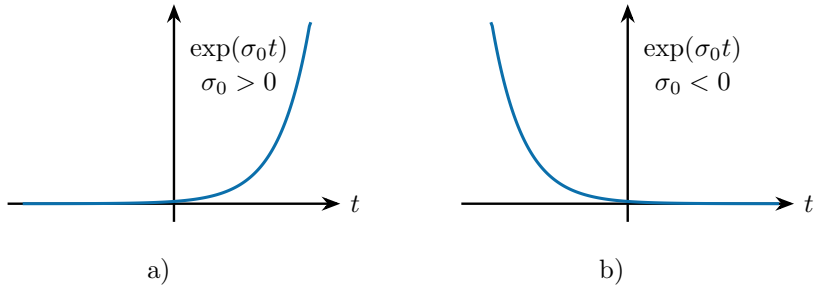
$$x(t) = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t}\left[\cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)\right] \tag{2.27}$$

Parametar σ_0 predstavlja prigušenje, a ω_0 kružnu učestanost.
Realni eksponencijalni signal definira se relacijom:

$$x(t) = Ae^{\sigma_0 t} \tag{2.28}$$

gdje su A i σ_0 realni parametri. Veličina A je vrijednost eksponencijalnog signala u trenutku $t = 0$. Zavisno od toga da li je parametar σ_0 pozitivan ili negativan, eksponencijalni signal može biti:

- monotono rastući, za $\sigma_0 > 0$ (slika 2.8.a),
- monotono opadajući, za $\sigma_0 < 0$ (slika 2.8.b).



Slika 2.8: Eksponencijalni signali: a) monotono rastući, b) monotono opadajući.

Primjer 2.8:

Koristeći programski paket Python nacrtati signale:

$$x_1(t) = 2e^{-0.6t}\sin(10\pi t), \quad x_2(t) = e^{(-0.5+j5\pi)t}$$

Rješenje:
Signal $x_1(t)$ je proizvod realnih signala, aperiodičkog $e^{-0.6t}$ i periodičkog $\sin(10\pi t)$. Rezultat je aperiodički signal (slika u okviru programskog koda 2.2).

Signal $x_2(t)$ može se rastaviti na realni i imaginarni dio, a vremenski oblici ta dva dijela signala prikazani su na slici u okviru programskog koda 2.2. Oba dijela imaju isti faktor prigušenja $\sigma_0 = -0.5$:

$$x_2(t) = e^{(-0.5+j5\pi)t} = e^{-0.5t}\cos(5\pi t) + je^{-0.5t}\sin(5\pi t)$$

Odgovarajući program je dat programskim kodom 2.2.

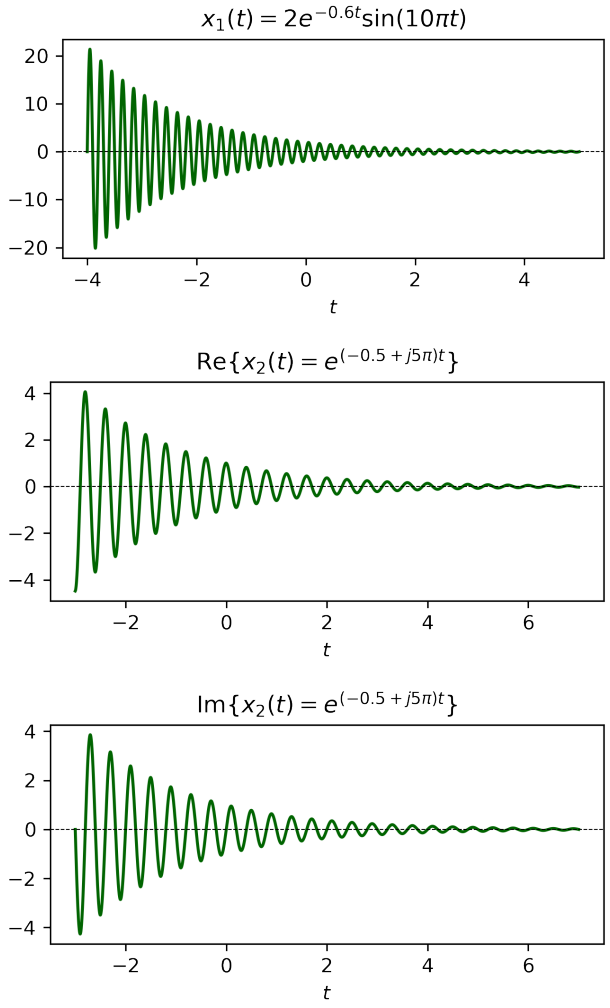
Programski kod 2.2

```
# proizvod aperiodickog i periodickog signala
t1 = np.arange(-4, 5.001, 0.001)
x1 = 2 * np.exp(-0.6 * t1) * np.sin(10 * np.pi * t1)

sis.dijagram(t1, x1, naslov=r'$x_{1}(t)=2 e^{-0.6t} \sin (10 \pi t)$')

# realni i imaginarni dio kompleksnog eksponencijalnog
t2 = np.arange(-3, 7.001, 0.001)
x2 = np.exp((-0.5 + 1j * 5 * np.pi) * t2)

sis.dijagram(t2, np.real(x2),
             naslov = r'$\mathrm{Re}\{x_2(t) = e^{(-0.5+j5\pi)t}\}$')
sis.dijagram(t2, np.imag(x2),
             naslov = r'$\mathrm{Im}\{x_2(t) = e^{(-0.5+j5\pi)t}\}$')
```



Primjer 2.9:

Koristeći programski paket Python nacrtati signal:

$$x(t) = 0.5e^{-t}\cos(19\pi t) + e^{-0.6t}\cos(21\pi t)$$

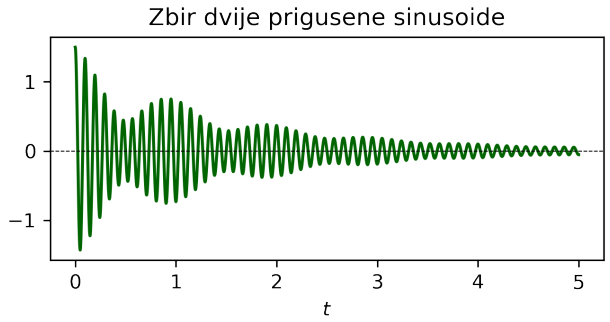
koji predstavlja zbir dvije sinusoide različitih perioda prigušene različitim eksponencijalnim signalima.

Rješenje: Odgovarajući program je dat programskim kodom 2.3.

Programski kod 2.3

```
t = np.arange(0, 5.001, 0.001)
x = (0.5 * np.exp(-t) * np.cos(19 * np.pi * t)
     + np.exp(-0.6 * t) * np.cos(21 * np.pi * t))

sis.dijagram(t, x, naslov='Zbir dvije prigusene sinusoide')
```



2.2.3 Jedinična, step, odskočna ili Heavisideova funkcija

Sinusni i eksponencijalni signali nisu pogodni za opis signala sa diskontinuitetima. Zato se koristi jedinična funkcija $u(t)$ koja je definirana na dva načina (slika 2.9.):

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{ili} \qquad u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2.29}$$

Obje definicije daju, u većini slučajeva, iste rezultate. Razlika se pojavljuje samo kada je t blisko nuli, jer funkcija ima diskontinuitet. U inženjerskim primjenama se uglavnom koristi prva definicija.

Jediničnom funkcijom se često izražava i kauzalnost nekog drugog signala. Neka za signal $f(t)$ važi slijedeće:

$$f(t) = 0 \quad \text{za} \quad t < t_1 \tag{2.30}$$

Ako je $t_1 \geq 0$ signal se naziva *kauzalnim* (fizičkim, neanticipativnim ili nepredviđajućim).

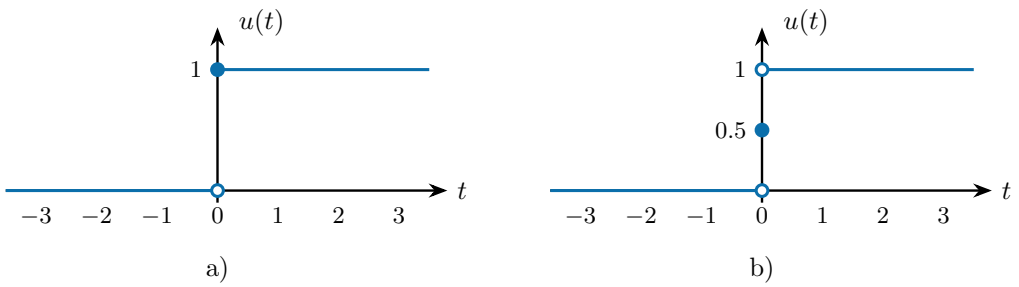
Ako postoji $t_2 \in \mathbb{R}$ takav da važi:

$$f(t_2) \neq 0 \quad \text{za} \quad t_2 < 0 \tag{2.31}$$

odnosno da signal ima nenulte vrijednosti i u "negativnom" vremenu, onda se taj signal naziva *nekauzalnim* (anticipativnim ili predviđajućim). Ako pak signal ima nenulte vrijednosti za $t < 0$, a jednak je nuli za $t \geq 0$, tada je takav signal "strožije" nekauzalan, i naziva se *antikauzalan* signal. U nastavku knjige će se uglavnom koristiti (slabiji) termin nekauzalan i za opis antikauzalnih signala.

Kauzalnost nekog signala $f(t)$ može se izraziti relacijom:

$$f(t) = f(t) \cdot u(t) \tag{2.32}$$



Slika 2.9: Jedinična funkcija (vizualizacija u skladu sa definicijom (2.29)): a) $u(0) = 1$, b) $u(0) = 0.5$.

Ako se želi naglasiti da je signal za $t \geq 0$ dat nekim zakonom, npr. zakonom e^{-at}, onda se to može napisati na slijedeći način:

$$f(t) = e^{-at} \cdot u(t) \tag{2.33}$$

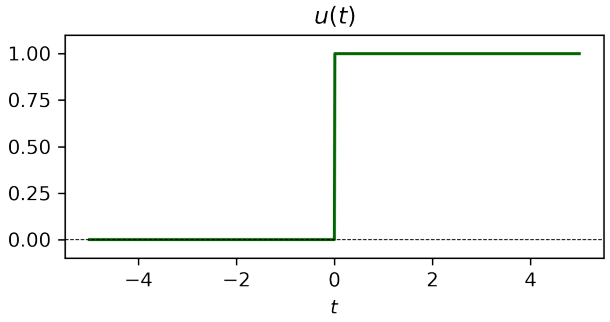
U Pythonu se jedinična odskočna funkcija se može predstaviti na slijedeći način:

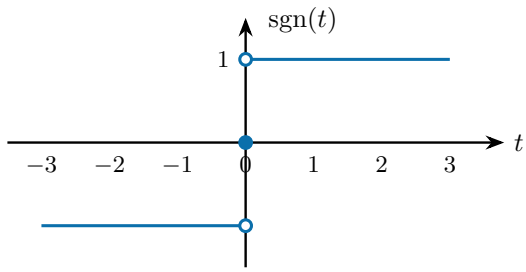
Programski kod 2.4

```
t = np.arange(-5, 5.01, 0.01)

x = np.zeros(len(t))
x[t >= 0] = 1

sis.dijagram(t, x, naslov='$u(t)$', ylim=(-0.1, 1.1))
```





Slika 2.10: Signum funkcija.

2.2.4 Signum funkcija

Signum funkcija sgn(t) prikazana je na slici 2.10. Definira se na slijedeći način:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \tag{2.34}$$

Ako se za $u(t)$ koristi definicija b) data relacijom (2.29), onda važi:

$$u(t) = \frac{1 + \text{sgn}(t)}{2} \tag{2.35}$$

Bez obzira koja se definicija za $u(t)$, iz relacije (2.29), koristi važi:

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) \tag{2.36}$$

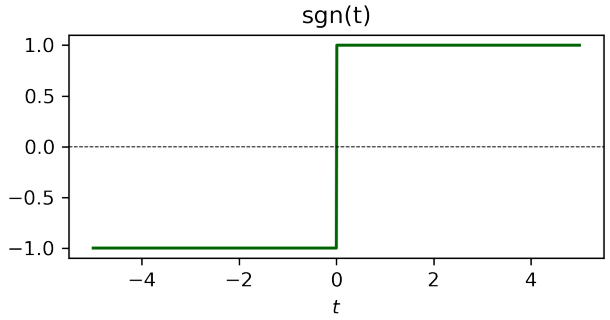
U Pythonu se signum funkcija može generirati na slijedeći način:

Programski kod 2.5

```
t = np.arange(-5, 5.01, 0.01)

y = np.zeros(len(t))
y[t > 0] = 1
y[t < 0] = -1

sis.dijagram(t, y, naslov='sgn(t)', ylim=(-1.1, 1.1))
```



2.2.5 Jedinična rampa ili jedinična linearna funkcija

Jedinična rampa ili jedinična linearna funkcija (slika 2.11.) obilježava se sa $r(t)$ ili ramp(t), a definira se relacijom (2.37).

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = t \cdot u(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau) d\tau \tag{2.37}$$

Jedinična rampa (2.37) može se predstaviti kao integral step funkcije $u(\tau)$ na intervalu $(-\infty, t)$. Jedinična rampa predstavlja odziv sistema integratora na step pobudu, npr. nivo vode u posudi se linearno povećava ako je dotok vode konstantan.

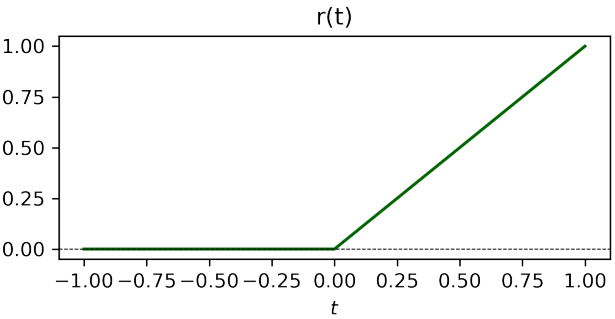
U Pythonu jedinična rampa se može dobiti programskim kodom 2.6.

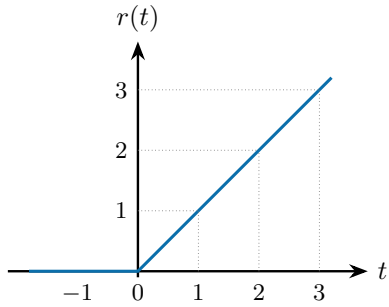
Programski kod 2.6

```
t = np.arange(-1, 1.01, 0.01)

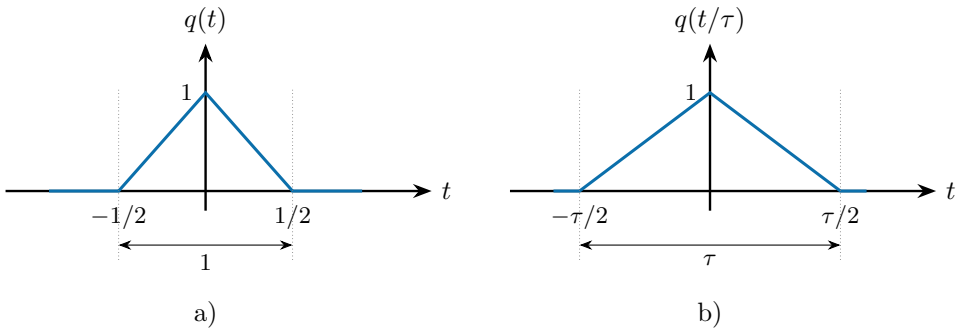
y = np.zeros(len(t))
y[t > 0] = t[t > 0]

sis.dijagram(t, y, naslov='r(t)')
```





Slika 2.11: Jedinična rampa.



Slika 2.12: Trougaoni signal: a) jedinične širine, b) širine τ.

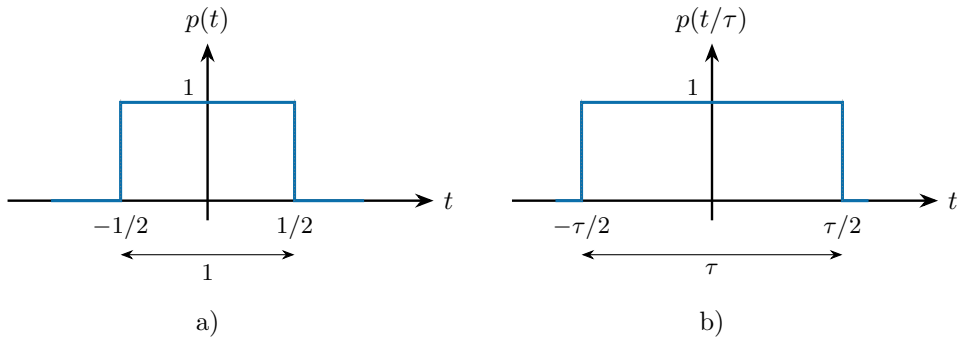
2.2.6 Trougaoni signal

Trougaoni signal, označen sa $q(t)$ ili tri(t), je signal jedinične visine i jedinične širine (slika 2.12.a), centriran u $t = 0$, dakle predstavlja parnu funkciju od t. Takav signal se naziva jedinični trougaoni signal. Ako trougaoni signal ima širinu τ (slika 2.12.b), onda se označava sa $q(t/\tau)$. Faktor τ označava skalirajući faktor. Za $\tau > 1$ trougaoni signal se širi (ekspandira), a za $\tau < 1$ signal se sužava (komprimira).

$$q\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 - (2/\tau)t, & 0 \leq t < \tau/2 \\ 1 + (2/\tau)t, & -\tau/2 < t \leq 0 \end{cases} \tag{2.38}$$

2.2.7 Pravougaoni signal

Pravougaoni signal, označen sa $p(t)$ ili rect(t), jedinične amplitude na jediničnoj širini (slika 2.13.a), centriran u $t = 0$, je jedinični pravougaoni signal i predstavlja parnu funkciju od t. Ako pravougaoni signal ima širinu τ (slika 2.13.b), onda se označava sa $p(t/\tau)$. Faktor τ označava skalirajući faktor, i za $\tau > 1$ pravougaoni signal se širi, dok se za $\tau < 1$



Slika 2.13: Pravougaoni signal: a) jedinične širine, b) širine τ.

sužava. Pravougaoni impuls se definira na slijedeći način:

$$p\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases} \tag{2.39}$$

Ako se za $u(t)$ koristi definicija a) data relacijom (2.29), onda se za sve $t \neq \tau/2$, signal $p\left(\frac{t}{\tau}\right)$ može napisati na slijedeći način:

$$p\left(\frac{t}{\tau}\right) = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \tag{2.40}$$

Za $t = \tau/2$ ova jednakost nije tačna, jer je lijeva strana jednakosti jednaka jedan, a desna jednaka nuli.

Množenjem signala $f(t)$ pravougaonim signalom $p(t/\tau)$, može se dobiti novi signal jednak signalu $f(t)$ za $|t| \leq \tau/2$, a jednak nuli za $|t| > \tau/2$. Dakle, pravougaoni signal propušta samo dio signala $f(t)$ i često se naziva pravougaona prozorska funkcija (engl. *window function*).

2.2.8 Jedinična impulsna funkcija

Jedinična impulsna funkcija $\delta(t)$ ili Diracova delta funkcija zauzima centralno mjesto u analizi signala. Delta funkcijom se mogu opisati mnogi fizikalni fenomeni, kao npr. nagli skok struje kroz kondenzator pri priključivanju na jednosmjerni napon.

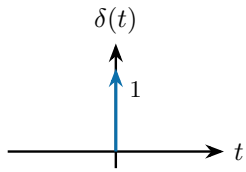
Za definiranje delta funkcije, prethodno treba definirati familiju funkcija $\{f_c(t)\}$ koje zadovoljavaju slijedeće uslove:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_c(t)dt = 1 \tag{2.41}$$

$$\lim_{c\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f_c(t)dt = f(0) \tag{2.42}$$

gdje je $f(t)$ proizvoljna funkcija. Na osnovu ovih uslova slijedi definicija delta funkcije:

$$\delta(t) = \lim_{c\to 0} f_c(t) \tag{2.43}$$



Slika 2.14: Delta funkcija.

odakle slijedi i druga, matematski manje stroga definicija:

$$\begin{cases} \delta(t) \to \infty, & t = 0 \\ \delta(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{uz uslov} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{2.44}$$

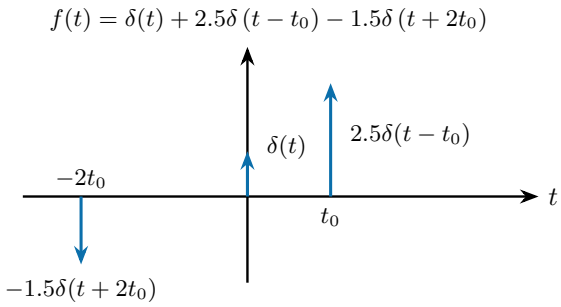
Prema definiciji datoj relacijom (2.44) delta funkcija predstavlja fizički neostvariv signal. Funkcija $\delta(t)$ je centrirana u vremenskom trenutku $t = 0$ i predstavlja parnu funkciju, tj. $\delta(t) = \delta(-t)$. Delta funkcija se konvencionalno predstavlja vertikalnom strelicom pored koje je naznačena vrijednost integrala iz relacije (2.44) (slika 2.14). Važno je napomenuti da delta funkcija može biti centrirana i u kontinualnom vremenu različitom od nule i može imati površinu različitu od jedan.

Npr. signal $f(t) = \delta(t) + 2.5\delta(t - t_0) - 1.5\delta(t + 2t_0)$ se sastoji od jednog impulsa površine 1 centriranog u $t = 0$, jednog impulsa površine 2.5 centriranog u $t = t_0$ i jednog "negativnog" (usmjerenog prema $-\infty$) impulsa površine 1.5 centriranog u $t = -2t_0$ (slika 2.15).

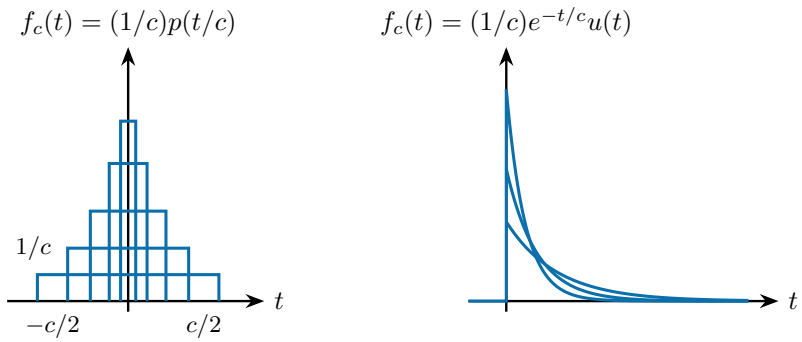
Primjer $f_c(t)$ funkcije je pravougaoni signal zadat relacijom $(1/c)p(t/c)$, čija je amplituda $1/c$, širina c, površine jednake jedan. Kada $c \to 0$ (slika 2.16.a) pravougaoni signal postaje sve viši i sve uži, čime oblik signala teži delta funkciji.

Na osnovu relacija (2.41) i (2.42) dobije se:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c} p\left(\frac{t}{c}\right) dt = 1$$



Slika 2.15: Zbir tri pomjerene delta funkcije.



Slika 2.16: Konvergencija familije funkcija u $\delta(t)$: a) pravougaoni signal kao $f_c(t)$, b) eksponencijalni signal kao $f_c(t)$.

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c}f(t)p\left(\frac{t}{c}\right)dt = \lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\int_{-c/2}^{+c/2}f(t)dt = f(0)$$

Također i eksponencijalni signal oblika $f_c(t) = (1/c)e^{-t/c}u(t)$ (slika 2.16.b) za $c \to 0$ postaje sve strmiji i uži, zadržavajući površinu jednaku jedinici:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c}e^{-\frac{t}{c}}u(t)dt = \frac{1}{c}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{c}}dt = 1$$

Može se dokazati da je:

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{c}f(t)e^{-\frac{t}{c}}u(t)dt = \lim_{c\to 0}\frac{1}{c}\int_{0}^{+\infty}f(t)e^{-\frac{t}{c}}dt = f(0)$$

$$\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f_c(t)dt = f(0)$$

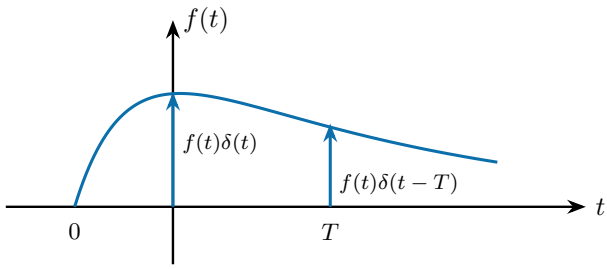
Između delta funkcije $\delta(t)$ i jedinične funkcije $u(t)$ postoji veza data relacijom:

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau = \begin{cases}1, & t \geq 0\\ 0, & t < 0\end{cases} = u(t) \tag{2.45}$$

Na osnovu relacije (2.45) prvi izvod jedinične funkcije je:

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \tag{2.46}$$

Zbog diskontinuiteta jedinične funkcije u $t = 0$, ona u toj tački formalno nije diferencijabilna. Međutim, ako se pretpostavi aproksimacija jedinične funkcije $u_c(t)$ pravcem od $0 \div 1$ na kratkom vremenskom intervalu c, a od $t = c \div \infty$ funkcija podrazumijeva da ima



Slika 2.17: Množenje kontinualnog signala $f(t)$ delta funkcijom (ilustracija osobine selektivnosti delta funkcije).

vrijednost jedan, onda je zapravo prvi izvod takvog signala pravougaoni impuls širine c i visine $1/c$. Kada $c \to 0$ funkcija $u_c(t) \to u(t)$. Kako je $du_c(t)/dt = \delta_c(t)$, to se pokazuje:

$$\lim_{c \to 0} \delta_c(t) = \delta(t)$$

Za funkciju $\delta(t)$ mogu se napisati i slijedeće relacije:

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{2.47}$$

$$f(t)\delta(t-T) = f(T)\delta(t-T) \tag{2.48}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = f(0) \tag{2.49}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-T)dt = f(T) \tag{2.50}$$

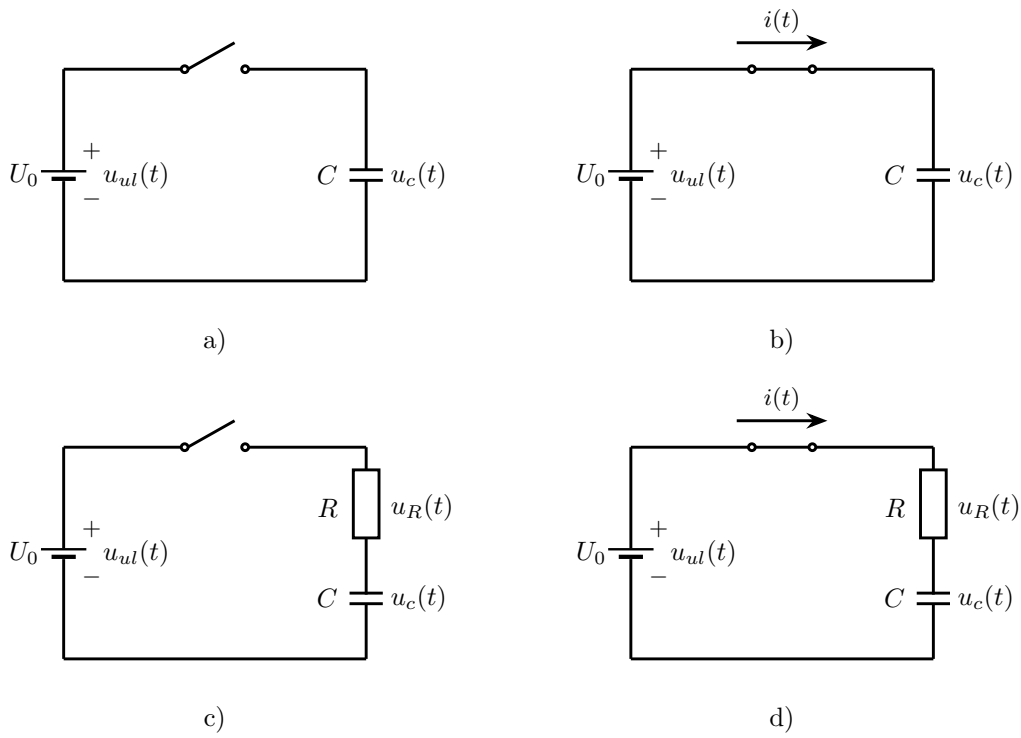
Relacija (2.47) predstavlja delta impuls centriran u nuli, površine $f(0)$, dok relacija (2.48) predstavlja delta impuls površine $f(T)$, centriran u $t = T$. Na slici 2.17. prikazan je kontinualni signal $f(t)$, proizvod signala $f(t)$ sa delta funkcijom i proizvod signala $f(t)$ sa pomjerenom delta funkcijom.

Relacije (2.49) i (2.50) daju uzorke signala $f(t)$ u trenucima $t = 0$ i $t = T$. Te relacije izražavaju poznatu osobinu Diracove funkcije izdvajanja vrijednosti vremenski kontinualne funkcije $f(t)$ u trenutku $t = 0$, odnosno $t = T$. Važno je napomenuti da postoji razlika između uzorka signala $f(t)$ u trenutku $t = T$, koji ima amplitudu (vrijednost) $f(T)$, i impulsa na slici 2.17. koji ima beskonačnu amplitudu, ali površinu $f(T)$.

Takođe, treba napomenuti da impulsi oblika $\delta(t)$ ili $f(T)\delta(t-T)$ ne egzistiraju u praktičnim sistemima, jer imaju beskonačnu amplitudu. Međutim, oni imaju teoretsku važnost za određivanje impulsnog odziva.

Primjer 2.10:

a) Na slici 2.18.a prikazano je jednostavno kolo sa idealnim kondenzatorom koji je prazan. Neka se u trenutku $t = 0$ zatvara prekidač i priključuje istosmjerni (DC) naponski izvor U_0. Odrediti struju $i(t)$ kroz kondenzator za $t \geq 0$.



Slika 2.18: a) Serijsko kolo sa istosmjernim izvorom, prekidačem i kondenzatorom - prekidač otvoren, b) serijsko kolo sa istosmjernim izvorom, prekidačem i kondenzatorom - prekidač zatvoren, c) serijsko RC kolo sa istosmjernim izvorom i prekidačem - prekidač otvoren, d) serijsko RC kolo sa istosmjernim izvorom i prekidačem - prekidač zatvoren.

b) Na slici 2.18.c prikazano je isto kolo, ali sa kondenzatorom koji ima otpornost R u koju je uključena i otpornost izvora. Odrediti struju $i(t)$ kroz kondenzator za $t \geq 0$ u ovom slučaju.

Rješenje:
a) Uloga prekidača ekvivalentna je spajanju naponskog izvora $u(t) \cdot U_0$ na kondenzator (slika 2.18.b), tako da se napon na kondenzatoru može napisati na slijedeći način:

$$u_c(t) = u(t) \cdot U_0 \tag{2.51}$$

Struja kroz kondenzator je:

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = CU_0\frac{du(t)}{dt} = CU_0\delta(t) \tag{2.52}$$

Iz relacije (2.52) se vidi da je struja kroz kondenzator delta (impulsna) funkcija povr-

šine CU_0, dok je ukupna količina naboja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)dt = CU_0$$

b) Sa sheme na slici 2.18.c struja kroz kondenzator, nakon priključivanja naponskog izvora $u(t) \cdot U_0$, je:

$$i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\left[U_0 \cdot u(t) - Ri(t)\right] \tag{2.53}$$

$$i(t) = CU_0\delta(t) - RC\frac{di(t)}{dt} \tag{2.54}$$

Diferencijalna jednačina koja opisuje funkcionalnost RC kola sa slike 2.18.c. je:

$$RC\frac{di(t)}{dt} + i(t) = CU_0\delta(t) \tag{2.55}$$

Rješenje jednačine (2.55) je:

$$i(t) = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t) \tag{2.56}$$

Dakle, struja kroz kondenzator, od vrijednosti U_0/R u trenutku $t = 0$, opada po eksponencijalnom zakonu za $t \geq 0$. Kao i u prethodnom slučaju količina naboja ostaje nepromjenjena, što znači da se fizikalno dobije isti efekat:

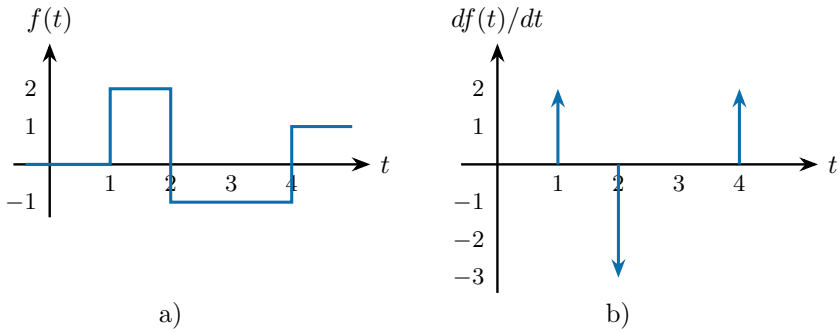
$$\int_{-\infty}^{+\infty} i(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)dt = \frac{U_0}{R} \cdot \left.\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{-\frac{1}{RC}}\right|_0^{+\infty} = CU_0$$

Primjer 2.11:

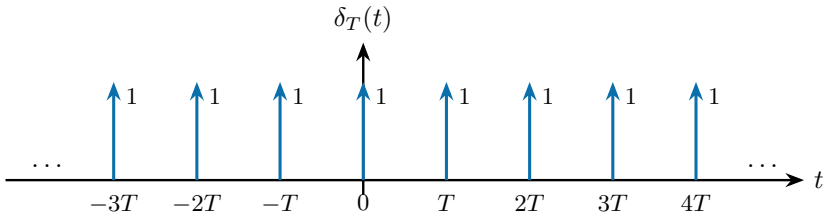
Naći izvod signala $f(t)$ prikazanog na slici 2.19.a koristeći relaciju (2.46).

Rješenje:
Izvod signala $f(t)$ jednak je nuli za sve vrijednosti realne promjenljive t, osim u tačkama diskontinuiteta. Na osnovu relacije (2.46) diferenciranje daje delta impuls površine koja odgovara promjeni amplitude u tačkama diskontinuiteta (slika 2.19.b), tako da se dobiju tri delta impulsa:

$$\frac{df(t)}{dt} = 2\delta(t-1) - 3\delta(t-2) + 2\delta(t-4)$$



Slika 2.19: a) Signal $f(t)$, b) izvod signala $f(t)$ predstavljen diskontinuitetima (primjer 2.11).



Slika 2.20: Periodički niz impulsa (povorka jediničnih impulsa).

2.2.9 Periodički niz (povorka) impulsa ili češljasta funkcija

Niz impulsa (slika 2.20.) je periodički signal koji se dobije uniformnim ponavljanjem delta funkcije s periodom T, a definiran je relacijom:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \tag{2.57}$$

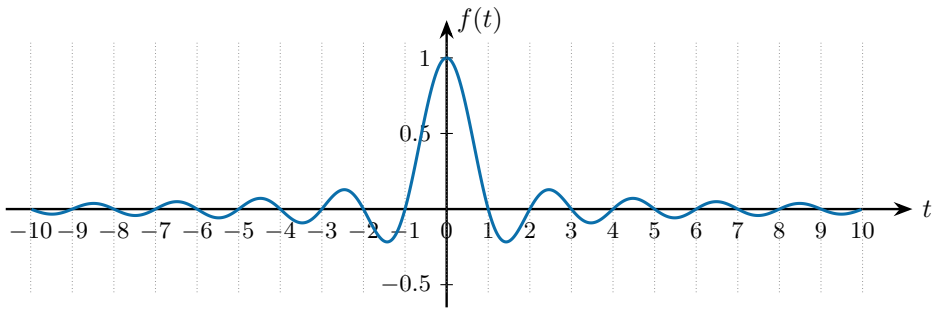
Povorka impulsa se ne može fizički realizirati, ali je veoma korisna za određivanje odziva realnih sistema, te opisivanje postupaka uzorkovanja i diskretizacije.

2.2.10 Jedinična sinc(t) funkcija

Jedinična $\mathrm{sinc}(t)$ prikazana na slici 2.21. definirana je izrazom:

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \tag{2.58}$$

Funkcija $\mathrm{sinc}(t)$ je parna funkcija od t. Koristeći L' Hospitalovo pravilo izračunava se: $\lim_{t\to 0} \mathrm{sinc}(t) = 1$, a $\mathrm{sinc}(t)$ prolazi kroz nulu u tačkama $\pi t = k\pi$, odnosno za $t = k = \pm 1, \pm 2, \ldots$



Slika 2.21: Jedinična sinc(t) funkcija.

Funkcija $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/\pi t$ je proizvod periodičke funkcije $\sin(\pi t)$ i monotono opadajuće funkcije $1/(\pi t)$. Tako signal $\text{sinc}(t)$ ima sinusne oscilacije koje kontinualno opadaju sa $1/(\pi t)$. Funkciji $\sin(at)/at$ će odgovarati oblik $\text{sinc}(at/\pi)$, i ta funkcija će prolaziti kroz nulu u tačkama $at = k\pi$, odnosno $t = k\pi/a$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Posebna varijanta $\text{sinc}(t)$ signala je tzv. $\text{Sa}(t)$ funkcija koja se definira kao:

$$\text{Sa}(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ \frac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \end{cases} \tag{2.59}$$

2.3 Transformacija nezavisno promjenljive kontinualnih signala

Mnoge operacije nad signalima zahtijevaju transformaciju nezavisno promjenljive t. Zbog toga je neophodno poznavati značenje svake od ovih transformacija. U ovom poglavlju biće razmotrene tri operacije nad nezavisno promjenljivom:

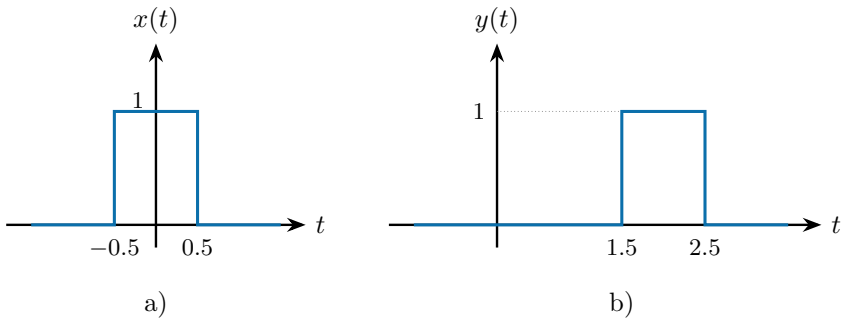
- vremenski pomak,
- vremensko skaliranje i
- refleksija.

2.3.1 Vremenski pomak

Vremenski pomaknuti signal signala $x(t)$ definira se relacijom:

$$y(t) = x\left(t - t_0\right) \tag{2.60}$$

gdje je t_0 vremenski pomak. Ako je $t_0 > 0$, pomaknuti signal $y(t)$ dobije se pomjeranjem $x(t)$ udesno za t_0 i tada se kaže da je signal $x(t)$ zakasnio. Ako je $t_0 < 0$, signal se na apscisi pomjera ulijevo i predstavlja isprednjačeni signal $x(t)$.



Slika 2.22: a) Pravougaoni signal, b) pomjereni pravougaoni signal (primjer 2.12).

Primjer 2.12:

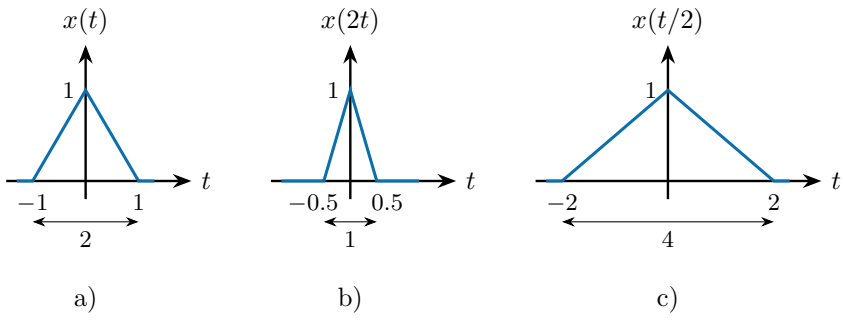
Pravougaoni signal $x(t)$ jedinične amplitude i jediničnog trajanja predstavljen je na slici 2.22. Nacrtati signal $y(t) = x(t-2)$.

Rješenje:
Pomjeranjem $x(t)$ udesno za $t_0 = 2$, dobija se pravougaoni signal $y(t)$ koji ima širinu kao i originalni signal $x(t)$, ali je pomjeren duž vremenske ose.

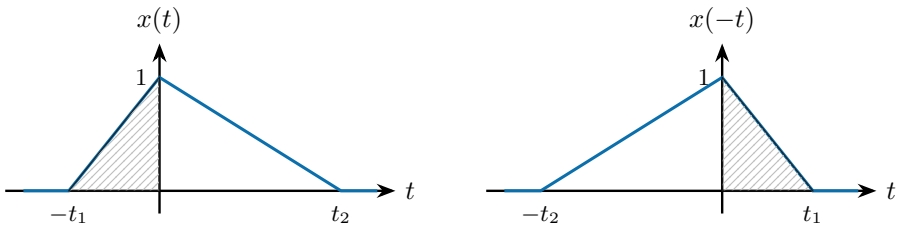
2.3.2 Vremensko skaliranje

Ako je $x(t)$ kontinualni signal, onda se vremenski skaliran signal dobije množenjem nezavisno promjenljive t faktorom a.

$$y(t) = x(at) \tag{2.61}$$



Slika 2.23: Trougaoni signal $x(t)$ i vremenski skalirani trougaoni signali (primjer 2.13).



Slika 2.24: Asimetrični trougaoni signal i njegova reflektovana verzija.

Generalno, ako je $|a| > 1$, signal $y(t)$ je komprimirana verzija $x(t)$, odnosno signal egzistira u užem vremenskom intervalu. Ako je $|a| < 1$, $y(t)$ je ekspandirana verzija $x(t)$ i signal egzistira u širem vremenskom intervalu. Npr. pri bržoj reprodukciji snimljenog audio signala ($|a| > 1$) dobiva se komprimirani signal, a pri sporom snimanju ($|a| < 1$) dobiva se ekspandirani signal.

Primjer 2.13:

Na slici 2.23.a prikazan je trougaoni signal $x(t)$ jedinične amplitude, na intervalu $-1 \leq t \leq 1$. Nacrtati signale: $y_1(t) = x(2t)$ i $y_2(t) = x(t/2)$.

Rješenje:
Na slici 2.23.b prikazan je vremenski skalirani signal $y_1(t) = x(2t)$ koji predstavlja komprimirani signal $x(t)$ faktorom $a = 2$, a na slici 2.23.c signal $y_2(t) = x(t/2)$ koji predstavlja ekspandirani signal $x(t)$ faktorom $a = 1/2$.

2.3.3 Refleksija

Za kontinualni signal $x(t)$, reflektovani signal se dobije refleksijom signala u odnosu na osu $t = 0$:

$$y(t) = x(-t) \tag{2.62}$$

Matematski, reflektovani signal se dobije kada se u izrazu za $x(t)$ nezavisno promjenljiva t zamjeni sa $-t$. $y(t)$ predstavlja reflektiranu verziju signala $x(t)$. Za parni signal, reflektirani signal je isti kao i originalni signal.

Primjer refleksije signala koji nije ni paran ni nepara, prikazan je na slici 2.24.

2.3.4 Pravilo za vremenski pomak, skaliranje i refleksiju

Neka je $y(t)$ kontinualni signal dobiven od drugog vremenski pomaknutog i skaliranog signala. Tada je:

$$y(t) = x\left(at - t_0\right) \tag{2.63}$$

Veza između $y(t)$ i $x(t)$ data je relacijama:

$$y(0) = x\left(-t_0\right) \quad y\left(\frac{t_0}{a}\right) = x(0) \tag{2.64}$$

Za dobivanje signala $y(t)$ treba poštovati određeni redoslijed koji je posljedica vremenskog pomaka i vremenskog skaliranja:

1. prvo je potrebno pomaknuti signal $x(t)$ za vrijeme t_0, što daje međusignal $v(t) = x\left(t - t_0\right)$,
2. potom je potrebno vremenski skalirati dobiveni signal sa $|a|$, što daje izlazni signal:

$$y(t) = v(|a|t) = x\left(|a|t - t_0\right), \tag{2.65}$$

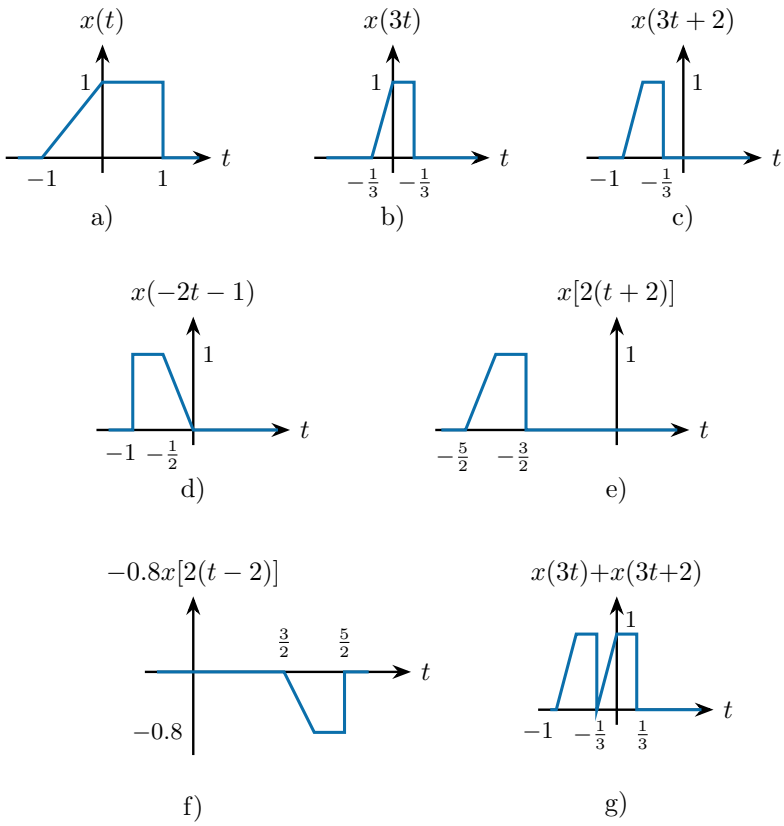
3. ukoliko uz faktor skaliranja $|a|$ stoji znak minus, onda signal dobiven nakon vremenskog pomjeranja i skaliranja treba reflektirati oko ose $t = 0$.

Primjer 2.14:

Na slici 2.25. prikazan je signal $x(t)$. Koristeći osobine vremenskog pomaka, skaliranja i refleksije, nacrtati slijedeće signale:
a) $x(3t)$
b) $x(3t + 2)$
c) $x(-2t - 1)$
d) $x\left(2(t + 2)\right)$
e) $-0.8x\left(2(t - 2)\right)$
f) $x(3t) + x(3t + 2)$

Rješenje:
Primjenjujući pravilo za vremenski pomak, skaliranje i refleksiju, vremenski oblici signala prikazani su na slikama 2.25.b do 2.25.g.
Signal $x(3t)$ na slici 2.25.b je tri puta uži od signala $x(t)$.
Signal $x(3t+2)$ na slici 2.25.c dobije se pomjeranjem signala $x(t)$ ulijevo za 2, a zatim se rezultat skalira po vremenu sa 3 .

Signal $x(-2t - 1)$ na slici 2.25.d dobije se prvo pomjeranjem signala $x(t)$ udesno za 1, zatim skaliranjem po vremenu sa 2 i na kraju refleksijom oko ordinate.
Signal $x(2(t + 2)) = x(2t + 4)$ na slici 2.25.e dobije se pomjeranjem signala $x(t)$ za 4 ulijevo, a zatim vremenskim skaliranjem sa 2.
Signal $-0.8x(2(t - 2)) = -0.8x(2t - 4)$ na slici 2.25.f dobije se pomjeranjem signala $x(t)$ za 4 udesno, zatim vremenskim skaliranjem sa 2 i amplitudnim skaliranjem sa -0.8.
Signal $x(3t) + x(3t + 2)$ na slici 2.25.g je suma signala sa slika 2.25.b i 2.25.c.



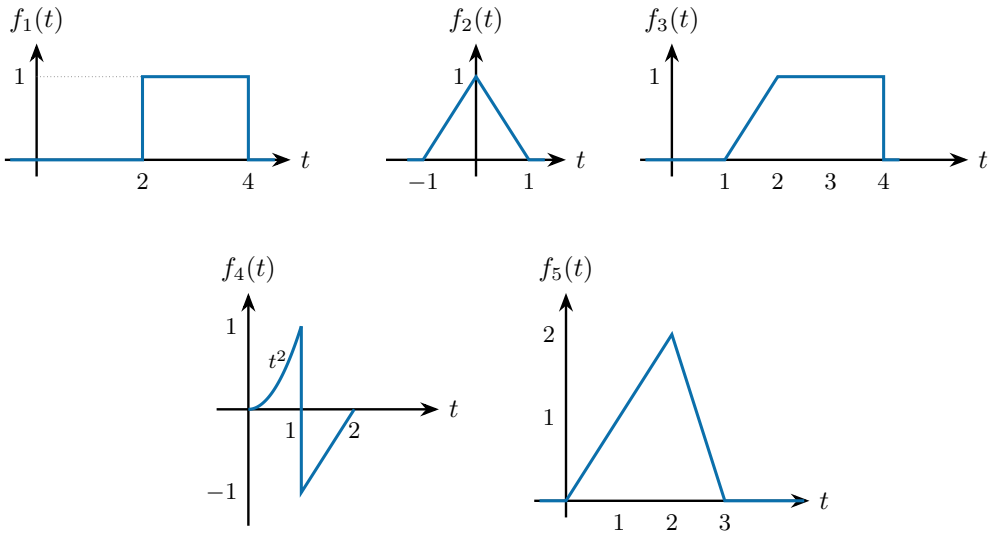
Slika 2.25: Primjena osobina vremenskog pomaka, skaliranja i refleksije (primjer 2.14).

Primjer 2.15:

Koristeći specijalne kontinualne signale i njihove osobine, napisati analitičke izraze za signale sa slike 2.26.

Rješenje:
Koristeći specijelne signale $u(t)$ i $r(t)$ i njihove osobine, analitički izrazi za signale sa slike 2.26. su:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= u(t-2) - u(t-4) = p(t/2 - 3/2) \\ f_2(t) &= r(t+1)u(-t) + r(-t+1)u(t) = q(t/2) \\ f_3(t) &= (t-1)[u(t-1) - u(t-2)] + u(t-2) - u(t-4) \\ &= (t-1)u(t-1) - (t-2)u(t-2) - u(t-4) \end{aligned}$$



Slika 2.26: Signali iz primjera 2.15 (zapis pomoću specijalnih signala).

$$
\begin{aligned}
f_4(t) &= t^2[u(t) - u(t-1)] + (t-2)[u(t-1) - u(t-2)] = \\
&= t^2 u(t) - \left(t^2 - t + 2\right) u(t-1) - (t-2)u(t-2) \\
f_5(t) &= t[u(t) - u(t-2)] - 2(t-3)[u(t-2) - u(t-3)] = \\
&= tu(t) - 3(t-2)u(t-2) + 2(t-3)u(t-3)
\end{aligned}
$$

2.4 Kontinualni sistemi

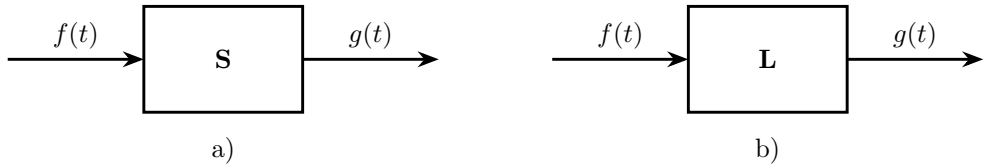
Kontinualni sistem je pravilo po kome se nekom vremenskom signalu $f(t)$, koji predstavlja ulaz u sistem (engl. *system input*), dodjeljuje drugi vremenski signal $g(t)$, koji predstavlja izlaz iz sistema (engl. *system output*) ili odziv (engl. *response*). Sistem se najčešće predstavlja blokom obilježenim slovom "S". Na slici 2.27.a prikazan je kontinualni sistem s jednim ulazom i jednim izlazom, gdje "S" označava da je nad signalom izvršena neka operacija. Operacija može biti zadata matematičkom relacijom, grafički, tabelarno, i može biti nelinearna ili linearna. Ako je izlaz linearna transformacija ulaza (slika 2.27.b), onda se to zapisuje na slijedeći način:

$$g(t) = L\{f(t)\} \quad \text{ili} \quad f(t) \xrightarrow{L} g(t) \tag{2.66}$$

gdje je L linearni operator koji definira transformaciju signala pri propagaciji kroz sistem.

2.4.1 Osobine kontinualnih sistema

Ekvivalencija - za dva sistema se kaže da su ista (jednaka) ako za bilo koji isti ulazni signal daju isti izlazni signal.



Slika 2.27: Kontinualni sistem s jednim ulazom i jednim izlazom: a) opća reprezentacija (**S** sugerira "sistem"), b) tipična reprezentacija linearnog sistema (**L** sugerira "linearnost").

Homogenost - sistem je homogen ako promjena ulaznog signala u sistem $f(t)$ za "a" puta, daje promjenu izlaznog signala za "a" puta. Ta osobina se zapisuje na slijedeći način:

$$f(t) \xrightarrow{s} g(t) \quad af(t) \xrightarrow{s} ag(t) \tag{2.67}$$

Primjer homogenog sistema je sistem zadat relacijom: $g(t) = 5f(t)$, dok je nehomogeni sistem $g(t) = 5f^2(t)$.

Trenutnost - kontinualni sistem je trenutan ako je za određivanje vrijednosti izlaznog signala $g\,(t)$ u trenutku $t = t_0$, potrebna samo vrijednost ulaznog signala $f\,(t)$ u trenutku $t = t_0$. Trenutni sistemi su opisani npr. sa:

$$g(t) = f^2(t), \quad g(t) = t \cdot f(t), \quad g(t) = a \cdot f(t)$$

Kauzalnost - kontinualni sistem je kauzalan ako su za određivanje vrijednosti $g\,(t_0)$ potrebne samo vrijednosti $f(t)$ za $t \leq t_0$, a ne i vrijednosti $f(t)$ za $t > t_0$. Ako ovaj uslov nije zadovoljen, kontinualni sistem je nekauzalan ili anticipativan (predviđajući). Svi fizički sistemi su kauzalni. Kauzalan sistem je npr. element kašnjenja.

Linearnost - klasa kontinualnih linearnih sistema definira se korištenjem principa superpozicije. Sistem je linearan ako i samo ako zadovoljava uslove:

$$L\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = L\left\{f_1(t)\right\} + L\left\{f_2(t)\right\} = g_1(t) + g_2(t) \tag{2.68}$$

$$L\{af(t)\} = aL\{f(t)\} = ag(t) \tag{2.69}$$

Osobina (2.68) naziva se osobinom sumiranja (aditivnosti), a (2.69) je osobina homogenosti (skaliranja). U skladu sa principom superpozicije ove dvije osobine mogu se spojiti u zajedničku relaciju:

$$L\left\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\right\} = a_1 L\left\{f_1(t)\right\} + a_2 L\left\{f_2(t)\right\} = a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t) \tag{2.70}$$

Primjeri opisa linearnih sistema su:

$$g(t) = a \cdot f(t), \quad g(t) = f(t-\tau) \quad (\tau > 0), \quad g(t) = t \cdot f(t)$$

Sistem $g(t) = f(t+\tau)$ za $\tau > 0$ je linearan, ali nije kauzalan jer je: $t_0 + \tau > t_0$. Nelinearan sistem, i ujedno nehomogen sistem je npr. sistem $g(t) = 5f^2(t)$.

Vremenska invarijantnost - kontinualni sistem je vremenski invarijantan na pomak (engl. *time invariant*) ako vremenski pomjereni ulazni signal ima za posljedicu vremenski pomjereni izlazni signal:

$$L\{f(t)\} = g(t) \quad \Longrightarrow \quad L\{f(t-t_0)\} = g(t-t_0) \tag{2.71}$$

Vremenski invarijantni sistemi su, npr:

$$g(t) = a \cdot f(t), \quad g(t) = f^2(t), \quad g(t) = f(t-t_0)$$

Sistem nije vremenski invarijantan ako se u pravilu koje opisuje vezu izlaza i ulaza u sistem eksplicitno pojavljuje vrijeme t. Npr. sistem $g(t) = t \cdot f(t)$ nije vremenski invarijantan, što se vidi iz slijedećeg izraza:

$$g(t) = L\{f(t-t_0)\} = t\{f(t-t_0)\} \neq (t-t_0) f(t-t_0) = g(t-t_0)$$

Ako se parametri sistema mijenjaju s vremenom i prilagođavaju promjenama karakteristika ulaznog signala, sistem se naziva *adaptivnim*.

Dinamičnost - kontinualni sistem je dinamički ako za određivanje $g(\Theta)$, gdje je $\Theta > t_0$, treba poznavati samo $f(t)$, za $t_0 \leq t \leq \Theta$, i konačan broj "podataka", nazvanih stanja. Stanja zamjenjuju djelovanje $f(t)$ na sistem do trenutka $t = t_0$. Primjer dinamičkog sistema, koji je istovremeno kauzalan, linearan i vremenski invarijantan, je linearna diferencijalna jednačina s konstantnim koeficijentima. Opći oblik ove jednačine je:

$$\begin{aligned} &a_n g^{(n)}(t) + a_{n-1} g^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 g(t) = \\ &= b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1} f^{(m-1)}(t) + \cdots + b_0 f(t) \end{aligned} \tag{2.72}$$

Lijeva strana jednačine (2.72) je linearna kombinacija izlaza i njegovih izvoda, dok je desna strana linearna kombinacija ulaza i njegovih izvoda. Ukoliko je pravilo koje povezuje izlaz s ulazom dato implicitno (kao u relaciji (2.72)) za određivanje $g(t)$ ukoliko je poznato $f(t)$, potrebno je riješiti diferencijalnu jednačinu. Kod dinamičkih sistema, za određivanje $g(\Theta)$ za $\Theta > t_0$, potrebno je poznavati $f(t) \quad (t_0 \leq t \leq \Theta)$ i vrijednosti $g(t_0)$,$g^{(1)}(t_0)$, itd. do $g^{(n-1)}(t_0)$ (tzv. početne vrijednosti). Ovih n vrijednosti igraju ulogu stanja, te je prema tome diferencijalna jednačina opis dinamičkih sistema. Primjer dinamičkih sistema su npr. elektronička kola koja sadrže induktivitete i kondenzatore, tj. elemente koji mogu da akumuliraju energiju i tako pamte prethodna stanja.

2.5 Kontinualni LTI sistemi

2.5.1 Proizvoljan signal predstavljen pomoću pomaknutih delta funkcija

Proizvoljna kontinualna funkcija $f(t)$ može se predstaviti pomoću pomaknutih delta funkcija na sljedeći način:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2.73}$$

što se može jednostavno pokazati korištenjem osobine selektivnosti delta funkcije:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-\tau)d\tau = f(t)$$

Izraz 2.73 se može koristiti za određivanje odziva kontinualnog sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju, gdje je τ promjenljiva, a t je parametar.

2.5.2 Impulsni odziv

Neka je ulaz u linearni vremenski invarijantni sistem - LTI (engl. *Linear Time Invariant system*) neka $f_c(t)$ funkcija koja aproksimira Diracovu $\delta(t)$ funkciju. Odziv sistema se obilježava sa $g_c(t)$:

$$g_c(t) = L\{f_c(t)\} \tag{2.74}$$

i on, u općem slučaju, zavisi od parametra c. Može se pokazati da kada u $g_c(t)$ parametar $c \to 0$, rezultat ne zavisi od izbora funkcije $f_c(t)$. Ova granična vrijednost se označava sa $h(t)$:

$$h(t) = \lim_{c\to 0} g_c(t) \tag{2.75}$$

i naziva se impulsni odziv ili težinska funkcija sistema.
Impulsni odziv se može definirati i kao odziv sistema na delta funkciju:

$$h(t) = \lim_{c\to 0} g_c(t) = \lim_{c\to 0} L\{f_c(t)\} = L\left\{\lim_{c\to 0} f_c(t)\right\} = L\{\delta(t)\} \tag{2.76}$$

Impulsni odziv je važna karakteristika sistema, jer je jedinstven i u potpunosti opisuje linearni sistem. Pomoću njega se može odrediti odziv sistema na proizvoljnu pobudu.

Da bi se odredio impulsni odziv treba riješiti matematički model sistema. Realni fizički sistemi, kao npr. električna kola, modeliraju se uglavnom sistemima linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda s konstantnim koeficijentima. Takav sistem jednačina može se svesti na jednu diferencijalnu jednačinu n-tog reda s konstantnim koeficijentima (2.72). Rješenje jednačine (2.72) na pobudu $f(t) = \delta(t)$ daje impulsni odziv sistema $g(t) = h(t)$. Pošto je svaki fizički realni sistem kauzalan, to je $h(t) = 0$ za $t < 0$. Kako je funkcija $\delta(t) = 0$ za $t \neq 0$, rješenje sistema ima samo homogeni dio čiji je oblik:

$$h(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + A_n e^{\lambda_n t} \tag{2.77}$$

gdje su konstante λ_i nule karakterističnog polinoma, odnosno rješenja jednačine:

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{2.78}$$

Nule karakterističnog polinoma λ_i mogu biti realne ili kompleksne i nazivaju se sopstvene vrijednosti sistema ili prirodne učestanosti sistema. Realna rješenja daju eksponencijalni odziv, a kompleksna daju odziv prigušenog sinusnog oblika. Konstante A_i određuju se iz početnih uslova.

Ako je sistem linearan i vremenski invarijantan, odziv na bilo koju pobudnu funkciju $f(t)$ može se dobiti pomoću pomaknutih vrijednosti $h(t)$ koristeći konvolucioni integral.

2.5.3 Odziv kontinualnog LTI sistema

Ulaz u sistem $f(t)$ može se predstaviti pomoću pomaknutih delta funkcija (2.73), a zatim se pomaknute $\delta(t)$ funkcije mogu predstaviti preko $f_c(t)$ funkcija (2.43).

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f_c(t-\tau)d\tau \tag{2.79}$$

Ovim je $f(t)$ prikazana beskonačnom sumom (integralom) impulsnih funkcija koje u trenutku t imaju površine jednake $f(t)dt$. Ako se integral u izrazu (2.79) posmatra kao linearna kombinacija beskonačnog broja članova, i ako se na njega primijeni osobina linearnosti, a zatim vremenske invarijantnosti, odziv sistema postaje:

$$\begin{aligned} L\{f(t)\} &= L\left\{\lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f_c(t-\tau)d\tau\right\} = \lim_{c\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)L\left\{f_c(t-\tau)\right\}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\left\{\lim_{c\to 0} g_c(t-\tau)\right\}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = g(t) \end{aligned} \tag{2.80}$$

Integral:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.81}$$

se naziva **konvolucioni integral** i definira konvoluciju dva aperiodička signala $f(t)$ i $h(t)$, a obilježava se simbolički:

$$g(t) = f(t) * h(t) \tag{2.82}$$

Trajanje aperiodičkih signala u konvoluciji nije ograničeno. Konvolucija se može posmatrati kao dualna operacija nad signalima $f(t)$ i $h(t)$ jer se pomoću njih dobija treći signal $g(t)$. Iz relacije (2.81) proizilazi da je za bilo koju vrijednost $(t-\tau)$, izlaz $g(t)$ težinski integral ulaza sistema. Taj se integral može odrediti za konkretno t, pomjeranjem i refleksijom signala $h(t-\tau)$ oko ordinatne ose. Nakon toga treba pomnožiti signale $f(\tau)$ i $h(t-\tau)$. Odziv $g(t)$ se dobije integriranjem tog proizvoda u granicama od $\tau = -\infty$ do $\tau = +\infty$, što će biti pokazano na primjerima.

Karakteristike linearnog vremenski invarijantnog sistema potpuno su određene njegovim impulsnim odzivom. Za nelinearne sisteme impulsni odziv $h(t)$ ne karakterizira kompletno ponašanje sistema. LTI sistemi imaju neke osobine koje nemaju drugi sistemi. Kako je odziv LTI sistema dat relacijom (2.82), to će biti date neke osobine konvolucije i LTI sistema.

Ukoliko se radi o periodičkim signalima, konvolucija dva signala se određuje na periodu, pri čemu oba signala moraju imati isti period, tako da je:

$$f_{12}(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{2.83}$$

2.5.4 Osobine konvolucije

Komutativnost - konvolucija je komutativna operacija, što znači da funkcije nad kojima se ona obavlja međusobno mogu zamijeniti mjesta.

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(\underset{t-\tau=z}{t-\tau})d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-z)h(z)dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = h(t) * f(t) \tag{2.84}$$

Distributivnost - Konvolucija ima osobinu distributivnosti. Tako je:

$$f(t) * \{h_1(t) + h_2(t)\} = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) \tag{2.85}$$

Ova osobina kaže da ako dva sistema s različitim impulsnim odzivima imaju isti ulaz, a izlazi im se sumiraju (desna strana relacije (2.85)), ponašanje kompletnog sistema će biti okarakterizirano sumom impulsnih odziva (lijeva strana relacije (2.85), dok je izlaz određen konvolucijom ulaza sa sumom impulsnih odziva.

Asocijativnost - Konvolucija je asocijativna operacija:

$$f(t) * \{h_l(t) * h_2(t)\} = \{f(t) * h_l(t)\} * h_2(t) \tag{2.86}$$

Ova osobina kaže da ako su dva sistema vazana kaskadno, impulsni odziv kompletnog sistema je konvolucija pojedinačnih impulsnih odziva. Također, zbog osobine komutativnosti konvolucije, svejedno je kojim redom se obavlja konvolucija. Važno je napomenuti da ova osobina isključivo važi za LTI sisteme. Za nelinearne sisteme kompletan impulsni odziv će se promijeniti ukoliko se ne poštuje red kaskadnog vezivanja sistema. Dakle, u općem slučaju da bi se primjenila osobina asocijativnosti potrebno je da oba sistema u kaskadi budu istovremeno linearna i vremenski invarijantna.

Trajanje konvolucije - ako kontinualni aperiodički signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju trajanje (širinu) T_1 i T_2 respektivno, onda njihova konvolucija $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ima trajanje $T_1 + T_2$.

Delta funkcija kao jedinični element - Konvolucija neke funkcije sa delta funkcijom ne mijenja vrijednost te funkcije:

$$f(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t) \tag{2.87}$$

Dakle, delta funkcija za operaciju konvolucije predstavlja jedinični element.

Pomjeranje signala konvolucijom sa pomjerenom delta funkcijom - konvolucija neke funkcije s pomaknutom delta funkcijom ima za rezultat pomaknutu funkciju:

$$f(t) * \delta(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau-T)d\tau = f(z) = f(t-T) \tag{2.88}$$

Promjena granica u konvolucionom integralu - granice integriranja kod konvolucije mogu da se promijene ako su funkcije nad kojima se konvolucija obavlja kauzalne.
Ako je $f(t)$ kauzalna funkcija, tj. $f(t) = 0$ za $t < 0$, onda se granice integriranja dobiju iz:

$$g(t) = \int_{0}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = -\int_{t-\tau=x}^{-\infty} f(t-x)h(x)dx = \int_{x=\tau}^{t} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{2.89}$$

Ako je $h(t)$ kauzalna funkcija, tj. $h(t) = 0$ za $t < 0$, onda se granice integriranja dobiju iz:

$$g(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau = -\int_{t-\tau=x}^{-\infty} h(t-x)f(x)dx = \int_{x=\tau}^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (2.90)$$

Ako su i $f(t)$ i $h(t)$ kauzalne funkcije, tj. $f(t) = 0$ za $t < 0$ i $h(t) = 0$ za $t < 0$, onda se granice integriranja dobiju iz:

$$g(t) = \int_0^{t} f(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{t} h(\tau)f(t-\tau)d\tau \quad (2.91)$$

Izvod i integral konvolucije - izvod odziva sistema dobije se tražeći izvod samo jedne od funkcija koje učestvuju u operaciji konvolucije:

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{df(t)}{dt} * h(t) = f(t) * \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.92)$$

Integral odziva sistema dobije se tražeći integral samo jedne od funkcija u konvoluciji:

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)d\tau = \left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] * h(t) = f(t) * \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \quad (2.93)$$

Također vrijedi:

$$\begin{aligned} f(t) * h(t) = \frac{df(t)}{dt} * \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right] * \frac{dh(t)}{dt} = \\ = \int_{-\infty}^{t} \left[h(\tau) * \frac{df(\tau)}{d\tau}\right] d\tau = \int_{-\infty}^{t} \left[f(\tau) * \frac{dh(\tau)}{d\tau}\right] d\tau \end{aligned} \quad (2.94)$$

2.5.5 Osobine LTI sistema

Kauzalnost - ako je impulsni odziv sistema kauzalan, onda je i LTI sistem kauzalan:

$$g\left(t_0\right) = \int_0^{+\infty} h(\tau)f\left(t_0-\tau\right)d\tau \quad (2.95)$$

Kako je u izrazu (2.95) vrijednost $g\left(t_0\right)$ određena samo pomoću vrijednosti $f\left(t_0-\tau\right)$, $\tau \geq 0$, i kako je $t_0 - \tau \leq t_0$, sistem je kauzalan po definiciji.

Stabilnost - sistem je stabilan u smislu BIBO (engl. *if Bounded Input then Bounded Output*) stabilnosti ako ograničen ulaz daje ograničen izlaz. Linearni vremenski invarijantni sistem (LTI) je stabilan ako i samo ako za ograničen ulazni signal:

$$|f(t)| \leq \mathrm{B_f} < \infty, \qquad \forall t \quad (2.96)$$

daje ograničen izlazni signal, tj.

$$|g(t)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||f(t-\tau)|d\tau$$

$$\leq \mathrm{B_f} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \tag{2.97}$$

za svaku vrijednost $t \in \mathbb{R}$. Dakle, LTI sistem je stabilan ako je impulsni odziv apsolutno integrabilan, odnosno ako vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \tag{2.98}$$

2.5.6 Step odziv LTI sistema

Pokazano je da impulsni odziv (2.76) u potpunosti određuje karakteristike linearnog vremenski invarijantnog sistema. Drugi signal kojim se može okarakterizirati ponašanje LTI sistema je step odziv (engl. *unit step response*) $s(t)$, koji se dobije kada se na ulaz sistema dovede step signal $f(t) = u(t)$. Step odziv LTI sistema s impulsnim odzivom je:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \tag{2.99}$$

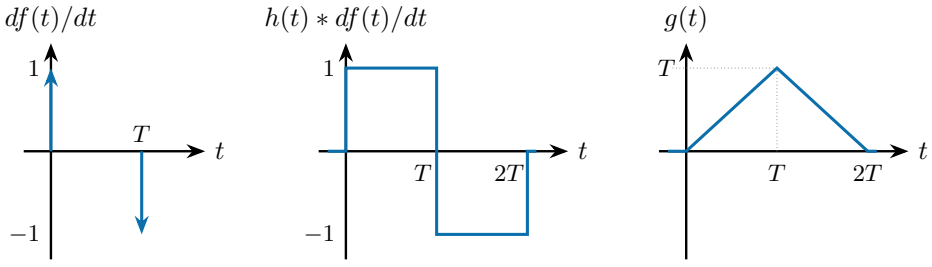
tako da je, prema relaciji (2.99), impulsni odziv prvi izvod step odziva:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.100}$$

Primjer 2.16:

Za ulazni signal LTI sistema $f(t)$ i impulsni odziv $h(t)$ tog sistema potrebno je odrediti odziv sistema $g(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases}$$



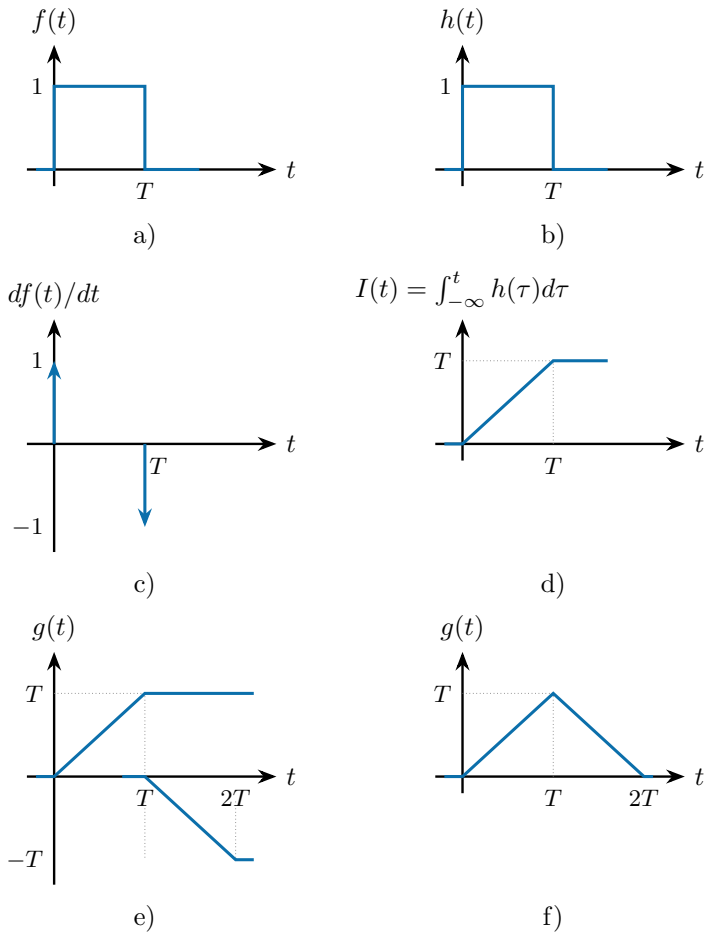
a) b) c)

Slika 2.28: a) Izvod ulaznog signala, b) impulsni odziv u konvoluciji s izvodom ulaznog signala, c) odziv sistema (primjer 2.16).

Rješenje:
Kako su i ulazni signal i impulsni odziv kauzalni (slika 2.29.a i 2.29.b), za nalaženje odziva sistema može se koristiti grafička metoda i prvi oblik relacije (2.94). Dakle, potrebno je naći izvod ulaznog signala (slika 2.29.c) i integral impulsnog odziva (slika 2.29.d), a zatim napraviti njihovu konvoluciju. Izvod ulaznog signala je:

$$\frac{df(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t-T)$$

Impulsni odziv se može napisati u obliku $h(t) = u(t) - u(t-T)$.



Slika 2.29: a) Ulazni signal, b) impulsni odziv, c) izvod ulaznog signala, d) integral impulsnog odziva, e) postupak formiranja odziva, f) odziv sistema (primjer 2.16).

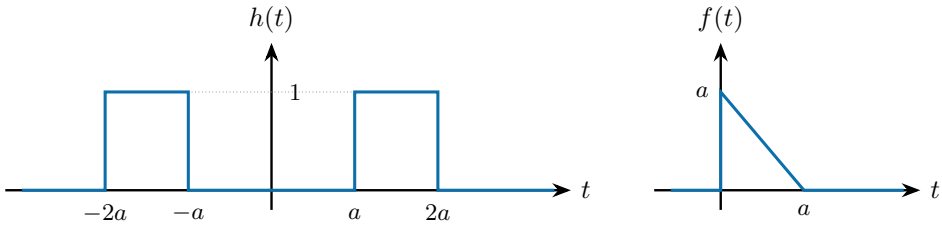
Na osnovu relacije (2.37) integral impulsnog odziva (slika 2.29.d) nalazi se na slijedeći način:

$$\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{t} u(\tau - T)d\tau = tu(t) - (t - T)u(t - T)$$

tako da je odziv $g(t)$ linearna kombinacija integrala impulsnih odziva (slika 2.29.e). Odziv sistema prikazan je na slici 2.29.f.
Do istog rezultata može se doći koristeći treći oblik relacije (2.94). Na slici 2.28.a prikazan je izvod ulaznog signala, a na slici 2.28.b njegova konvolucija s impulsnim odzivom. Na slici 2.28.c prikazan je odziv sistema.

Primjer 2.17:

Za impulsni odziv $h(t)$ kontinualnog vremenski invarijantnog sistema i pobudu $f(t)$, prikazane na slici 2.30, potrebno je odrediti odziv $g(t)$.



Slika 2.30: Impulsni odziv i ulazni signal (primjer 2.17).

Rješenje:
Zbog oblika impulsnog odziva $h(t)$, odziv sistema na pobudu $f(t)$ računa se prema drugom obliku relacije (2.94). Izvod impulsnog odziva $dh(t)/dt$ određuje se grafički (slika 2.31.a), a njegov analitički oblik je:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(t + 2a) - \delta(t + a) + \delta(t - a) - \delta(t - 2a)$$

Sada je potrebno odrediti funkciju $\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$ (slika 2.31.b).
Na intervalu $t \in (-\infty, 0)$:

$$f(t) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} 0 \cdot d\tau = 0$$

Na intervalu $t \in (0, a)$:

$$f(t) = a - t \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{t} (a - \tau)d\tau = \left(a\tau - \frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_{0}^{t} = at - \frac{t^2}{2}$$

Na intervalu $t \in (a, +\infty)$:

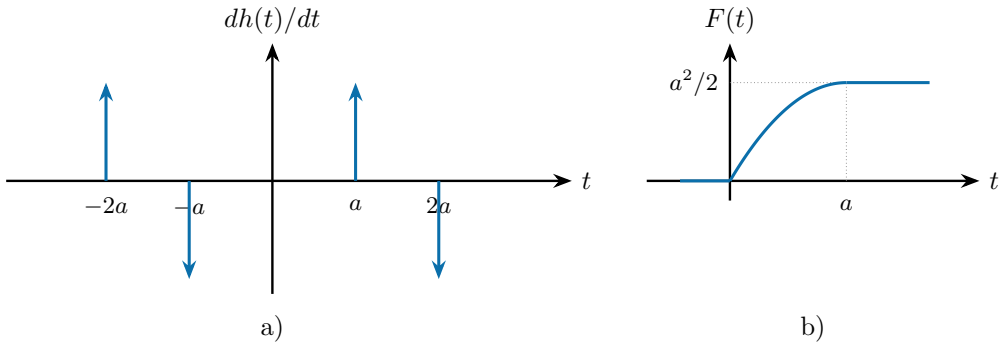
$$f(t) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot d\tau + \int_{0}^{a} (a - \tau)d\tau + \int_{a}^{t} 0 \cdot d\tau = a\tau|_0^a - \left.\frac{\tau^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

Na osnovu slika 2.31.a i 2.31.b, kao i drugog oblika relacije (2.94), način formiranja izlaznog signala i njegov konačan izgled prikazani su na slici 2.32.
Odziv sistema se može naći i korištenjem definicione relacije za konvoluciju:

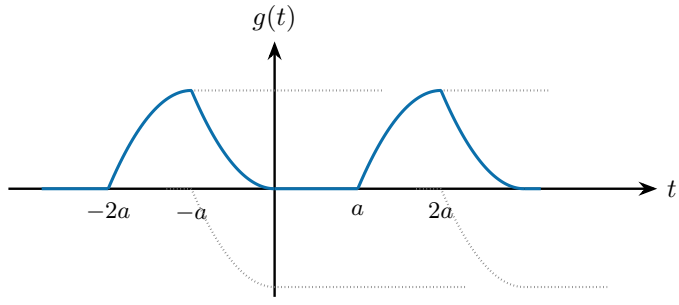
$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

pri čemu ulazni signal i impulsni odziv imaju analitičke oblike:

$$f(t) = (-t + a)[u(t) - u(t - a)]$$
$$h(t) = [u(t + 2a) - u(t + a)] + [u(t - a) - u(t - 2a)]$$



Slika 2.31: a) Izvod impulsnog odziva, b) integral ulaznog signala (primjer 2.17).



Slika 2.32: Formiranje odziva sistema (primjer 2.17)

Primjer 2.18:

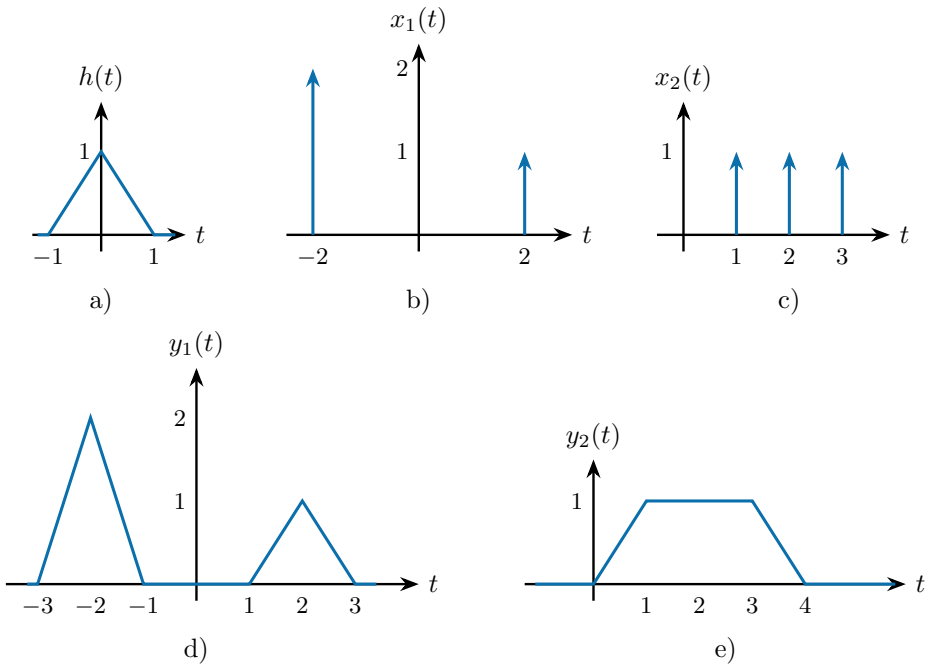
LTI sistem ima impulsni odziv $h(t)$ prikazan na slici 2.33.a. Koristeći osobinu linearnosti i stacionarnosti odrediti i nacrtati izlaz sistema ako je ulaz u sistem:
a) $x_1(t) = 2\delta(t+2) + \delta(t-2)$
b) $x_2(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$

Rješenje:
a) Za ulazni signal $x_1(t)$ prikazan na slici 2.33.b odziv $y_1(t)$ (slika 2.33.d) može se dobiti analitički, koristeći osobine date relacijama (2.87) i (2.88):

$$y_1(t) = x_1(t) * h(t) = h(t) * \{2\delta(t+2) + \delta(t-2)\} = 2h(t+2) + h(t-2)$$

b) Za ulazni signal $x_2(t)$ prikazan na slici 2.33.c odziv $y_2(t)$ (slika 2.33.e) je:

$$\begin{aligned} y_2(t) = x_2(t) * h(t) &= h(t) * \{\delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)\} = \\ &= h(t-1) + h(t-2) + h(t-3) \end{aligned}$$



Slika 2.33: a) Impulsni odziv $h(t)$, b) ulazni signal $x_1(t)$, c) ulazni signal $x_2(t)$, d) konvolucija $h(t)$ i $x_1(t)$, e) konvolucija $h(t)$ i $x_2(t)$ (primjer 2.18).

2.5.7 Grafička interpretacija konvolucije

Grafička interpretacija konvolucije pomaže boljem razumijevanju operacije konvolucije i računanju konvolucionog integrala za složene signale. Takođe, mnogi signali nemaju egzaktan matematički opis, a mogu se opisati grafički. Ako treba napraviti konvoluciju takva dva signala, jedan od mogućih pristupa je grafičko nalaženje konvolucije. Postupak grafičkog nalaženja konvolucije će biti objašnjen na primjerima.

Primjer 2.19:

Za signale $f(t)$ i $h(t)$ prikazane na slikama 2.34.a i 2.34.b. grafički odrediti konvoluciju.

Rješenje:
Iz definicione relacije za konvoluciju (2.81) slijedi da se integriranje obavlja za kontinualno vrijeme τ, gdje t predstavlja parametar. Ovo je posebno važno kada se funkcije $f(\tau)$ i $h(t-\tau)$ predstavljaju grafički, jer se crtaju kao funkcije od τ, a ne od t (slika 2.34.c i slika 2.34.d).

Za crtanje funkcije $h(t-\tau) = h(-(\tau - t))$ polazi se od funkcije $h(\tau)$ koju prvo treba reflektirati oko vremenske ose ($\tau = 0$), čime se dobije $h(-\tau)$, a zatim se $h(-\tau)$ pomakne za t i dobija $h(t-\tau)$. Za $t > 0$ pomak je udesno (slika 2.34.f, a za $t < 0$ pomak je ulijevo (slika 2.34.g. Isti rezultat se može dobiti pomjeranjem signala $h(\tau)$ za t ulijevo ili udesno, zavisno od toga da li je t pozitivno ili negativno, a zatim refleksijom dobivenog signala oko vremenske ose (obzirom da su pomak i refleksija, za razliku od skaliranja, invarijantni u odnosu na redoslijed izvršavanja).

Konvolucija signala $f(t)$ i $h(t)$ je $g(t)$ i ona predstavlja površinu ispod proizvoda funkcija $f(\tau)$ i $h(t-\tau)$.

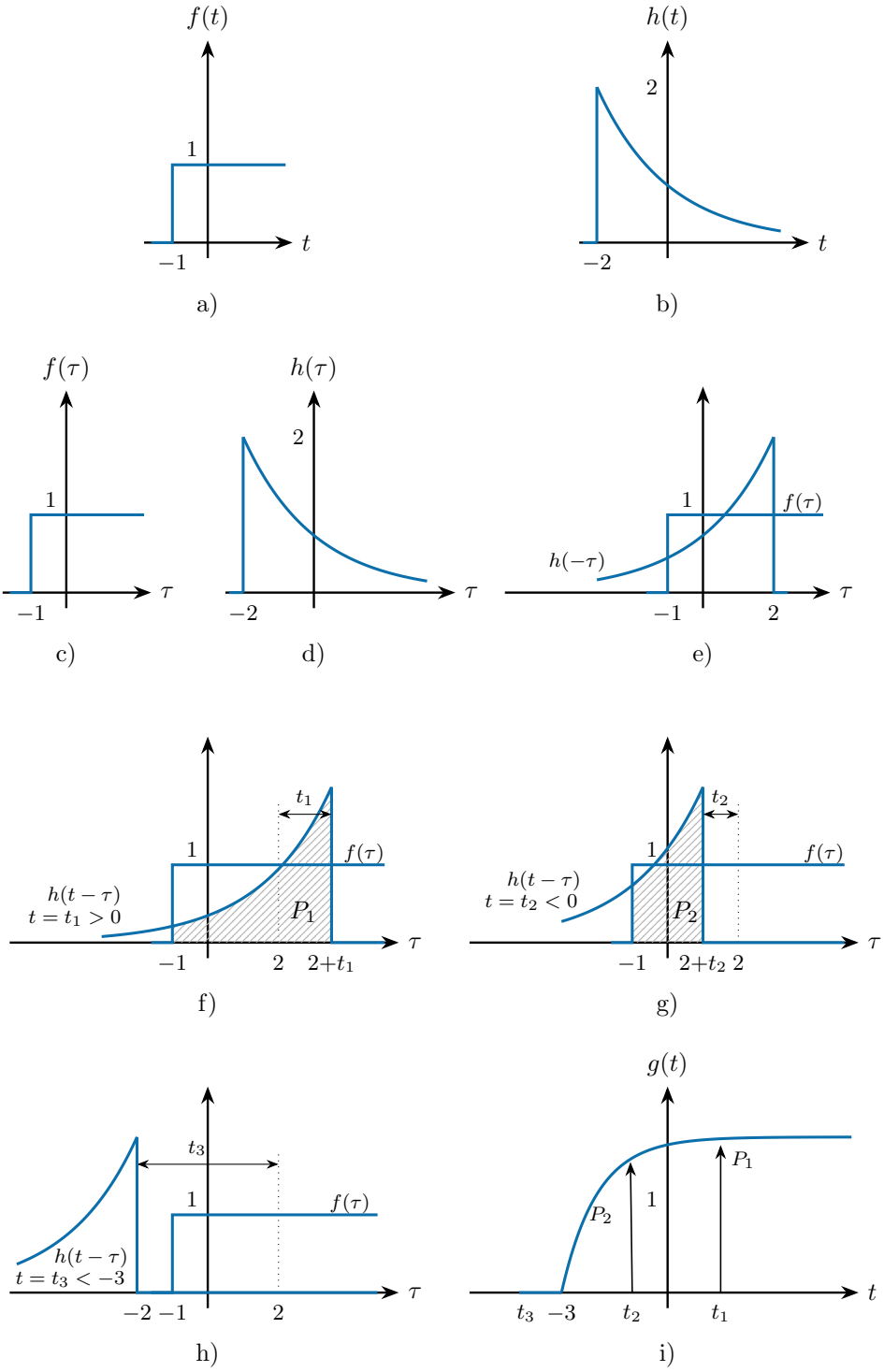
Za nalaženje $g(t_1)$ za neko $t = t_1 > 0$, treba naći površinu P_1 (slika 2.34.f) ispod proizvoda $f(\tau)h(t_1 - \tau)$. Slično se nalazi $g(t_2)$ za $t = t_2 < 0$, odnosno površina P_2 (slika 2.34.g).

Nalazeći konvoluciju za $-\infty < t < \infty$, dolazi se do krive date na slici 2.34.i za sve vrijednosti realne promjenljive t. Za $t \leq -3$ funkcije $f(\tau)$ i $h(t-\tau)$ se ne preklapaju (slika 2.34.h), tako da je $g(t) = 0$.

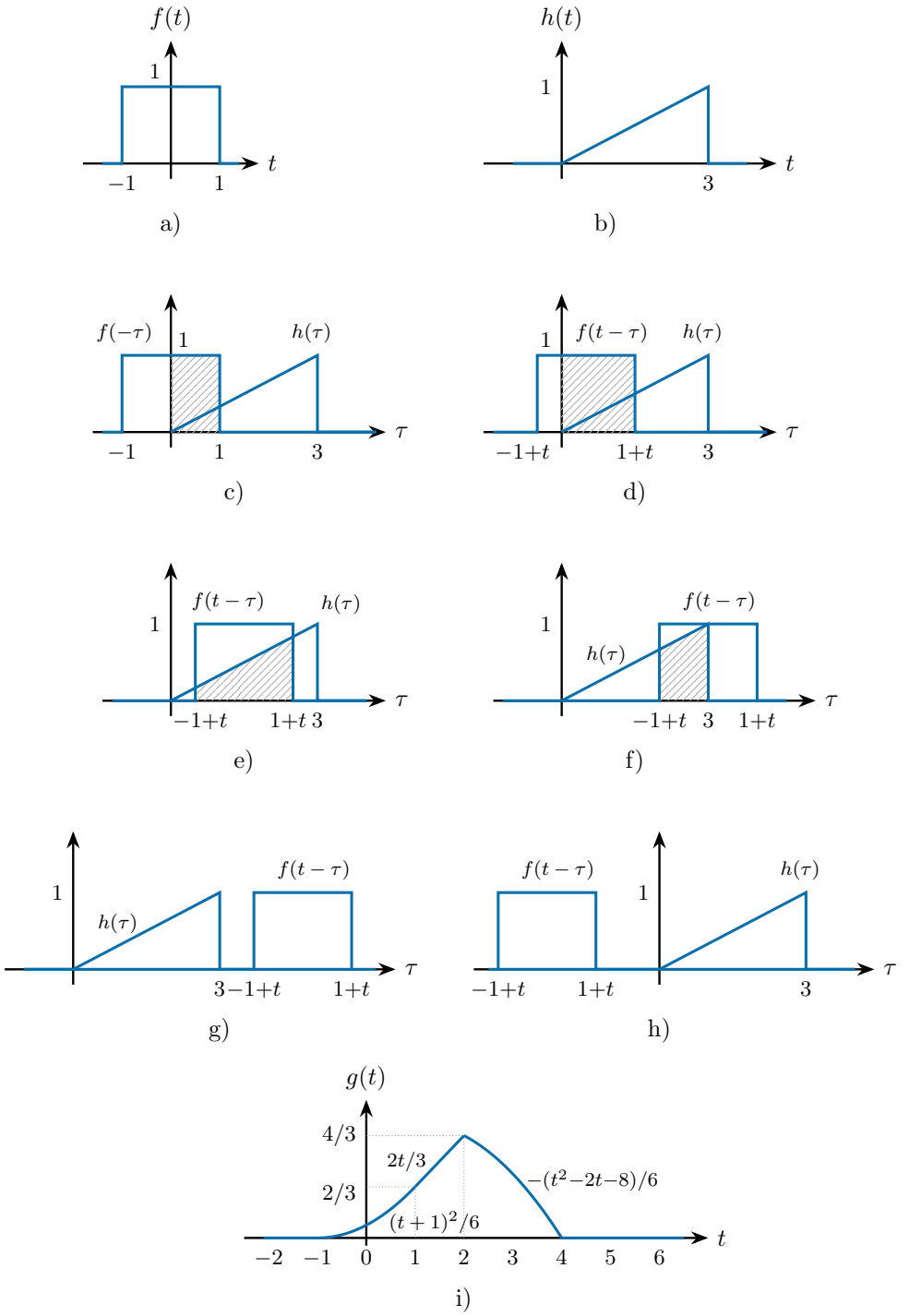
Primjer 2.20:

Naći konvoluciju signala $f(t)$ i $h(t)$ prikazanih na slikama 2.35.a i 2.35.b.

Rješenje:



Slika 2.34: Grafičko određivanje konvolucije (primjer 2.19).



Slika 2.35: Grafičko određivanje konvolucije (primjer 2.20).

Iz osobine komutativnosti konvolucije je:

$$g(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

Funkcije $f(t)$ i $h(t)$, na intervalima na kojima egzistiraju, mogu se napisati u obliku: $f(t) = 1$ i $h(t) = (1/3)t$. Također se može napisati da je: $f(t-\tau) = 1$ i $h(\tau) = (1/3)\tau$. Na slici 2.35.c prikazane su funkcije $f(-\tau)$ i $h(\tau)$, a na slici 2.35.d su funkcije $f(t-\tau)$ i $h(\tau)$. Ukoliko se parametar t mijenja u granicama $-1 \leq t \leq 1$, funkcije će se preklapati na intervalu $(0, 1+t)$, (šrafirani dio na slici 2.35.c i 2.35.d), tako da je:

$$g(t) = \int_{0}^{l+t} h(\tau) f(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{l+t} 1 \cdot \frac{1}{3}\tau d\tau = \frac{1}{6}(t+1)^2, \quad -1 \leq t \leq 1$$

Za $1 \leq t \leq 2$ funkcije se preklapaju na intervalu $(-1+t, 1+t)$, što je prikazano na slici 2.35.e. Funkcije $f(t-\tau)$ i $h(\tau)$ se ne mijenjaju, ali se mijenjaju granice integriranja, tako da je:

$$g(t) = \int_{-1+t}^{1+t} 1 \cdot \frac{1}{3}\tau d\tau = \frac{2}{3}, t \quad 1 \leq t \leq 2$$

Za $2 \leq t \leq 4$ funkcije se preklapaju na intervalu $(-1+t, 3)$, što je prikazano na slici 2.35.f, pa je:

$$g(t) = \int_{-1+t}^{3} 1 \cdot \frac{1}{3}\tau d\tau = -\frac{1}{6}\left(t^2 - 2t - 8\right), \quad 2 \leq t \leq 4$$

Na slici 2.35.g prikazana je situacija za $t \geq 4$, a na slici 2.35.h za $t < -1$, kada je $f(t-\tau)$ pomaknuta toliko udesno, odnosno ulijevo, da nema preklapanja sa $h(\tau)$. Tada je $g(t) = 0$. Iz relacija i iz grafika slijedi da je funkcija $g(t)$ neprekidna, što može služiti kao provjera tačnosti rješenja - naime, ukoliko u konvoluciji ne učestvuju delta funkcije, izlaz je po pravilu neprekidna funkcija.

2.5.8 Konvolucija kontinualnih signala realizirana Pythonom

Konvolucija kontinualnih signala u Pythonu izvodi se pomoću funkcije `np.convolve`. Python (`numpy`) svaki kontinualni signal zapravo predstavlja kao specijalni slučaj diskretnog signala sa dovoljno malim korakom diskretizacije. Zbog ovoga će rezultat konvolucije dva kontinualna signala biti signal čiji je oblik ispravan, ali sa promijenjenom amplitudom. Amplituda signala će zavisiti od vremenskog koraka (što je korak diskretizacije $T_{\min}$ manji, amplituda će biti viša), što se može povezati s klasom $f_c(t)$ funkcija površina impulsa jednakih jedan, pa su amplituda i korak obrnuto proporcionalne veličine. Zbog toga je rezultat funkcije `np.convolve` potrebno skalirati, tj. pomnožiti s odgovarajućim faktorom $T_{\min}$.

Prilikom grafičkog prikaza rezultata konvolucije, posebno ako se radi o signalima koji nisu kauzalni, potrebno je voditi računa o ograničavanju i centriranju rezultirajućeg signala. Ulazne veličine za funkciju `plt.plot` (koja se koristi za grafičko predstavljanje kontinualnih signala) moraju biti iste dužine. Signali koji se dobiju kao rezultat konvolu-

cije generalno će imati veću dužinu od signala nad kojima se ta operacija obavlja.

Primjer 2.21:

Koristeći programski paket Python naći odziv LTI sistema $z(t)$ ako su ulaz u sistem $x(t)$ i impulsni odziv $y(t)$ zadati analitički:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases}$$

Rješenje:
Primjer 2.21 sličan je primjeru 2.16 koji je urađen grafički. Kako su $x(t)$ i $y(t)$ jedinične četvrtke i kauzalni signali, vrijeme t za odabrani interval $[-1, 3]$ se može definirati na slijedeći način: `t = np.arange(-1, 3 + Tmin, Tmin)`. Korak diskretizacije je `Tmin` $= 0.01$.

Ako je funkcija $x(t)$ definirana (ili ima nenulte vrijednosti) na intervalu (t_1, t_2), a funkcija $y(t)$ definirana (ili ima nenulte vrijednosti) na intervalu (t_3, t_4), tada će rezultat konvolucije biti definiran (nenulti) na intervalu $(t_1 + t_3, t_2 + t_4)$, i trajanje će biti jednako sumi trajanja funkcija nad kojima se obavlja konvolucija. Prema tome funkcija $z(t)$ će biti definirana za drugačiju vrijednost vremenskog niza t (u ovom slučaju $[0, 10]$), tako da je prilikom naredbe za predstavljanje rezultata konvolucije, tj. funkcije $z(t)$ na dijagramu, potrebno prvo odrediti vremensku bazu na kojoj će se signal $z(t)$ prikazivati. U protivnom, dužina signala $z(t)$ neće biti jednaka dužini vremenskog niza, i prilikom pokušaja dobijanja njenog dijagrama, nakon naredbe `plt.plot(t, z)` dobija se obavještenje o grešci.

Konvolucija signala $x(t)$ i $y(t)$ se realizira programskim kodom 2.7.
Očigledno, dužina signala $x(t)$ i $y(t)$, kao i vremenskog niza t, iznosi:

$$N_1 = \frac{t_2 - t_1}{T_{\min}} + 1 = \frac{3 - (-1)}{0.01} + 1 = 401, \quad N_2 = \frac{t_4 - t_3}{T_{\min}} + 1 = \frac{3 - (-1)}{0.01} + 1 = 401,$$

a izlazna funkcija $z(t)$ ima dužinu $N = N_1 + N_2 - 1 = 801$, što se može jednostavno provjeriti ispisom `len(z)`.
Dakle, vremenska baza funkcije $z(t)$, koja se želi prikazati na grafiku, mora imati 801 član, što podrazumijeva definiranje nove baze `t_z`.

Da bi se dobile korektne vrijednosti amplitude, potrebno je rezultat funkcije `np.convolve` pomnožiti sa $T_{\min}$ (ili, generalno, faktorom $T_{\min}$). Dakle, relacija koja definira vrijednost $z(t)$ imat će oblik `z=np.convolve(x, y)*Tmin`. Konvolucija $z(t)$ radi vizualizacije je ograničena na interval $t = [-1, 3]$ na kome su prikazane i funkcije nad kojima se konvolucija obavlja.

Programski kod 2.7

```
Tmin = 0.01

t_x = np.arange(-1, 3 + Tmin, Tmin)
x = np.zeros(len(t_x))
x[(t_x >= 0) & (t_x <= 1)] = 1

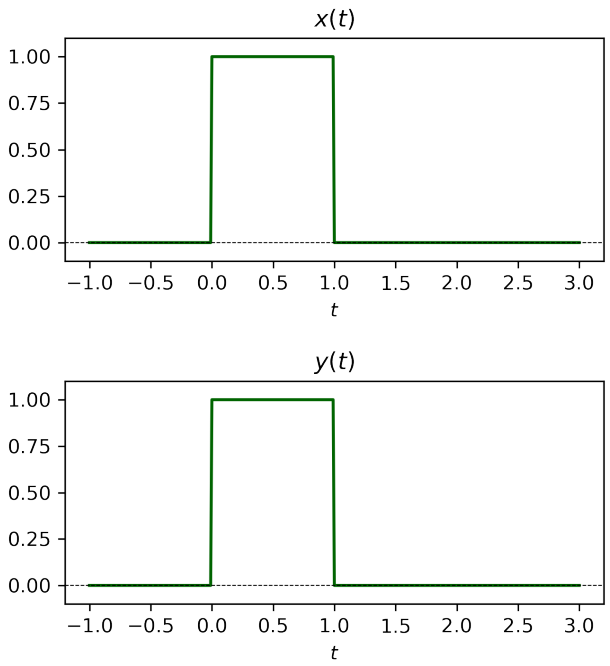
sis.dijagram(t_x, x, naslov='$x(t)$', ylim=(-0.1, 1.1))

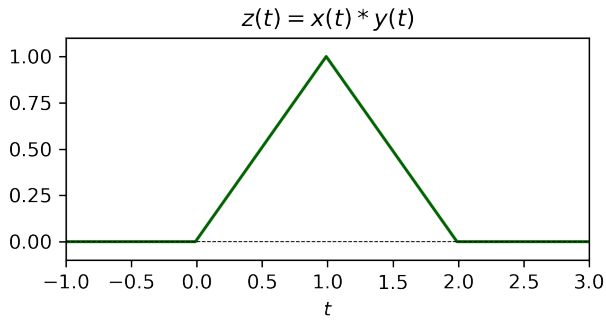
t_y = np.arange(-1, 3 + Tmin, Tmin)
y = np.zeros(len(t_y))
y[(t_y >= 0) & (t_y <= 1)] = 1

sis.dijagram(t_y, y, naslov='$y(t)$', ylim=(-0.1, 1.1))

t_z = np.arange(-2, 6 + Tmin, Tmin)
z = np.convolve(x, y) * Tmin   # konvolucija i skaliranje


sis.dijagram(t_z, z,
             naslov=r'$z(t) = x(t) * y(t)$',
             xlim = (-1, 3), ylim=(-0.1, 1.1))
```





Primjer 2.22:

Naći odziv LTI sistema $z(t)$ ako su ulaz u sistem $x(t)$ i impulsni odziv $y(t)$ nekauzalni signali zadati relacijama:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} 1, & -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0, & \text{za ostale } t \end{cases}$$

Rješenje:
Konvolucija zadatih signala realizira se Python skriptom 2.8. Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ imaju u ovom slučaju po 401 član, dok $z(t)$ ima 801 član. $z(t)$ je ograničena na interval $t = [-2, 2]$ prilikom grafičkog prikaza odgovarajućih dijagrama.

Programski kod 2.8

```
Tmin = 0.01

t_x = np.arange(-2, 2 + Tmin, Tmin)
x = np.zeros(len(t_x))
x[(t_x >= -0.5) & (t_x <= 0.5)] = 1

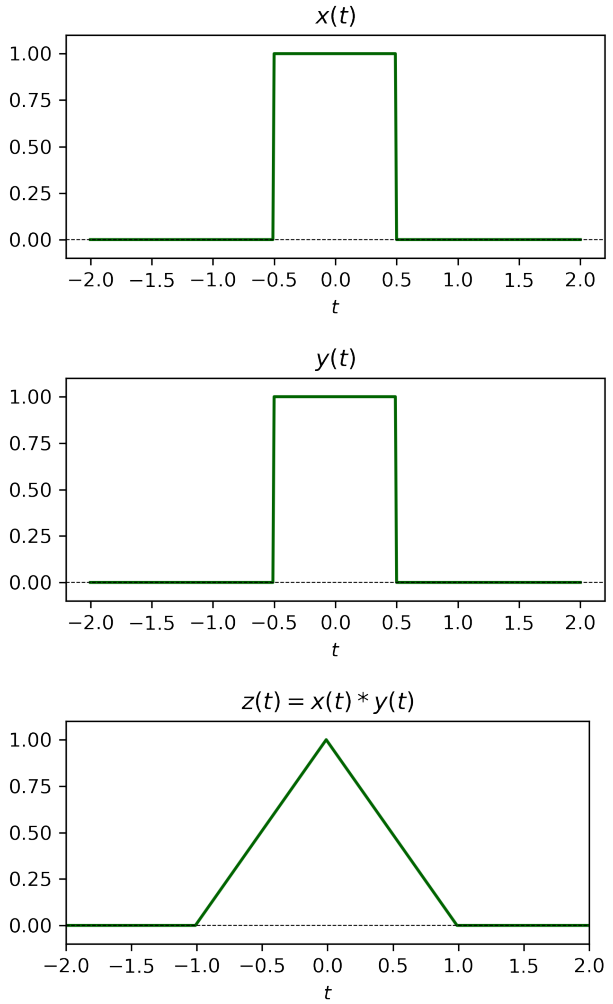
sis.dijagram(t_x, x, naslov='$x(t)$', ylim=(-0.1, 1.1))

t_y = np.arange(-2, 2 + Tmin, Tmin)
y = np.zeros(len(t_y))
y[(t_y >= -0.5) & (t_y <= 0.5)] = 1

sis.dijagram(t_y, y, naslov='$y(t)$', ylim=(-0.1, 1.1))

t_z = np.arange(-4, 4 + Tmin, Tmin)
z = np.convolve(x, y) * Tmin   # konvolucija i skaliranje


sis.dijagram(t_z, z, naslov=r'$z(t) = x(t) * y(t)$',
             xlim=(-2,2), ylim=(-0.1, 1.1))
```



2.6 Frekventna funkcija sistema

Funkcija koja karakterizira linearne i stacionarne sisteme je frekventna funkcija sistema. Neka je ulaz u sistem:

$$f(t) = e^{j\omega t} \tag{2.101}$$

gdje je $j = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Odziv sistema se može odrediti pomoću impulsnog odziva $h(t)$ koristeći konvolucioni integral (2.80):

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{j\omega t} * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

$$= e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$
$$= e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) \tag{2.102}$$

gdje je:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{2.103}$$

Funkcija $H(j\omega)$ se naziva frekventna funkcija sistema ako odgovarajući integral postoji. Pomoću frekventne funkcije sistema može se odrediti odziv sistema.

Primjer 2.23:

Odrediti odziv sistema ako je ulaz u sistem:

$$f(t) = \sin(ct) = \frac{e^{jct}}{2j} - \frac{e^{-jct}}{2j} = f_1(t) - f_2(t)$$

a impulsni odziv:

$$h(t) = e^{-at} u(t)$$

Rješenje:
Frekventna funkcija sistema dobija se iz impulsnog odziva:

$$H(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega}$$

Odziv sistema $g(t)$ je:

$$g(t) = L\{f(t)\} = \frac{1}{2j} L\left\{e^{jct}\right\} - \frac{1}{2j} L\left\{e^{-jct}\right\} = \frac{1}{2j} H(jc) e^{jct} - \frac{1}{2j} H(-jc) e^{-jct} =$$
$$= \frac{0.5}{a + jc} \cdot \frac{e^{jct}}{j} + \frac{0.5}{a - jc} \cdot \frac{e^{-jct}}{j} = \frac{1}{a^2 + c^2} \sin(ct - \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{c}{a}$$

Primjer 2.24:

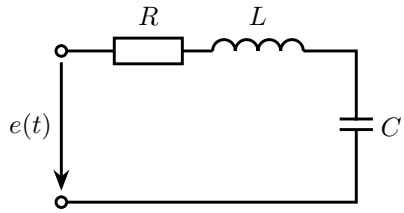
Pokazati da sistem opisan impulsnim odzivom:

$$h(t) = e^{-at} \cdot u(t), \quad a > 0$$

i sistem opisan diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{g}(t) + a g(t) = f(t), \quad a > 0$$

imaju istu frekventnu funkciju sistema.



Slika 2.36: RLC kolo (primjer 2.25).

Rješenje: Frekventna funkcija sistema se može odrediti pomoću impulsnog odziva:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau}u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)\tau}d\tau =$$
$$= \left| \begin{array}{c} -(a+j\omega)\tau = z \\ dz = -(a+j\omega)d\tau \end{array} \right| = \int_{0}^{-\infty} e^{z}\frac{1}{-(a+j\omega)}dz = \frac{1}{a+j\omega}$$

Frekventna funkcija sistema se može odrediti i pomoću diferencijalne jednačine. Naime, ako je ulaz u sistem $f(t) = e^{j\omega t}$ onda je izlaz iz sistema $g(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$. Ako se ove vrijednosti zamijene u diferencijalnu jednačinu, onda je:

$$e^{j\omega t} \cdot j\omega \cdot H(j\omega) + a \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) = e^{j\omega t}$$

Rješavanjem po $H(j\omega)$ dobija se frekventna funkcija sistema:

$$H(j\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

Dakle, sistem opisan impulsnim odzivom $h(t)$ i data diferencijalna jednačina imaju istu frekventnu funkciju sistema. Takođe, homogeno rješenje diferencijalne jednačine ima oblik $h(t)$.

Primjer 2.25:

Na slici 2.36. prikazano je serijsko RLC kolo.
a) Odrediti funkciju sistema za sistem čiji je ulazni signal napon $e(t)$, a izlazni signal napon na kondenzatoru $u_C(t)$. Napisati diferencijalnu jednačinu sistema.
b) Odrediti funkciju sistema za sistem čiji je ulazni signal napon $e(t)$, a izlazni signal struja kroz kondenzator $i_C(t)$.

Rješenje:

a) Za određivanje funkcije sistema treba prvo napisati diferencijalnu jednačinu koja opisuje dati sistem.

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$
$$i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$$
$$u_R(t) = Ri_R(t) = Ri_C(t) = RC\frac{du_C(t)}{dt}$$
$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = L\frac{di_C(t)}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C(t)}{dt}\right) = LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2}$$

Konačno se dobija:

$$e(t) = RC\frac{du_C(t)}{dt} + LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + u_C(t) \tag{2.104}$$

Jednačina (2.104) je diferencijalna jednačina sistema. Funkcija sistema se dobije ako se na ulaz LTI sistema dovede signal $e^{j\omega t}$, a izlaz je tada proizvod: $e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$. U primjeru sa slike 2.36 ulazni signal je $e(t) = e^{j\omega t}$, a napon na kondenzatoru je: $u_C(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$. Prvi i drugi izvod toga napona su:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = j\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega), \quad \frac{d^2u_C(t)}{dt^2} = (j\omega)^2 \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$$

Uvrštavanjem napona na kondenzatoru $u_C(t)$ i njegovih izvoda u relaciju (2.104) dobije se:

$$e^{j\omega t} = RC \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) + LC \cdot (j\omega)^2 \cdot e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) + e^{j\omega t} \cdot H(j\omega) / : e^{j\omega t}$$

odakle je funkcija sistema:

$$H(j\omega) = \frac{1}{-LC \cdot \omega^2 + RC \cdot j\omega + 1} \tag{2.105}$$

b) U slučaju da je ulaz u RLC kolo $e(t) = e^{j\omega t}$, a izlaz struja kroz kondenzator $i_C(t) = e^{j\omega t} \cdot H(j\omega)$, frekventna funkcija sistema se dobije na slijedeći način. Veza između napona na kondenzatoru i struje kroz kondenzator je data sa:

$$i_C(t) = C\frac{dU_c}{dt}$$

pa je veza $u_C(t) \to i_C(t)$ dobiva:

$$I_C(j\omega) = j\omega C \cdot U_C(j\omega)$$

Prenosna funkcija se može dobiti iz relacije (2.105):

$$H(j\omega) = j\omega C \cdot \frac{1}{-LC \cdot \omega^2 + RC \cdot j\omega + 1} = \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{2.106}$$

2.7 Blok dijagram sistema

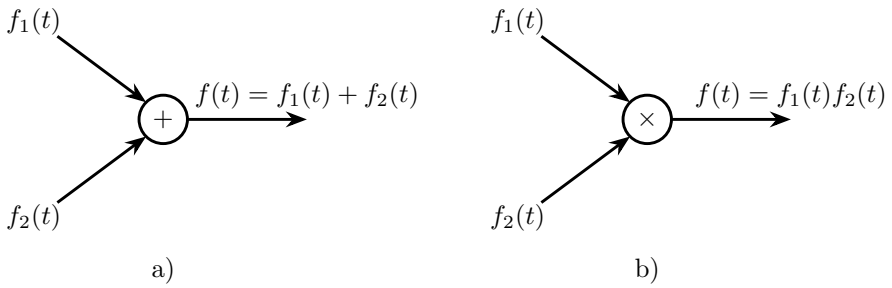
Sistemi koji se mogu predstaviti diferencijalnim jednačinama se u općem slučaju mogu predstaviti grafički pomoću blok dijagrama. Blok dijagram se koristi za prikaz, razumijevanje i simulaciju sistema pomoću računara. Složeniji sistemi se rastavljaju na međusobno povezane podsisteme.

Kod linearnih kontinualnih sistema odziv se određuje primjenom konvolucionog integrala ili rješavanjem sistema diferencijalnih jednačina. Pored osnovnih operacija: sabiranja i množenja, za predstavljanje sistema pomoću blok dijagrama mogu se koristiti i blokovi za diferenciranje i integriranje signala. Simboli, koji se koriste u blok dijagramima kontinualnih linearnih vremenski invarijantnih sistema, za predstavljanje operacija sabiranja i množenja, prikazani su na slici 2.37 .

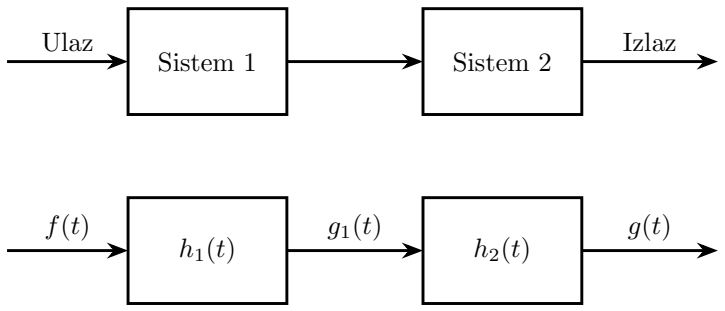
Podsistemi se mogu povezivati kaskadno i paralelno. Blok dijagram kaskadne veze dva LTI sistema prikazan je na slici 2.38. Odziv takvog sistema se određuje na osnovu relacije:

$$g(t) = g_1(t) * h_2(t) = [f(t) * h_1(t)] * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \tag{2.107}$$

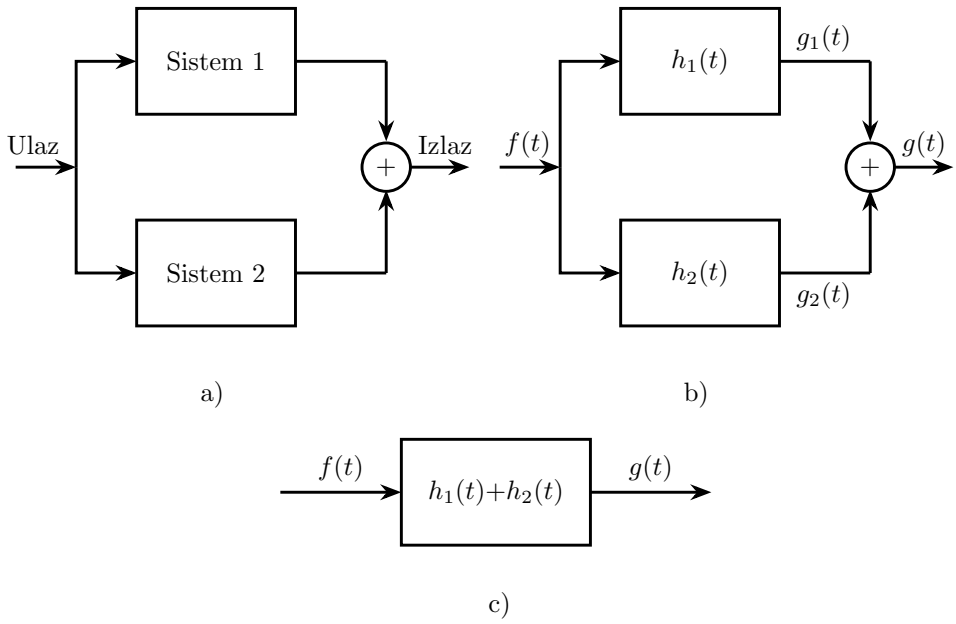
Odziv kaskadne veze dva LTI sistema jednak je konvoluciji ulaznog signala sa konvolucijom impulsnih odziva.



Slika 2.37: Simboli za predstavljanje veze kontinualnih sistema: a) sumator, b) množač.



Slika 2.38: Blok dijagram kaskadne veze dva sistema.



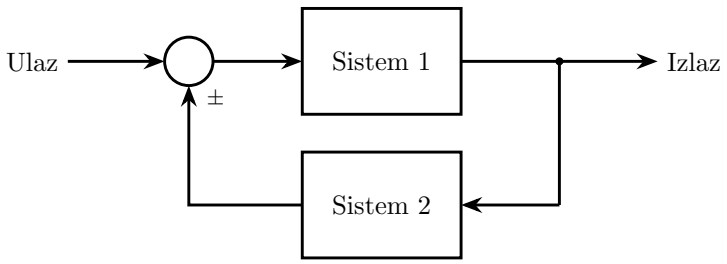
Slika 2.39: Blok dijagrami paralelne veze dva sistema: a) opći zapis, b) sa upisanim impulsnim odzivima, c) svedeni ekvivalentni sistem.

Blok dijagram paralelne veze dva LTI sistema prikazan je na slici 2.39.a. Odziv takvog sistema (slika 2.39.b) određuje se na osnovu relacije:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = f(t) * h_1(t) + f(t) * h_2(t) = f(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \tag{2.108}$$

Odziv paralelne veze dva LTI sistema jednak je konvoluciji ulaznog signala sa sumom impulsnih odziva. Slika 2.39.c predstavlja ekvivalentni sistem.

Važan tip veze sistema je sa pozitivnom ili negativnom povratnom spregom (engl. *feedback*), a blok dijagram takvog sistema prikazan je na slici 2.40.



Slika 2.40: Sistem sa povratnom spregom.

Primjer 2.26:

Neka su zadata četiri LTI sistema spojena prema slici 2.41. Njihovi impulsni odzivi su zadati analitički:

$$h_1(t) = u(t), \qquad h_2(t) = u(t+2) - u(t)$$
$$h_3(t) = \delta(t-2), \quad h_4(t) = \alpha^t u(t)$$

Odrediti impulsni odziv $h(t)$ kompletnog sistema.

Rješenje:
Sistemi s impulsnim odzivima $h_1(t)$ i $h_2(t)$ spojeni su paralelno, tako da je impulsni odziv te veze $h_1(t) + h_2(t)$, što je ilustrirano na slici 2.42.a. Taj sistem je u kaskadnoj vezi sa sistemom $h_3(t)$, tako da je impulsni odziv (slika 2.42.b) te veze $(h_1(t) + h_2(t)) * h_3(t)$. Ukupni impulsni odziv dat je relacijom:

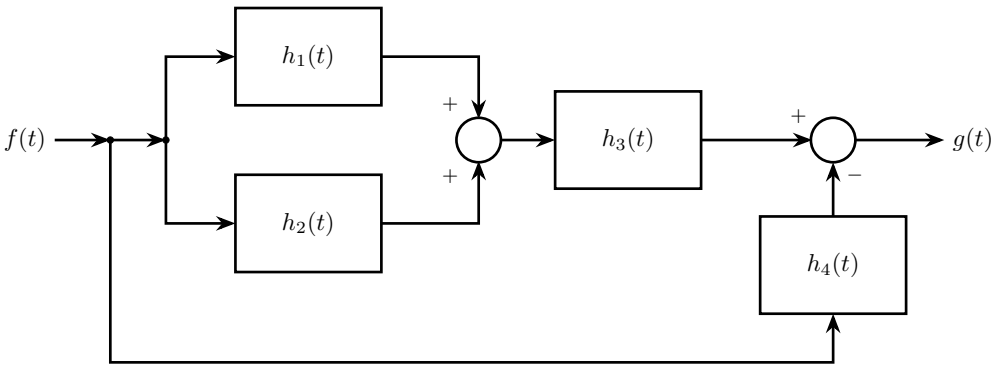
$$h(t) = (h_1(t) + h_2(t)) * h_3(t) - h_4(t)$$

što je prikazano na slici 2.42.c. Ako se u prethodnoj relaciji zamijene zadati impulsni odzivi, dobije se:

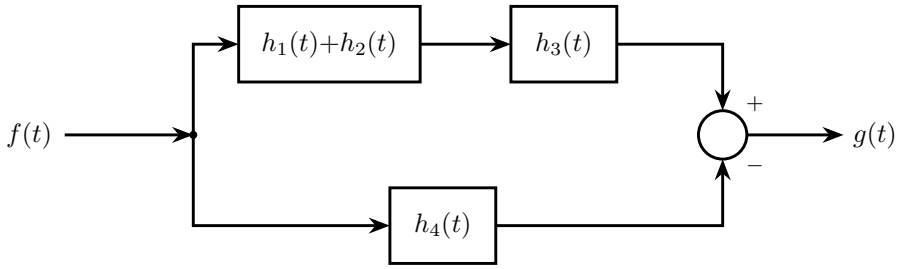
$$h(t) = [u(t) + u(t+2) - u(t)] * \delta(t-2) - \alpha^t u(t)$$
$$h(t) = u(t-2) + u(t) - u(t-2) - \alpha^t u(t) = \left(1 - \alpha^t\right) u(t)$$

Dakle, ukupni impulsni odziv sistema sa slike 2.41. je:

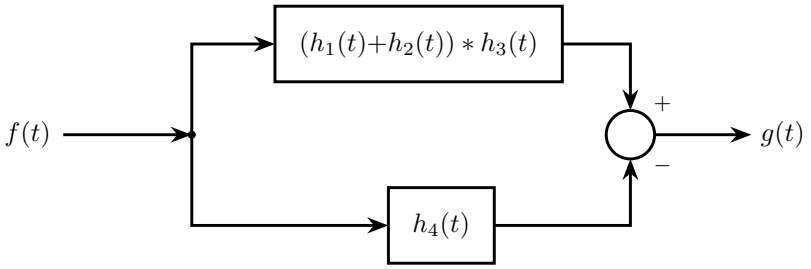
$$h(t) = (1-\alpha)^t u(t)$$



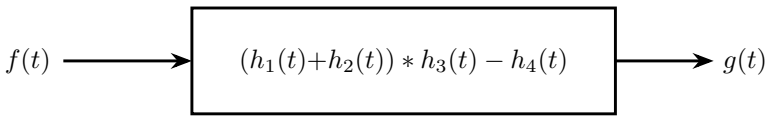
Slika 2.41: Veza četiri LTI sistema (primjer 2.26).



a)



b)



c)

Slika 2.42: a) Redukcija paralelne veze dva sistema u njihovu sumu, b) redukcija kaskadne veze u konvoluciju, c) redukcija paralelne veze u ekvivalentni sistem (primjer 2.26).

3. Diskretni signali i sistemi

3.1 Diskretni signali

Realni kontinualni signali su funkcije realne nezavisno promjenljive t, koja predstavlja vrijeme. Promjenljiva t može imati sve realne vrijednosti iz intervala (t_1, t_2), odnosno:

$$f = f(t), \quad t \in (t_1, t_2) \subset \mathbb{R} \tag{3.1}$$

Diskretni signali su definirani samo u diskretnim trenucima promjenljive t, a ne i između njih. Dakle, diskretni signal je predstavljen sekvencom (nizom) brojeva koji predstavljaju amplitude signala u trenucima kada je signal definiran. Diskretizacija kontinualnog signala po vremenu (odabiranje ili uzorkovanje) može biti izvršena uniformno ili neuniformno. Ukoliko su tačke definiranosti kontinualnog signala date u jednakim vremenskim intervalima, tj. $t = nT_s$, gdje je T_s period diskretizacije a n cijeli broj, kaže se da je izvršena uniformna diskretizacija, koja se iz praktičnih razloga, kao i zbog jednostavnijih matematičkih operacija, najčešće koristi. Za vremenski diskretne signale koji se dobiju uniformnom diskretizacijom iz vremenski kontinualnog signala, važi:

$$f(t)|_{t=nT_s} = f(nT_s), \quad T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} \tag{3.2}$$

Da bi daljnje razmatranje bilo što jednostavnije, umjesto trenutaka nT_s, mogu se posmatrati samo veličine n, tako da signal $f(nT_s)$ zavisi samo od n. Za takav signal koristi se oznaka $f[n], n \in \mathbb{Z}$.

Tako pojam diskretni signal podrazumijeva vremenski diskretni signal, jer je diskretizacija izvršena samo po vremenu, a amplitude signala su kontinualne, što znači da mogu imati bilo koju vrijednost.

Za jednoznačno definiranje diskretnog signala, koristi se definicija:

$$f[n] = \lim_{\varepsilon \to 0} f[nT_s + \varepsilon] \quad (\varepsilon > 0) \tag{3.3}$$

odnosno pri diskretizaciji se koristi granična vrijednost kontinualnog signala sa desne strane.

Diskretni signal, obilježen sa $f[n]$ je sekvenca (niz) realnih ili kompleksnih brojeva, definiranih za svako cjelobrojno n, koje se naziva diskretno vrijeme.

Vrijednost sekvence za neko diskretno vrijeme n obilježava se sa $f(n)$. Sekvenca se grafički predstavlja vertikalnim linijama koje se završavaju tačkama, pored kojih je naznačena njena vrijednost u odgovarajućem diskretnom trenutku. Vrijednosti diskretnog signala mogu se zadati tabelarno, grafički ili kao jednoznačna funkcija od n.

Diskretni signal može biti sekvenca konačne ili beskonačne dužine. Sekvence konačne dužine (engl. finite-duration) definirane su samo za konačni vremenski interval:

$$N_1 \leq n \leq N_2 \tag{3.4}$$

gdje je $-\infty < N_1$ i $N_2 < \infty$ uz uslov $N_1 \leq N_2$. Dužina N sekvence je tada:

$$N = N_2 - N_1 + 1 \tag{3.5}$$

gdje je N broj uzoraka.

Sekvence beskonačne dužine (engl. infinite-duration) se dijele na tri tipa. Prvi tip su sekvence beskonačne dužine za koje je:

$$f(n) = 0 \text{ za } n < N_1 \tag{3.6}$$

gdje je N_1 cijeli pozitivan ili negativan broj (engl. right-sided sequence). Ako je $N_1 \geq 0$ diskretni signal je kauzalan (fizički, neanticipativan ili nepredviđajući).

Drugi tip su sekvence beskonačne dužine za koje važi:

$$f(n) = 0 \text{ za } n \geq N_2 \tag{3.7}$$

gdje je N_2 cijeli pozitivan ili negativan broj (engl. left-sided sequence). Ove sekvence su po pravilu nekauzalne (anticipativne ili predviđajuće) jer egzistiraju u negativnom diskretnom vremenu. Ako je $N_2 < 0$ diskretni signal je antikauzalan.

Treći tip sekvenci egzistiraju u opsegu $-\infty < n < \infty$, te je sekvenca definirana za svako cjelobrojno n (engl. *two-sided sequence*).

3.2 Specijalni diskretni signali

Specijalni diskretni signali, koji imaju posebnu ulogu u analizi signala i sistema, su: impulsna sekvenca, jedinična sekvenca, rampa, realna eksponencijalna sekvenca, sinusna sekvenca i kompleksna eksponencijalna sekvenca.

3.2.1 Impulsna ili delta sekvenca

Najjednostavniji diskretni signal je impulsna ili delta sekvenca, koja ima amplitudu jednaku jedinici samo za diskretno vrijeme $n = 0$. Za sve ostale vrijednosti n, vrijednosti sekvence su nula. Delta sekvenca je kauzalan signal. Na slici 3.1. diskretno vrijeme n je na apscisi. Matematički, impulsna sekvenca se definira kao:

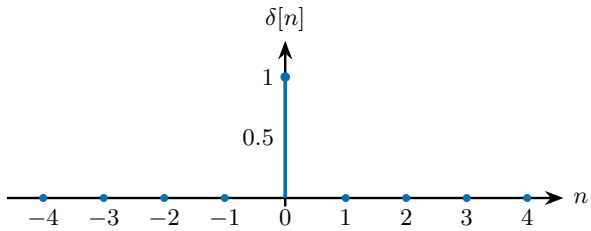
$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Delta sekvenca se može koristiti za selekciju signala u trenutku $n = 0$. Kako je $\delta[n] = 1$ samo za $n = 0$, onda je:

$$f[n]\delta[n] = f(0)\delta[n] \tag{3.9}$$

ili u općem slučaju:

$$f[n]\delta[n-k] = f(k)\delta[n-k] \tag{3.10}$$



Slika 3.1: Impulsna (delta) sekvenca.

Ova osobina delta sekvence naziva se osobina selektivnosti. Na osnovu osobine (3.10) slijedi da se bilo koja diskretna sekvenca $f[n]$ može prikazati kao linearna kombinacija pomaknutih delta sekvenci u obliku beskonačne sume:

$$f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\delta[n-k] \tag{3.11}$$

Diskretni signal se može zadati tabelarno, pri čemu se za diskretne vrijednosti n zadaju vrijednosti $f(n)$ sekvence $f[n]$. Iz tabele analitički izraz za sekvencu $f[n]$ se dobije kao suma pomaknutih delta sekvenci čije se jedinične amplitude množe vrijednostima sekvence $f[n]$ u odgovarajućim diskretnim trenucima n:

$$f[n] = \ldots + f(-1)\delta[n+1] + f(0)\delta[n] + f(1)\delta[n-1] + f(2)\delta[n-2] + \ldots \tag{3.12}$$

Primjer 3.1:

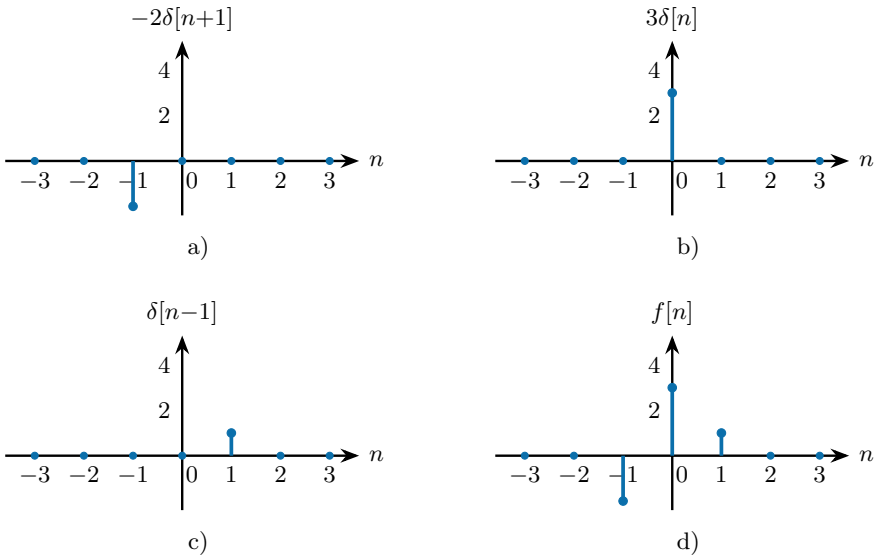
Nacrtati sekvencu $f[n]$ ako su vrijednosti sekvence u diskretnim vremenskim trenucima n zadate tabelom:

n	-1	0	1	ostali n
$f(n)$	-2	3	1	0

Rješenje:
Na osnovu relacije (3.11) diskretni signal $f[n]$ se može napisati u obliku sume pomaknutih delta sekvenci:

$$f[n] = -2\delta[n+1] + 3\delta[n] + \delta[n-1] \tag{3.13}$$

Sekvenca $f[n]$ prikazana je na slici 3.1.d, a dobivena je kao suma pomaknutih delta sekvenci: $-2\delta[n+1], 3\delta[n]$ i $\delta[n-1]$ prikazanih na slikama 3.2.a, 3.2.b i 3.2.c.
U Pythonu se impulsna sekvenca, kao i specificirana sekvenca $f[n]$ mogu vizualizirati na način kao što je to prikazano kodom 3.1.



Slika 3.2: Signal iz relacije (3.13) dobiven grafičkim putem.

Programski kod 3.1

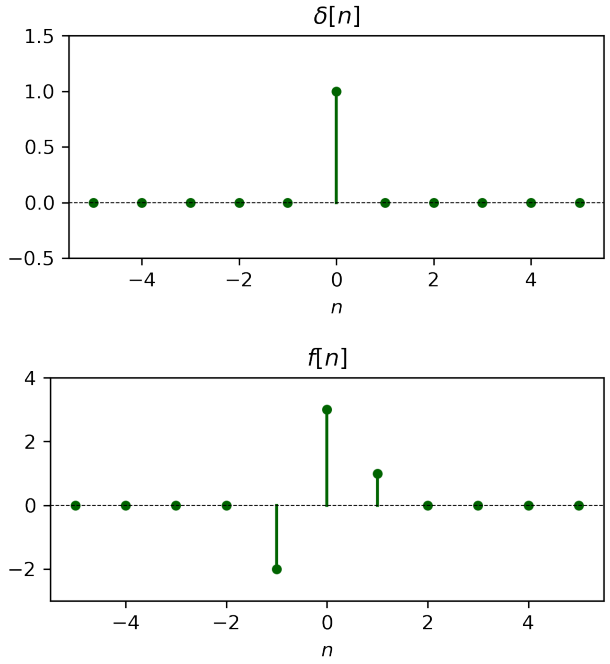
```
n = np.arange(-5, 6)    # n = -5, -4, ..., 5

# impulsna sekvenca delta[n]
delta = np.zeros(len(n))
delta[n == 0] = 1

sis.dijagram(n, delta, tip='uzorci',
         naslov=r'$\delta[n]$', ylim=(-0.5, 1.5))

# sekvenca f[n] = -2*delta[n+1] + 3*delta[n] + delta[n-1]
f = np.zeros(len(n))
f[n == -1] = -2
f[n ==  0] =  3
f[n ==  1] =  1

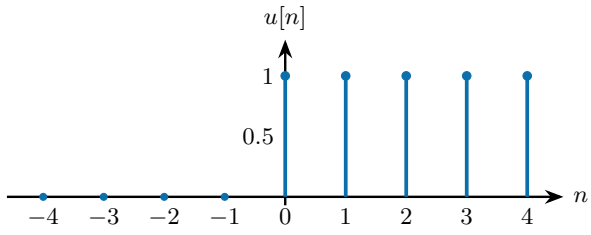
sis.dijagram(n, f, tip='uzorci',
             naslov=r'$f[n]$', ylim=(-3, 4))
```



3.2.2 Jedinična sekvenca

Jedinična (step, odskočna) sekvenca ili diskretna Heavisideova funkcija jednaka je jedinici za sve vrijednosti diskretnog vremena $n \geq 0$, a ima vrijednost nula za $n < 0$ (slika 3.3.). Definirana je relacijom:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{3.14}$$



Slika 3.3: Jedinična sekvenca.

Jedinična sekvenca se može predstaviti i kao suma pomaknutih delta sekvenci:

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k] \tag{3.15}$$

Jedinična sekvenca je kauzalan signal i koristi se kada je npr. potrebno definirati kauzalnost neke sekvence ili granice nenultih dijelova neke sekvence. Između jedinične i delta sekvence postoji veza data relacijom:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{3.16}$$

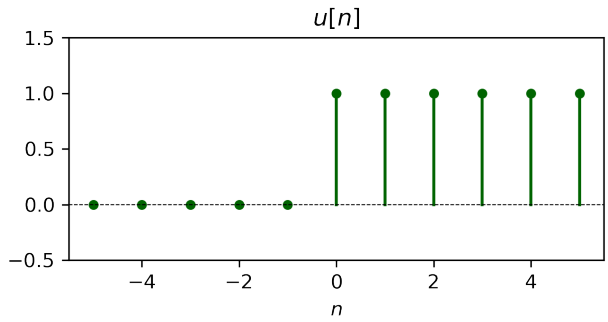
U Pythonu jedinična sekvenca se može vizualizirati na slijedeći način:

Programski kod 3.2

```
n = np.arange(-5, 6)

u = np.zeros(len(n))
u[n >= 0] = 1

sis.dijagram(n, u, tip='uzorci',
             naslov='$u[n]$', ylim=(-0.5, 1.5))
```



3.2.3 Rampa

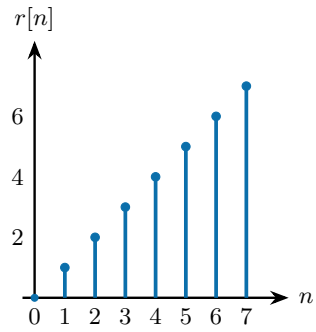
Rampa (slika 3.4.) u diskretnom vremenu n definira se na slijedeći način:

$$r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Između rampe i jedinične sekvence postoji veza data relacijom:

$$r[n] = nu[n] \tag{3.18}$$

U Pythonu diskretna rampa se može generirati na slijedeći način:

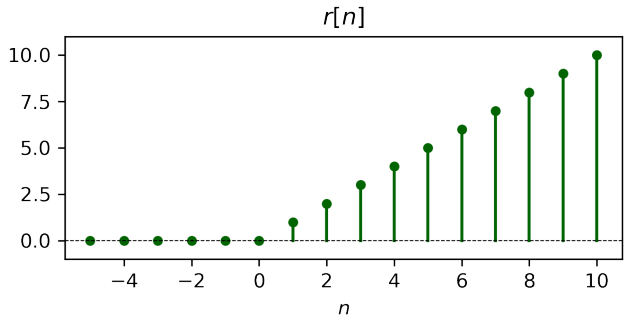


Slika 3.4: Rampa sekvenca.

Programski kod 3.3

```
n = np.arange(-5, 11)
r = np.zeros(len(n))
r[n >= 0] = n[n >= 0]

sis.dijagram(n, r, tip='uzorci',
             naslov='$r[n]$', ylim=(-1, 11))
```



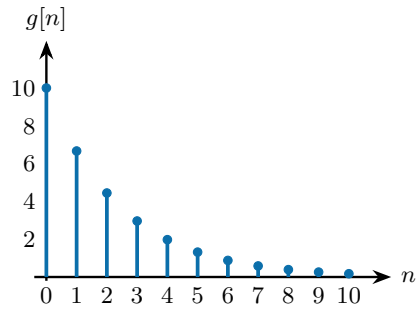
.

3.2.4 Realna kauzalna eksponencijalna sekvenca

Eksponencijalna sekvenca definira se relacijom:

$$g[n] = A\alpha^n \cdot u[n] = \begin{cases} A\alpha^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

Ako su A i α realni brojevi, sekvenca je realna. Za $\alpha > 1$ amplituda sekvence raste s porastom diskretnog vremena n. Za $\alpha < -1$ vrijednosti sekvence mijenjaju znak, ali opet rastu s porastom diskretnog vremena n. Za $A > 0$ i $0 < \alpha < 1$, vrijednosti sekvence



Slika 3.5: Realna eksponencijalna sekvenca.

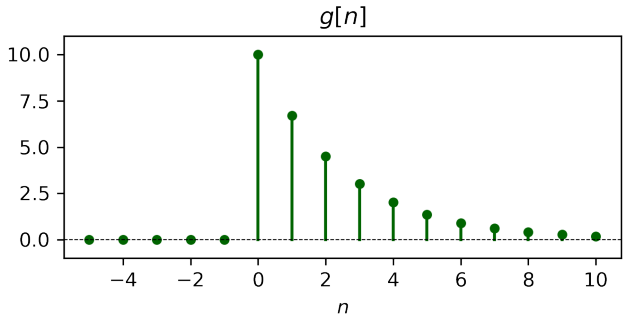
su pozitivne i opadaju s porastom diskretnog vremena n (slika 3.5.). Za $-1 < \alpha < 0$ vrijednosti sekvence mijenjaju znak i opadaju s porastom diskretnog vremena n. Sekvenca definirana relacijom (3.19) jednaka je nuli za negativne vrijednosti n, dakle predstavlja kauzalan signal.

U Pythonu realna kauzalna eksponencijalna sekvenca se može generirati na slijedeći način:

Programski kod 3.4

```
n = np.arange(-5, 11)
g = np.zeros(len(n))
g[n >= 0] = 10 * np.exp(-0.4 * n[n >= 0])

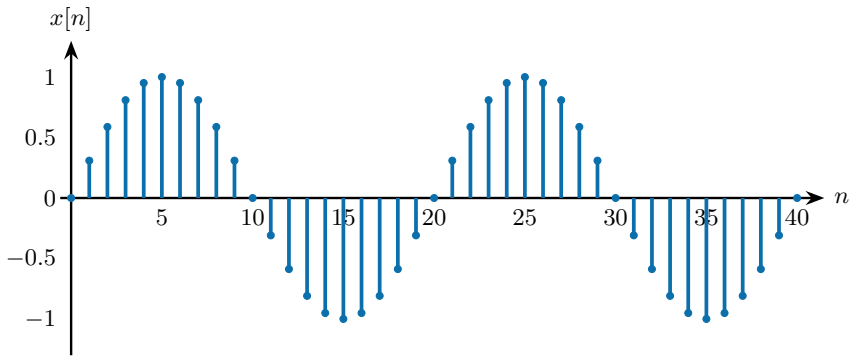
sis.dijagram(n, g, tip='uzorci',
             naslov='$g[n]$', ylim=(-1, 11))
```



3.2.5 Sinusna sekvenca

Sinusna sekvenca (slika 3.6.) predstavlja se diskretnim sinusnim ili kosinusnim nizom definiranim za svako cjelobrojno n:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi) \tag{3.20}$$



Slika 3.6: Sinusna sekvenca (period $N = 20$).

gdje se ω_0, prema analogiji sa kontinualnim signalima, naziva *radijan frekvencijom* diskretne sinusoide, a φ fazom.

Između vremenski kontinualne i vremenski diskretne sinusoide postoji nekoliko značajnih razlika. Prvo, kružna frekvencija vremenski kontinualne sinusoide je fizička veličina, čija je dimenzija [rad/s]. Radijan frekvencija diskretne sinusoide je neimenovan broj, jer argument sinusne funkcije mora biti bezdimenzionalan, a redni broj uzorka n je također bezdimenzionalna veličina. Druga važna razlika vremenski kontinualne i diskretne sinusoide može se uočiti ako se uporede dvije sekvence $x_1[n]$ i $x_2[n]$ sa radijan frekvencijama ω i $(\omega_0 + 2\pi)$ respektivno. Pošto je:

$$x_2[n] = A\cos\left[(\omega_0 + 2\pi)\, n + \varphi\right] = A\cos\left[\omega_0 n + 2\pi n + \varphi\right] = A\cos\left(\omega_0 n + \varphi\right) = x_1[n] \tag{3.21}$$

to znači da dvije vremenski diskretne sinusoide, čije se radijan frekvencije razlikuju za 2π, imaju identične uzorke. Ova osobina se može generalizirati, tako da se može reći da su vremenski diskretne sinusoide, čije su radijan frekvencije $(\omega_0 + 2\pi m)$, gdje je m cijeli pozitivan broj, identične. To znači da je potrebno razmatrati samo radijan frekvencije u intervalu $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ ili $-\pi < \omega_0 \leq \pi$. Ova osobina ne važi za kontinualne vremenske signale.

Nadalje, sinusna sekvenca ima veoma važnu osobinu bitnu za izvođenje Fourierove transformacije diskretnih signala, a to je periodičnost. Međutim, definicije periodičnosti diskretnih i kontinualnih signala se razlikuju. Kod kontinualnih signala period se može jednostavno odrediti kao količnik 2π i kružne frekvencije, dok za diskretni signal taj količnik može biti necjelobrojan, a period diskretnih signala ne može biti necjelobrojan. Naime, diskretni signal je periodički ako je zadovoljena relacija:

$$x[n] = x[n + N] \tag{3.22}$$

gdje je N cijeli pozitivan broj koji označava period ponavljanja diskretnog periodičkog signala. Ako se u relaciju (3.20) umjesto n uvrsti $n + N$, dobit će se:

$$x[n + N] = A\cos\left(\omega_0 n + \omega_0 N + \varphi\right)$$

Da bi relacija (3.22) bila zadovoljena, u općem slučaju treba da je:

$$\omega_0 N = 2\pi m \quad \text{odnosno} \quad \omega_0 = \frac{2\pi m}{N} \tag{3.23}$$

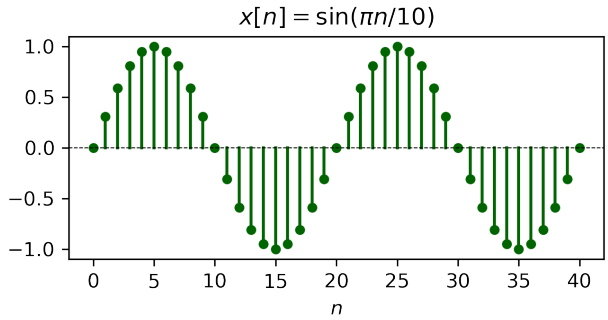
gdje je m cijeli pozitivan broj. To znači da je diskretni sinusni signal periodički ako je kružna frekvencija ω_0 umnožak konstante 2π i nekog racionalnog broja prema relaciji (3.23).

Primjer diskretnog sinusnog signala sa periodom $N = 20$ je dat na slici 3.6. U Pythonu se može implementirati kodom 3.5.

Programski kod 3.5

```
n = np.arange(0, 41)
s = np.sin(np.pi * n / 10)

sis.dijagram(n, s,
             tip='uzorci', naslov=r'$x[n]=\sin(\pi n/10)$')
```



Ako se pođe od vremenski kontinualnog signala:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi) \tag{3.24}$$

i uzorkovanjem sintetizira ekvivalentni vremenski diskretan signal:

$$x[n] = x(nT_s) = A\cos(2\pi f_0 n T_s + \varphi) = A\cos(2\pi F_0 n + \varphi) \tag{3.25}$$

može se primijetiti da se frekvencija uzorkovanja F_0, za koju je zadržana osobina periodičnosti signala (3.24), dobije iz:

$$F_0 = f_0 T_s = \frac{f_0}{f_s} = \frac{m}{N} \Rightarrow f_s = \frac{N}{m} f_0 \Rightarrow T_s = \frac{m}{N} T_0 \tag{3.26}$$

Iz relacije (3.26) slijedi još jedan zaključak. Diskretizacijom neke vremenski kontinualne sinusoide, mogu se dobiti vremenski diskretne periodičke sinusoide različitih frekvencija. Takvih vremenski diskretnih periodičkih sinusoida ima tačno N, jer se samo za $1 \leq m \leq N$, u procesu uzorkovanja dobiju različiti diskretni signali.

Primjer 3.2:

Za signal $x[n] = 7\sin[6\pi n/17]$ odrediti fundamentalni period.

Rješenje:
Diskretni signal $x[n]$ ima kružnu frekvenciju $\omega_0 = 6\pi/17 = 2\pi m/N$. Kako N mora biti cijeli pozitivan broj, to je moguće samo ako je $m = 3, 6, 9\ldots$, i onda je signal periodički s periodom:

$$N = \frac{17 \cdot 2\pi m}{6\pi} = 17 \cdot \frac{m}{3}$$

Periodi mogu biti $N = 17, 34, 51\ldots$ Osnovni (fundamentalni) period je $N = 17$.

Primjer 3.3:

Odrediti period diskretnih signala: $x_1[n] = 2\sin[7\pi n]$ i $x_2[n] = \sqrt{3}\cos[7\pi n]$ i period signala $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$.

Rješenje:
Za signale $x_1[n]$ i $x_2[n]$ kružna frekvencija je $\omega_0 = 7\pi$, a fundamentalni period je:

$$N = \frac{2\pi m}{\omega_0} = \frac{2\pi m}{7\pi}$$

Da bi signali $x_1[n]$ i $x_2[n]$ bili periodički, N mora biti cijeli pozitivan broj. To je moguće samo ako je $m = 7, 14, 21\ldots$, što daje $N = 2, 4, 6\ldots$ Period signala $y[n]$, u ovom slučaju, jednak je periodu signala $x_1[n]$ i $x_2[n]$.

3.2.6 Kompleksna eksponencijalna sekvenca

Kompleksna eksponencijalna sekvenca, u općem obliku, se može napisati kao:

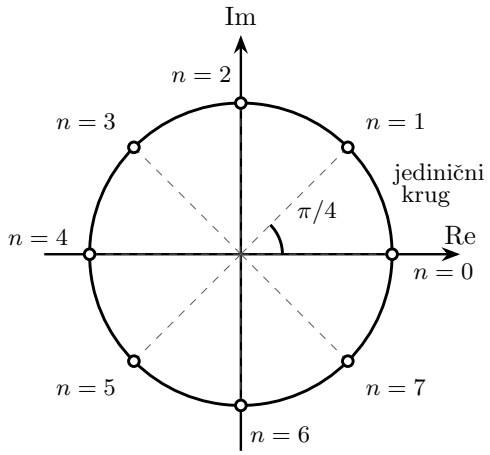
$$x[n] = Ae^{j(\omega_0 n+\varphi)} \tag{3.27}$$

Realni i imaginarni dio kompleksne eksponencijalne sekvence su kosinusna i sinusna sekvenca:

$$Ae^{j(\omega_0 n+\varphi)} = A\cos(\omega_0 n + \varphi) + jA\sin(\omega_0 n + \varphi) \tag{3.28}$$

Definicija periodičnosti data relacijom (3.22) važi i za kompleksne sekvence. Prema tome, za periodičnost kompleksne eksponencijalne sekvence važe isti uslovi koji važe za kosinusne i sinusne sekvence koje su njen realni i imaginarni dio. Sekvenca data relacijom (3.27) može se napisati i u obliku:

$$\begin{aligned} Ae^{j(\omega_0 n+\varphi)} &= Ae^{j\varphi}e^{j\omega_0 n} = Be^{j\omega_0 n} = B\cos(\omega_0 n) + jB\sin(\omega_0 n) \\ &= \mathrm{Re}\left\{Be^{j\omega_0 n}\right\} + j\,\mathrm{Im}\left\{Be^{j\omega_0 n}\right\} \end{aligned} \tag{3.29}$$



Slika 3.7: Kompleksna ravan sa osam uniformno raspoređenih tačaka po jediničnom krugu.

Dakle:

$$A\cos(\omega_0 n + \varphi) = \mathrm{Re}\left\{Be^{j\omega_0 n}\right\}, \quad A\sin(\omega_0 n + \varphi) = \mathrm{Im}\left\{Be^{j\omega_0 n}\right\} \tag{3.30}$$

Za eksponencijalnu sekvencu $e^{j\omega_0 n}$ sa $\omega_0 = \pi/4$ i $n = 0, 1, \ldots 7$, na slici 3.7. data je kompleksna ravan sa osam uniformno raspoređenih tačaka po jediničnom krugu. Projekcije svake od vrijednosti na realnu i imaginarnu osu su:

$$\cos(\omega_0 n) = \cos(\pi n/4), \quad \sin(\omega_0 n) = \sin(\pi n/4)$$

Primjer 3.4:

Da li je signal $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ periodički?

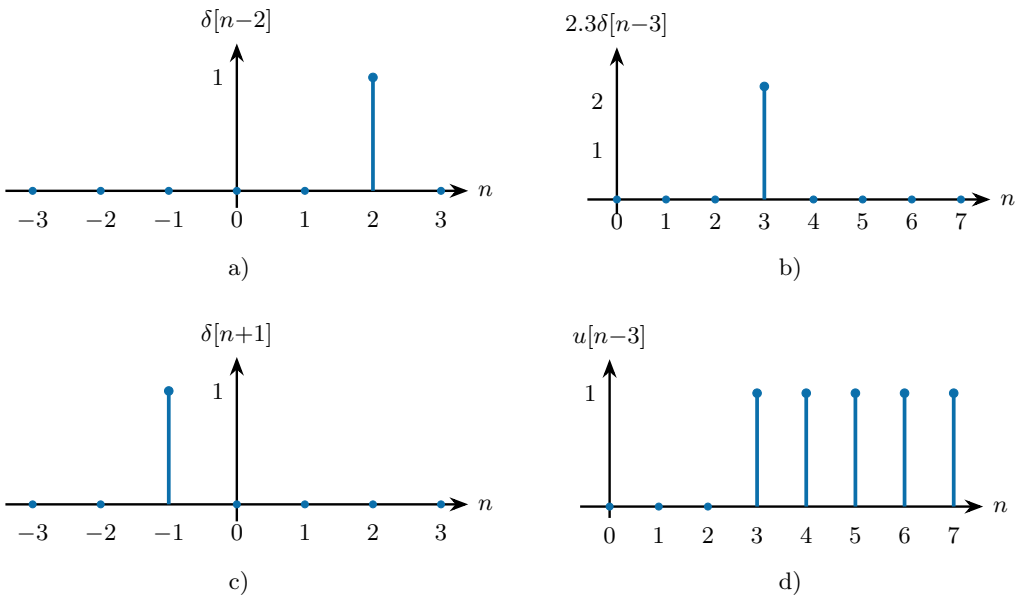
Rješenje:
Diskretni signal je periodički s periodom N, ako zadovoljava relaciju (3.22), odnosno ako je $x[n] = x[n+N]$, a ω_0 zadovoljava relaciju (3.23) ili:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

gdje su m i N cijeli pozitivni brojevi. Na osnovu relacije (3.22) je:

$$x[n+N] = e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}e^{j\omega_0 N} = e^{j\omega_0 n}\cdot 1 = x[n]$$

jer je $e^{j2\pi\cdot\frac{m}{N}\cdot N} = 1$. Dakle, pošto važi relacija (3.22), dati signal je periodički.



Slika 3.8: Signali iz primjera 3.5.

3.3 Transformacija nezavisno promjenljive diskretnih signala

3.3.1 Vremenski pomak

Proizvoljni diskretni signal $f[n]$ može se pomjeriti udesno ili ulijevo, u odnosu na diskretno vrijeme n. Tako je $f[n-k]$ diskretni signal koji je pomaknut za k udesno ako je k pozitivno, odnosno ulijevo ako je k negativno. U prvom slučaju se kaže da je sekvenca zakasnila, a u drugom da je sekvenca isprednjačila.

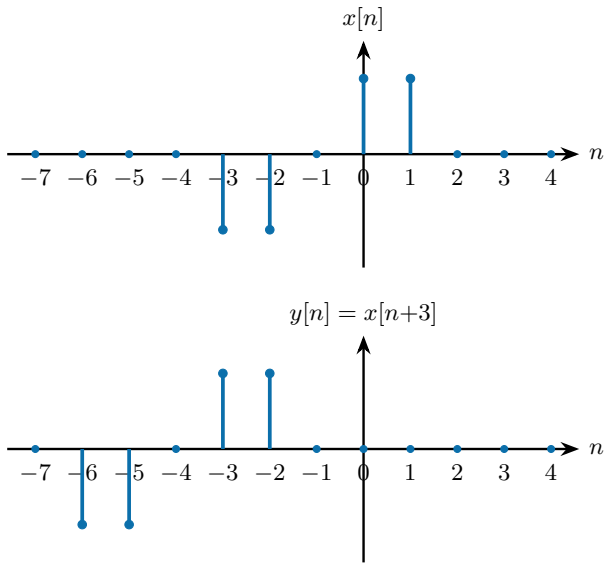
Primjer 3.5:

a) Nacrtati sekvencu $\delta[n-2]$ i napisati je preko jediničnih pomaknutih sekvenci.
b) Nacrtati diskretne signale: $\delta[n-2]$, $2.3\delta[n-3]$, $\delta[n+1]$ i $u[n-3]$.

Rješenje:
a) Sekvenca $\delta[n-2]$ je zakašnjela delta sekvenca i prikazana je na slici 3.8.a. Sekvenca $\delta[n-2]$ može se napisati preko pomaknutih jediničnih sekvenci na slijedeći način:

$$\delta[n-2] = u[n-2] - u[n-3]$$

b) Diskretni signal $\delta[n-2]$ je zakašnjela delta sekvenca za $k=2$, amplitude jednake jedinici, dok je $2.3\delta[n-3]$ zakašnjela delta sekvenca amplitude 2.3 za diskretno vrijeme



Slika 3.9: Signali iz primjera 3.6.

$n = 3$. Signal $\delta[n+1]$ je isprednjačena delta sekvenca jednaka jedan za $n = -1$. Sekvenca $u[n-3]$ je zakašnjela jedinična sekvenca koja je jednaka nuli za $n < 3$, a jednaka jedan za $n \geq 3$ (slika 3.8.).

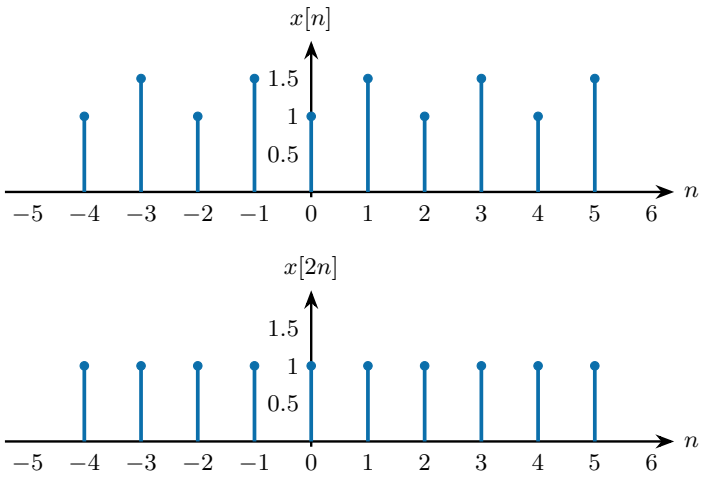
Primjer 3.6:

Nacrtati diskretni signal $y[n] = x[n+3]$, ako je diskretni signal $x[n]$ zadat na slijedeći način:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ -1, & n = -3, -2 \\ 0, & n \leq -3 \wedge n = -1 \wedge n \geq 2 \end{cases} \tag{3.31}$$

Rješenje:
Na slici 3.9. prikazan je signal $x[n]$ i pomjereni signal $y[n] = x[n+3]$, koji predstavlja isprednjačeni signal $x[n]$.

$$y[n] = \begin{cases} 1, & n = -3, -2 \\ -1, & n = -6, -5 \\ 0, & n \leq -6 \wedge n = -4 \wedge n \geq -2 \end{cases} \tag{3.32}$$



Slika 3.10: Vremensko skaliranje diskretnog signala (primjer 3.7).

3.3.2 Vremensko skaliranje

Za sekvencu $y[n]$ se kaže da je dobivena vremenskim skaliranjem sekvence $x[n]$ koeficijentom k ako vrijedi:

$$y[n] = x[kn] \tag{3.33}$$

Za razliku od vremenskog skaliranja kontinualnih signala, pri vremenskom skaliranju diskretnih sekvenci se može desiti da skalirani vremenski indeksi padnu na necjelobrojne vrijednosti diskretnog vremena, pa se time vrijednosti diskretnog signala $x[n]$ nepovratno gube.

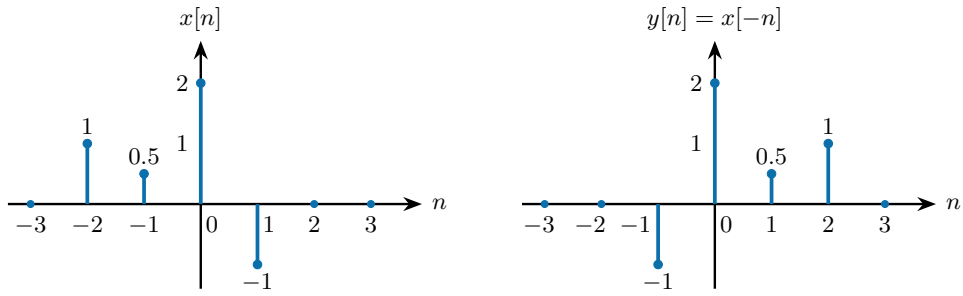
Primjer 3.7:

Diskretni signal $x[n]$ prikazan je na slici 3.10. Nacrtati signal $y[n] = x[2n]$.

Rješenje:
Kako je $k = 2$ uzorci $x[n]$ za $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \ldots$, će biti izgubljeni, jer stavljanjem $k = 2$ u $x[kn]$, neparni uzorci se gube, što se vidi na slici 3.10.

3.3.3 Refleksija

Ako je zadat diskretni signal $x[n]$, onda signal dobiven kada se diskretno vrijeme n zamijeni diskretnim vremenom $-n$, predstavlja reflektovanu verziju $x[n]$ oko ose $n = 0$. Primjer jednog diskretnog signala $x[n]$ i njegovog reflektovanog signala $y[n] = x[-n]$ predstavljen je na slici 3.11.



Slika 3.11: Primjer diskretnog signala i reflektovanog signala.

Primjer 3.8:

Neka su diskretni signali $x_1[n]$ i $x_2[n]$ zadati na slijedeći način:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -1, & n = -1, \\ 0, & n = 0 \wedge |n| > 1 \end{cases} \qquad x_2[n] = \begin{cases} 1, & n = -1 \wedge n = 1 \\ 0, & n = 0 \wedge |n| > 1 \end{cases}$$

Odrediti analitički izraz za signale:

$$y_1[n] = x_1[n] + x_1[-n]$$
$$y_2[n] = x_2[n] + x_2[-n].$$

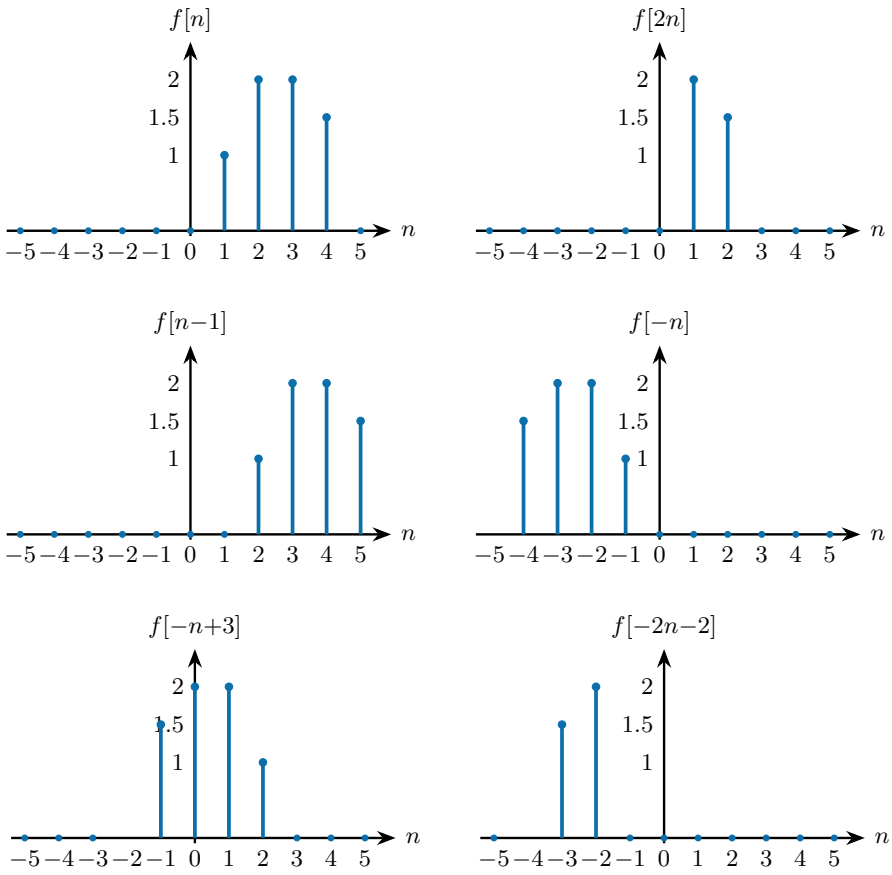
Rješenje:

$$y_1[n] = 0, \text{ za svako cjelobrojno } n.$$
$$y_2[n] = \begin{cases} 2, & n = -1 \wedge n = 1 \\ 0, & n = 0 \wedge |n| > 1 \end{cases}$$

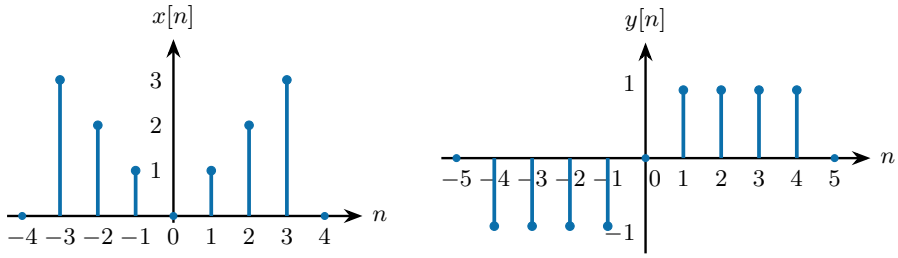
Primjer 3.9:

Diskretni signal $f[n]$ prikazan je na slici 3.12.a.
a) Nacrtati signale: $f[2n]$, $f[n-1]$, $f[-n]$, $f[-n+3]$ i $f[-2n-2]$.
b) Tabelarno odrediti vrijednosti traženih signala u diskretnim vremenskim trenucima.

Rješenje:
a) Diskretni signali, dobijeni transformacijom nezavisno promjenljive (vremenskim pomjeranjem, vremenskim skaliranjem i refleksijom) prikazani su na slici 3.12.



Slika 3.12: Diskretni signali iz primjera 3.9.



Slika 3.13: Diskretni signali iz primjera 3.10.

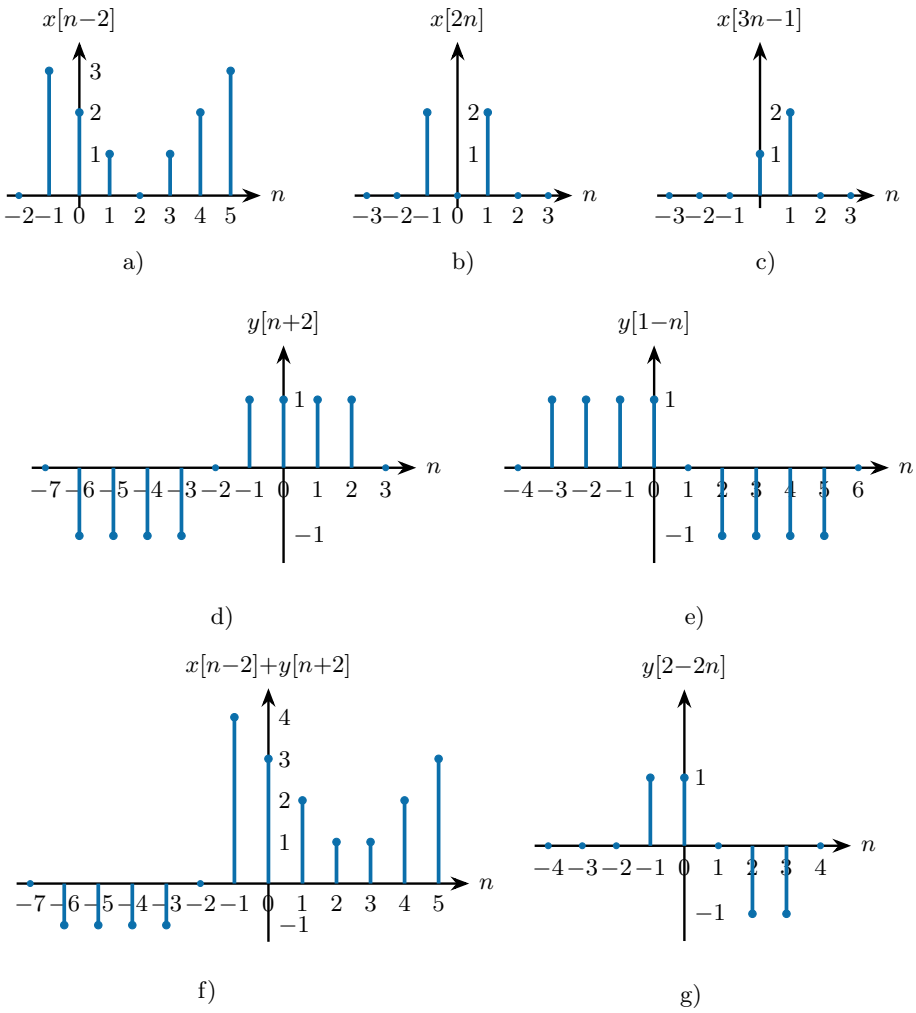
b) Uvrštavajući diskretno vrijeme n u zadate zavisnosti, dolazi se do odgovarajućih vrijednosti sekvenci u svakom od diskretnih trenutaka, što je pokazano u tabeli:

n	$f[n]$	$f[2n]$	$f[n-1]$	$f[-n]$	$f[-n+3]$]	$f[-2n-2]$
-4	0	0	0	f(4) = 1.5	0	0
-3	0	0	0	f(3) = 2	0	f(4) = 1.5
-2	0	0	0	f(2) = 2	0	f(2) = 2
-1	0	0	0	f(1) = 1	f(4) = 1.5	0
0	0	0	0	0	f(3) = 2	0
1	1	f(2) = 2	0	0	f(2) = 2	0
2	2	f(4) = 1.5	f(1) = 1	0	f(1) = 1	0
3	2	0	f(2) = 2	0	0	0
4	1.5	0	f(3) = 2	0	0	0
5	0	0	$f(4) = 1.5$	0	0	0

Primjer 3.10:

Diskretni signali $x[n]$ i $y[n]$ prikazani su na slici 3.13. Nacrtati slijedeće signale:
a) $x[n-2]$
b) $x[2n]$
c) $x[3n-1]$
d) $y[n+2]$
e) $y[1-n]$
f) $x[n-2]+y[n+2]$
g) $y[2-2n]$

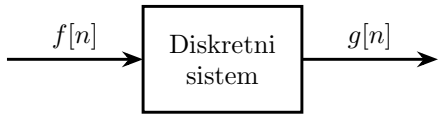
Rješenje:
Pri crtanju traženih diskretnih signala treba poštovati određeni redoslijed. U tom smislu diskretni signal treba prvo pomaknuti udesno ili ulijevo, zavisno od vrijednosti k, zatim izvršiti vremensko skaliranje i na kraju nacrtati reflektirani signal ako je diskretno vrijeme negativno (slika 3.14). Ukoliko je signal amplitudno skaliran, ta osobina se može primjeniti na kraju.



Slika 3.14: Diskretni signali dobiveni pomakom, skaliranjem i refleksijom signala sa slike 3.13 (primjer 3.10).

3.4 Diskretni sistemi

Diskretni sistem je sistem kod koga su svi signali vremenski diskretni. Tako diskretni sistem (slika 3.15.) definira pravilo po kome se sekvenci $f[n]$, koja se nazva ulaz u sistem (engl. *system input*), pripisuje druga sekvenca $g[n]$, koja se nazva izlaz iz sistema (engl. *system output*) ili odziv (engl. *response*). Za analizu diskretnih sistema može se koristiti vremenski ili frekventni domen. Za opis sistema u vremenskom domenu može se koristiti impulsni odziv ili diferentne jednačine. Diskretni signali i sistemi u frekventnom domenu obrađeni su u devetom poglavlju ove knjige.



Slika 3.15: Diskretni sistem.

Diskretni sistem preslikava (transformiše) sekvencu $f[n]$ u sekvencu $g[n]$. Ovo se obilježava sa:

$$g[n] = S\{f[n]\} \tag{3.34}$$

gdje operator S definira transformaciju signala pri propagaciji kroz sistem.

3.4.1 Osobine diskretnih sistema

Ekvivalencija - Za dva sistema se kaže da su ista, ako za iste ulazne sekvence daju iste izlazne sekvence, odnosno ako je $f_1[n] = f_2[n]$, onda je $g_1[n] = g_2[n]$.

Homogenost - sistem je homogen ako promjena ulaznog signala u sistem $f[n]$ za "a" puta, daje promjenu izlaznog signala za "a" puta. Ta osobina se zapisuje na slijedeći način:

$$f[n] \xrightarrow{s} g[n] \implies af[n] \xrightarrow{s} ag[n] \tag{3.35}$$

Primjer homogenog sistema je sistem zadat relacijom: $g[n] = 5f[n]$, dok je nehomogeni sistem $g[n] = 5f^2[n]$.

Linearnost - Klasa linearnih sistema definira se po principu superpozicije. Ako su $g_1[n]$ i $g_2[n]$ odzivi sistema čiji su ulazi $f_1[n]$ i $f_2[n]$ respektivno, sistem je linearan onda i samo onda ako važe relacije:

$$L\{f_1[n] + f_2[n]\} = L\{f_1[n]\} + L\{f_2[n]\} = g_1[n] + g_2[n] \tag{3.36}$$

$$L\{af[n]\} = aL\{f[n]\} = ag[n] \tag{3.37}$$

gdje je a bilo koja realna onstanta. Osobina (3.36) se naziva osobinom sumiranja, a osobina (3.37) osobinom skaliranja. Obje ove osobine mogu se kombinirati po principu superpozicije u relaciju:

$$L\{a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]\} = a_1 L\{f_1[n]\} + a_2 L\{f_2[n]\} \tag{3.38}$$

za bilo koje sekvence $f_1[n]$ i $f_2[n]$ i za bilo koje konstante a_1 i a_2. Relaciju (3.38) se može generalizirati za superpoziciju više ulaza. Ako je ulaz u diskretni sistem:

$$f[n] = \sum_{(k)} a_k f_k[n] \tag{3.39}$$

izlaz linearnog sistema će biti:

$$g[n] = \sum_{(k)} a_k g_k[n] \tag{3.40}$$

gdje su $g_k[n]$ odzivi sistema na ulaze $f_k[n]$. Primjeri linearnih sistema su:

$$\begin{aligned} g[n] &= af[n] \qquad \text{(pojačalo sa pojačanjem } a\text{)} \\ g[n] &= f[n-1] \quad \text{(element kašnjenja).} \end{aligned}$$

Linearnost za blok kašnjenja se dokazuje na slijedeći način:

$$\begin{aligned} &L\{f_1[n]\} = f_1[n-1] = g_1[n], \quad L\{f_2[n]\} = f_2[n-1] = g_2[n] \\ &f[n] = a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n] \end{aligned}$$

pa slijedi:

$$\begin{aligned} g[n] = L\{f[n]\} &= a_1 f_1[n-1] + a_2 f_2[n-1] \\ &= a_1 g_1[n] + a_2 g_2[n] \\ &= a_1 L\{f_1[n]\} + a_2 L\{f_2[n]\} \end{aligned}$$

Dakle, ako je ulaz linearna kombinacija dva ulaza $f[n] = a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]$, a sistem je zadat kao $g[n] = f[n-1]$, onda se odziv sistema može napisati kao linearna kombinacija odziva na ulaze $f_1[n]$ i $f_2[n]$.
Nelinearan sistem je sistem koji ne zadovoljava relaciju (3.38). Npr. nelinearan je sistem definiran relacijom:

$$g[n] = \log_{10}(f[n])$$

Ako je $f_1[n] = 1$ i $f_2[n] = 10$, odziv na ulaz $f_1[n]$ je $g_1[n] = \log_{10} 1 = 0$, a odziv na ulaz $f_2[n]$ je $g_2[n] = \log_{10} 10 = 1$. Osobina skaliranja (3.37) linearnih sistema zahtijeva da ako za ulaze vrijedi zavisnost $f_2[n] = 10 f_1[n]$, onda i za izlaze treba da vrijedi zavisnost $g_2[n] = 10 g_1[n]$. Kako to nije zadovoljeno, sistem je nelinearan.

Trenutnost - Sistem se naziva trenutnim, bezinercijalnim ili bez memorije ako se za određivanje $g(n)$ (pri svakom n) koriste samo sadašnje vrijednosti $f(n)$. Primjeri trenutnih sistema su:

$$g[n] = f^2[n], \quad g[n] = nf[n], \quad g[n] = af[n].$$

Invarijantnost po pomaku - Sistem je vremenski nezavisan, invarijantan na pomak (engl. *Time Invariant*) ili stacionaran ako zadovoljava uslov:

$$L\{f[n-k]\} = g[n-k] \tag{3.41}$$

za sve vrijednosti n i k. Npr. sistem za kašnjenje je stacionaran sistem:

$$L\{f[n]\} = f[n-1] = g[n]$$

Pravilo kaže da se $g[n]$ dobije kada se n zamijeni sa $n-k$. Na osnovu toga se nalazi:

$$L\{f[n-k]\} = f[n-k-1] = g[n-k]$$

Sistem je vremenski invarijantan ako pomak ulaza daje isti takav pomak izlaza, pri čemu se oblik izlaza ne mijenja. Reakcija sistema na ulaz ne zavisi od diskretnog vremena. Važno je primijetiti da kada se diskretno vrijeme n eksplicitno pojavljuje u pravilu koje

definira sistem, onda je sistem vremenski zavisan ili nestacionaran (engl. *Time Variant*). Npr. sistem

$$g_1[n] = nf[n]$$

je nestacionaran, što se može jednostavno pokazati. Pravilo za sistem $g_1[n] = nf[n]$ kaže da vrijednost ulaza treba pomnožiti sa diskretnim vremenom. Na osnovu relacije za stacionarnost (3.41) trebalo bi da je:

$$L\{f[n-k]\} = nf[n-k]$$

Međutim, kako ta relacija nije zadovoljena:

$$g_1[n-k] = (n-k)f[n-k] \neq nf[n-k]$$

sistem je nestacionaran.

Kauzalnost - Kauzalan ili uzročan sistem je onaj koji za formiranje sekvence $g[n]$ koristi samo sadašnju i/ili prethodne vrijednosti ulaznog i/ili izlaznog signala (a ne i buduće). Ako se ulaz posmatra kao uzrok, a izlaz kao posljedica, ulaz treba da prethodi izlazu. Npr. kauzalni sistemi su:

$$g[n] = f[n-2], \quad g[n] = 2nf[n-1]$$
$$y[n] = \frac{1}{3}\{y[n-1] + x[n] + x[n-1]\}$$

Nekauzalni ili anticipativni (predviđajući) sistemi su oni koji za formiranje izlaznog signala koriste i buduće vrijednosti ulaza. Ovakve sisteme nije moguće realizirati, jer kod njih posljedica (odziv) nastupa prije uzroka (ulaza), međutim oni mogu biti korisni za formiranje matematičkih modela za procjenu ponašanja sistema u budućnosti. Sa njima se nikada ne modelira fizički ostvariv proces. Npr. nekauzalni sistemi su:

$$g[n] = f[n+3], \quad g[n] = f[n+1], \quad g[n] = 2f[n-3] + f[n+1]$$
$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n+1] + x[n] + x[n-1]\}$$

Konačna memorija - Specijalan slučaj kauzalnih sistema su sistemi sa konačnom memorijom. Kod njih je za formiranje sadašnje vrijednosti izlaza potreban samo konačan broj vrijednosti ulaza, tj. sistem mora da "pamti" samo konačan broj vrijednosti. Npr. neka je ulaz u diskretni sistem delta sekvenca i neka je sistem zadat kao:

$$g[n] = f[n-k], \quad k > 0$$

Za $k = 2$ odziv diskretnog sistema $g[n]$ je:

$$g[n] = f[n-2]$$

Ovaj sistem se naziva sistem za kašnjenje i na izlazu daje tačnu repliku ulazne sekvence $f[n]$ zakašnjele za $k = 2$. Memorija je konačna, jer za formiranje izlazne sekvence treba pamtiti samo k prethodnih vrijednosti ulazne sekvence.

Drugi primjer dinamičkog sistema je diskretni sistem koji na izlazu formira trenutnu vrijednost sekvence koristeći sadašnju i četiri prethodne vrijednosti ulaza i određuje njihovu prosječnu vrijednost:

$$g(n) = \frac{\sum_{k=0}^{4} f(n-k)}{5} = \frac{1}{5}\{f(n) + f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4)\} \quad (3.42)$$

Ovaj sistem na izlazu daje srednju vrijednost pet posljednjih vrijednosti ulaza. Ako se pak izlazni signal formira na sljedeći način:

$$g(n) = \frac{0,7 \cdot f(n-3) + 0,8 \cdot f(n-2) + 0,9 \cdot f(n-1) + f(n)}{3,4}$$

može se primijetiti da je koeficijent u nazivniku suma koeficijenata uz $f(n-k)$. Ovaj sistem također računa srednju vrijednost ulaznog signala, ali pretpostavlja da je uticaj starijih vrijednosti ulaza manji, što se ogleda i u manjim vrijednostima koeficijenta s kojima se množe odgovarajući uzorci. U općem slučaju sistemi ovoga tipa imaju oblik:

$$g[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k f[n-k] \tag{3.43}$$

Kod ovakvih sistema zadovoljen je uslov:

$$\sum_{k=0}^{M} b_k = 1, \quad b_k \geq 0 \tag{3.44}$$

Sistemi opisani relacijom (3.43) nazivaju se sistemi sa pokretnom srednjom vrijednošću ili MA sistemi (engl. *Moving Average Systems*), a predstavljaju sisteme sa konačnim impulsnim odzivom (engl. *Finite Impulse Response - FIR*).

Dinamičnost - Slično kao i kod kontinualnih sistema, opis linearnih diskretnih dinamičkih sistema može se generalizirati relacijom:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k g[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k f[n-k] \tag{3.45}$$

gdje je $f[n]$ ulaz u sistem, $g[n]$ izlaz sistema, a a_k i b_k su realni konstantni koeficijenti. Relacija (3.45) predstavlja diferentnu jednačinu koja opisuje linearan vremenski invarijantan diskretni sistem. Diferentna jednačina je analogna diferencijalnoj jednačini za sistem s kontinualnim vremenom. Za kauzalne sisteme diferentna jednačina dovodi u vezu sadašnju vrijednost izlaza i njegove prethodne vrijednosti, sa sadašnjom i prethodnim vrijednostima ulaza. Diferentnim jednačinama može se opisati svaki diskretni (linearni) dinamički sistem.

Red diferentne jednačine (3.45) je (N, M). Najčešće je $N \geq M$, tako da se red diferentne jednačine određuje samo sa N. Diferentna jednačina data relacijom (3.45) može se napisati u obliku:

$$g[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k f[n-k] - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{N} a_k g[n-k] \tag{3.46}$$

čime se dobiva rekurzivna formula za računanje sadašnje vrijednosti izlaza u funkciji sadašnje i prethodnih vrijednosti ulaza i prethodnih vrijednosti izlaza. Takav sistem je kauzalan za $N \geq M$. Međutim, da bi se mogao odrediti izlaz počev od nekog diskretnog trenutka n, treba poznavati određeni broj prethodnih vrijednosti izlaza koje se nazivaju

početni uslovi. Broj početnih uslova zavisi od reda diferentne jednačine. Tako, u općem slučaju, za rješavanje diferentne jednačine polazi se od $n = 0$ i ako je red jednačine N, potrebno je N početnih uslova:

$$g(-N), g(-N+1), \ldots, g(-1)$$

Kod diskretnih sistema početni uslovi nose sve informacije o prethodnom ponašanju sistema koje ima uticaja na buduće izlaze.

Sistemi opisani relacijom (3.45) nazivaju se ARMA sistemi (engl. *Auto Regressive Moving Average*), odnosno odgovaraju sistemima sa beskonačnim impulsnim odzivom (engl. *Infinite Impulse Response - IIR*).

Stabilnost - Za diskretni sistem se kaže da je stabilan u smislu BIBO stabilnosti ako i samo ako ograničeni ulaz daje ograničen izlaz (engl. *if Bounded Input then Bounded Output*), ili drugačije rečeno ako ulaz ne divergira ni izlaz ne divergira. Ulazni signal je ograničen ako zadovoljava uslov:

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad (\forall n) \tag{3.47}$$

Uslov stabilnosti zahtijeva da za svaku ulaznu sekvencu koja zadovoljava (3.47) postoji konačna pozitivna vrijednost B_y, takva da je:

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad (\forall n) \tag{3.48}$$

3.5 Diskretni LTI sistemi

Osobine diskretnih sistema definirane kao linearnost i vremenska invarijantnost, od posebne su važnosti za primjenu u procesiranju signala. Ako se osobina linearnosti kombinuje s diskretnim signalom predstavljenim kao linearna kombinacija zakašnjelih delta sekvenci (3.11), slijedi da se linearni sistem može okarakterizirati impulsnim odzivom.

3.5.1 Impulsni odziv

Neka je ulaz linearnog vremenski invarijantnog sistema (engl. *Linear time-invariant System - LTI*) delta sekvenca. Odziv na tu sekvencu obilježava se sa $h[n]$ i naziva se *impulsni odziv*.

$$h[n] = L\{\delta[n]\} \tag{3.49}$$

Odziv linearnog vremenski invarijantnog sistema na bilo koju ulaznu sekvencu može se dobiti pomoću impulsnog odziva.

3.5.2 Odziv diskretnog LTI sistema

Ako se $f[n]$ predstavi linearnom kombinacijom pomaknutih delta sekvenci, dobije se:

$$g[n] = L\{f[n]\} = L\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\delta[n-k]\right\} \tag{3.50}$$



Slika 3.16: Tipična reprezentacija linearnog i vremenski invarijantnog sistema.

Primjenom osobine linearnosti, izraz (3.50) dobija oblik:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)L\{\delta[n-k]\} \tag{3.51}$$

Kako je sistem vremenski invarijantan, na osnovu relacija (3.41) i (3.49) je:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)h[n-k] \tag{3.52}$$

Izraz (3.52) se naziva *konvoluciona suma.* Računanje konvolucione sume predstavlja dualnu operaciju nad sekvencama, jer se od dvije sekvence: sekvence $f[n]$, koja predstavlja ulaz, i sekvence $h[n]$, koja predstavlja impulsni odziv, dobija treća sekvenca, koja predstavlja izlaz $g[n]$ diskretnog sistema. Dakle, konvolucija opisuje interakciju ulaza i sistema, da bi se dobio izlaz. Generalno, izlaz iz sistema će biti zakašnjela i oslabljena ili pojačana verzija ulaza.

Operacija konvolucije skraćeno se obilježava zvjezdicom (*) između sekvenci. Tako je izlaz iz LTI sistema $g[n]$:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)h[n-k] = f[n] * h[n] \tag{3.53}$$

Na slici 3.16. prikazan je blok dijagram linearnog vremenski invarijantnog sistema čiji je ulaz sekvenca $f[n]$, impulsni odziv $h[n]$, a izlaz $g[n] = f[n] * h[n]$.

3.5.3 Osobine konvolucione sume

Komutativnost - Konvolucija je komutativna operacija, jer sekvence nad kojima se ona obavlja mogu međusobno zamijeniti mjesta:

$$\begin{aligned} g[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)h[n-k] \\ &= |n-k=m| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[n-m]h(m) \\ &= |m=k| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)f[n-k] \end{aligned} \tag{3.54}$$

Iz relacije (3.54) slijedi da se $g[n]$ može napisati u obliku:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)f[n-k] = h[n] * f[n] \tag{3.55}$$

Jedinični element za konvoluciju - Jedinični element za operaciju konvolucije je delta sekvenca:

$$\delta[n] * f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k)f[n-k] \tag{3.56}$$

Kako je $\delta(k) = 0$ za $k \neq 0$, u sumi datoj relacijom (3.56) ostaje samo član za $k = 0$, pa je:

$$\delta[n] * f[n] = f[n] \tag{3.57}$$

Konvolucija sa pomaknutom delta sekvencom - Konvolucija neke sekvence sa pomaknutom delta sekvencom ima za rezultat pomaknutu sekvencu:

$$\delta[n-r] * f[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k-r)f[n-k] \tag{3.58}$$

Kako je $\delta(k-r) = 0$ za $k \neq r$, ostaje samo jedan član sume, i to za $k = r$, pa se dobije:

$$\delta[n-r] * f[n] = f[n-r] \tag{3.59}$$

Promjena granica kod konvolucione sume - Konvoluciona suma nije pogodna za praktična izračunavanja jer sadrži beskonačan broj članova (3.52). Međutim, granice sumiranja kod konvolucione sume mogu da se promijene ako su $f[n]$, $h[n]$ ili obje sekvence nad kojima se konvolucija obavlja, kauzalne sekvence.

- Ako je ulaz $f[n]$ kauzalna sekvenca, tj. ako su vrijednosti $f(n) = 0$ za $n < 0$, odziv je:

$$g[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)f[n-k] \tag{3.60}$$

- Ako je impulsni odziv kauzalna sekvenca, tj. $h(n) = 0$ za $n < 0$, odziv je:

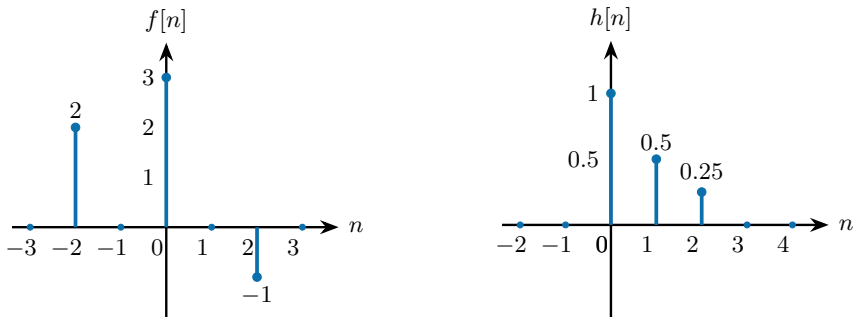
$$g[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)f[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} f(k)h[n-k] \tag{3.61}$$

- Ako su i ulaz i impulsni odziv kauzalne sekvence, tj. $f(n) = 0$ za $n < 0$, i $h(n) = 0$ za $n < 0$, odziv je:

$$g[n] = \sum_{k=0}^{n} f(k)h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h(k)f[n-k] \tag{3.62}$$

  Izraz (3.62) se takođe naziva konvoluciona suma. Ako su dužine sekvenci $f[n]$, $h[n]$ i $g[n]$ konačne i date sa N_f, N_h i N_g, respektivno, onda je dužina konvolucione sume $g[n]$ uvijek veća od dužine sekvenci $f[n]$ i $h[n]$, i jednaka je:

$$N_g = N_f + N_h - 1 \tag{3.63}$$



Slika 3.17: Ulazna sekvenca i impulsni odziv iz primjera 3.11.

Određivanje kauzalnosti - Korištenjem konvolucione sume se može pokazati da je linearan i stacionaran sistem istovremeno i kauzalan ako je impulsni odziv $h[n]$ kauzalna sekvenca. Tada je:

$$g[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) f[n-k] \tag{3.64}$$

Iz izraza (3.64) se vidi da su za formiranje sadašnje vrijednosti izlaza potrebne sadašnja i prethodne ($k > 0$) vrijednosti ulaza.

Za razliku od kontinualnih sistema, gdje konvolucioni integral ima samo teoretski značaj, kod diskretnih sistema konvoluciona suma ima veliku praktičnu primjenu. U nekoliko narednih primjera biće pokazanao kako se konvoluciona suma određuje analitički, grafički i Pythona.

Primjer 3.11:

Na slici 3.17. predstavljena je ulazna sekvenca $f[n]$ i impulsni odziv $h[n]$ sa po tri nenulta uzorka. Odrediti odziv sistema $g[n]$.

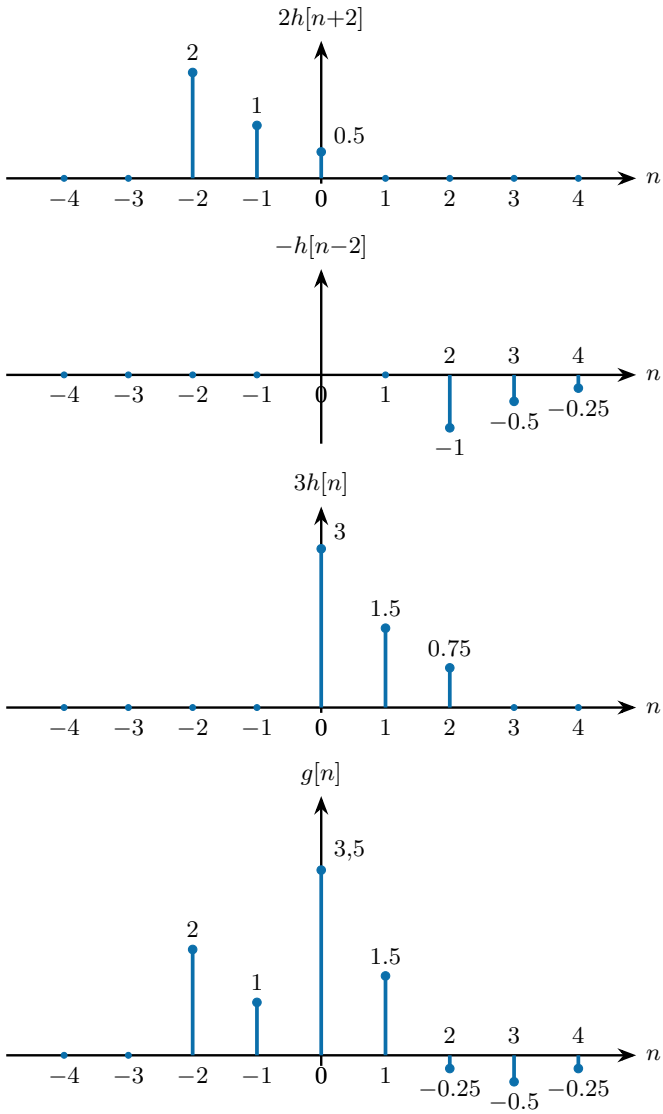
Rješenje:
Ulazna sekvenca $f[n]$ i impulsni odziv $h[n]$, na osnovu slike 3.17. mogu se napisati kao sume pomaknutih delta sekvenci:

$$f[n] = f(-2)\delta[n+2] + f(0)\delta[n] + f(2)\delta[n-2]$$
$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$$

Odziv sistema se dobije kao konvolucija ulaza i impulsnog odziva. Koristeći osobinu datu relacijom (3.59), slijedi da je:

$$g[n] = f[n] * h[n] = \{f(-2)\delta[n+2] + f(0)\delta[n] + f(2)\delta[n-2]\} * h[n] =$$
$$= f(-2)h[n+2] + f(0)h[n] + f(2)h[n-2] = 2h[n+2] + 3h[n] - h[n-2]$$

Dakle, odziv se može dobiti grafički, sumirajući pomaknute impulsne odzive, kao što je pokazano na slici 3.18.



Slika 3.18: Grafičko nalaženje konvolucije (primjer 3.11).

Odziv $g[n]$ se može naći i analitički. Kako je impulsni odziv $h[n]$ suma pomaknutih delta sekvenci:

$$h[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$$

onda se odziv sistema može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} g[n] &= 2h[n+2] + 3h[n] - h[n-2] \\ &= 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + 0.5\delta[n] + \\ &\quad + 3\delta[n] + 1.5\delta[n-1] + 0.75\delta[n-2] - \delta[n-2] - \\ &\quad - 0.5\delta[n-3] - 0.25\delta[n-4] \\ &= 2\delta[n+2] + \delta[n+1] + 3.5\delta[n] + 1.5\delta[n-1] - \\ &\quad - 0.25\delta[n-2] - 0.5\delta[n-3] - 0.25\delta[n-4] \end{aligned}$$

Rezultat je identičan rezultatu dobijenom grafički na slici 3.18. Broj uzoraka sekvence $g[n]$ je $N_g = 7$, što je u skladu s relacijom (3.63).

Primjer 3.12:

Odrediti odziv sistema koristeći konvoluciju ako je ulaz u sistem:

$$f[n] = u[n] - u[n-4]$$

a impulsni odziv sistema:

$$h[n] = 0.5^n u[n]$$

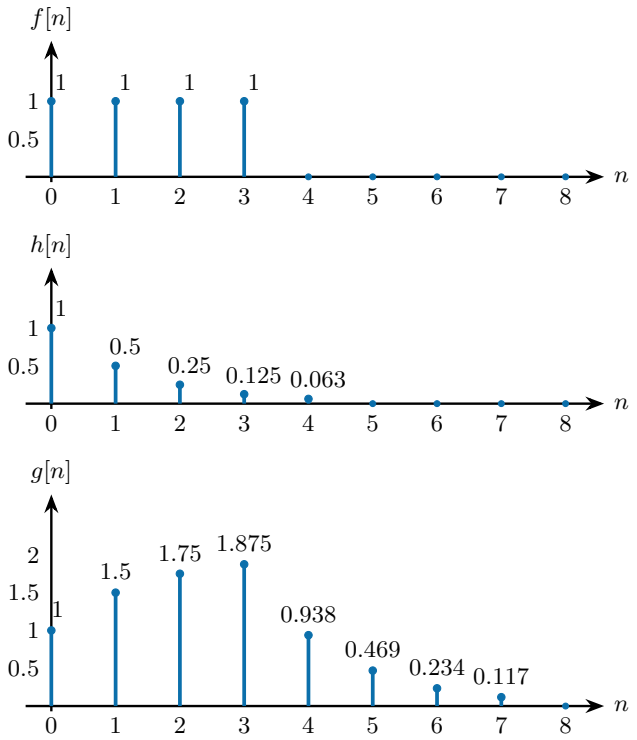
Rješenje:
Odziv sistema $g[n]$ dobije se predstavljajući ulaz $f[n]$ preko pomaknutih delta sekvenci, koje u konvoluciji sa impulsnim odzivom $h[n]$, na osnovu relacije (3.59), daju:

$$\begin{aligned} g[n] &= f[n] * h[n] \\ &= \{u[n] - u[n-4]\} * \{(0.5)^n u[n]\} \\ &= \{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]\} * \{(0.5)^n u[n]\} \\ &= 0.5^n u[n] + 0.5^{n-1} u[n-1] + 0.5^{n-2} u[n-2] + 0.5^{n-3} u[n-3] \end{aligned}$$

Vrijednosti $g(n)$ sekvence $g[n]$ određuju se na osnovu slijedeće relacije:

$$\begin{aligned} g[n] &= 0.5^n u[n] + 0.5^{n-1} u[n-1] + 0.5^{n-2} u[n-2] + 0.5^{n-3} u[n-3] \\ g(0) &= 1 \\ g(1) &= 0.5 + 1 = 1.5 \\ g(2) &= 0.25 + 0.5 + 1 = 1.75 \\ g(3) &= 0.125 + 0.25 + 0.5 + 1 = 1.875 \\ g(4) &= 0.0625 + 0.125 + 0.25 + 0.5 = 0.9375 \\ g(5) &= 0.03125 + 0.0625 + 0.125 + 0.25 = 0.46875 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Na slici 3.19 prikazani su ulaz, impulsni odziv i izlaz zadatog sistema.



Slika 3.19: Ulaz, impulsni odziv i izlaz sistema (primjer 3.12).

Primjer 3.13:

Koristeći programski paket Python naći konvoluciju diskretnih signala:

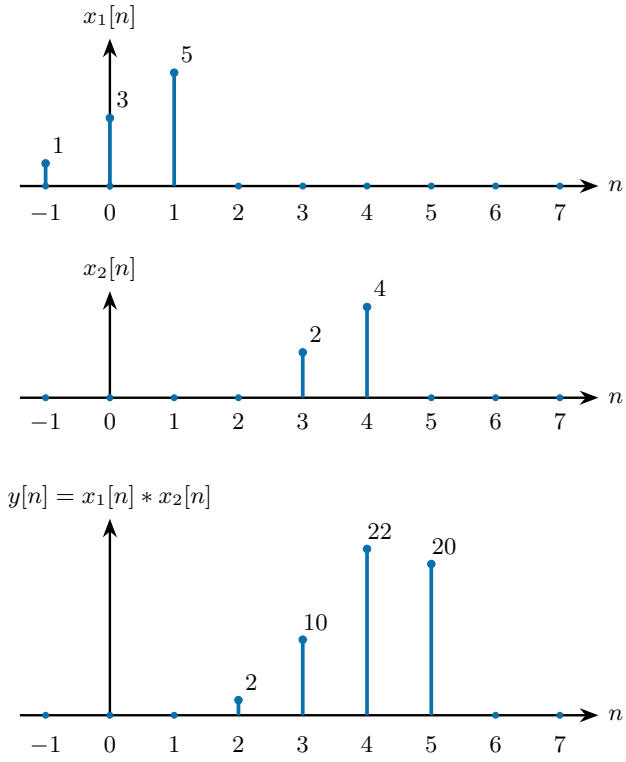
$$x_1[n] = \delta[n+1] + 3\delta[n] + 5\delta[n-1]$$
$$x_2[n] = 2\delta[n-3] + 4\delta[n-4]$$

Rješenje:
Konvolucija sekvenci $x_1[n]$ i $x_2[n]$ može se realizirati analitički i grafički. Na slici 3.20. prikazani su signali $x_1[n]$ i $x_2[n]$ i njihova konvolucija $y[n]$. Analitički oblik dobijene konvolucije je:

$$y[n] = 2\delta[n-2] + 10\delta[n-3] + 22\delta[n-4] + 20\delta[n-5]$$

Ukoliko se obavlja konvolucija u Pythonu, tada konvoluciona suma sekvenci s konačnom dužinom ima dužinu datu relacijom (3.63). Prilikom grafičkog predstavljanja, pogodno je sva tri signala posmatrati ne samo na istoj slici, nego i na istom inter-

valu diskretnog vremena n. To se postiže proširivanjem sekvenci nulama na zajednički interval, pri čemu se vremenska baza konvolucije $y[n]$ se automatski određuje iz vremenskih baza sekvenci $x_1[n]$ i $x_2[n]$.



Slika 3.20: Konvolucija diskretnih signala (primjer 3.13).

Programski kod 3.6

```
# definiranje sekvenci sa vremenskim bazama
n1 = np.arange(-1, 2)     # n1 = -1, 0, 1
x1 = np.array([1, 3, 5]) # x1[n] = delta[n+1] + 3*delta[n] + 5*delta[n-1]

n2 = np.arange(3, 5)      # n2 = 3, 4
x2 = np.array([2, 4])     # x2[n] = 2*delta[n-3] + 4*delta[n-4]

# konvolucija i odgovarajuca vremenska baza
y  = np.convolve(x1, x2)
ny = np.arange(n1[0] + n2[0], n1[-1] + n2[-1] + 1)

# zajednicki interval za prikaz
n_stem = np.arange(-1, 8)
```

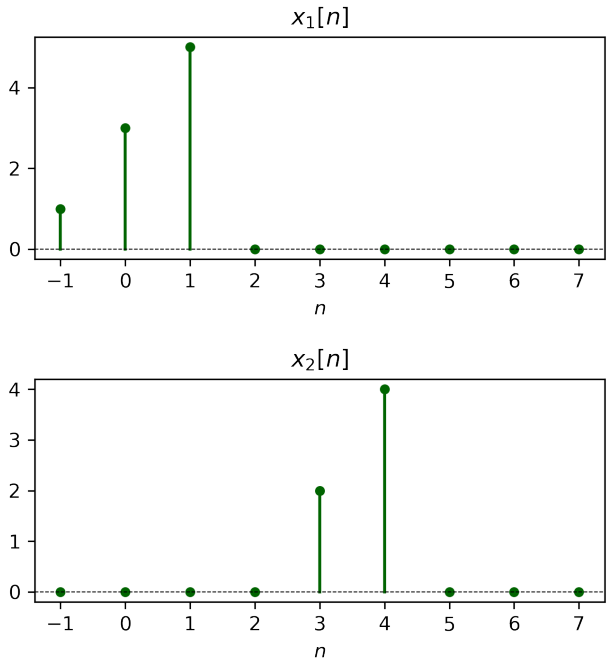
```
def prosiri(x, nx, n_stem):
    """Prosiri sekvencu nulama na zadani interval."""
    x_stem = np.zeros(len(n_stem))
    for i, n in enumerate(nx):
        if n in n_stem:
            x_stem[np.where(n_stem == n)[0][0]] = x[i]
    return x_stem

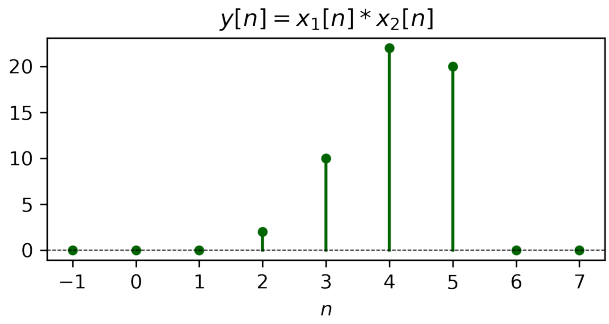
x1_stem = prosiri(x1, n1, n_stem)
x2_stem = prosiri(x2, n2, n_stem)
y_stem  = prosiri(y,  ny, n_stem)

sis.dijagram(n_stem, x1_stem, tip='uzorci',
         naslov='$x_1[n]$')

sis.dijagram(n_stem, x2_stem, tip='uzorci',
         naslov='$x_2[n]$')

sis.dijagram(n_stem, y_stem, tip='uzorci',
             naslov='$y[n] = x_1[n] * x_2[n]$')
```





3.5.4 Određivanje impulsnog odziva rekurzijom

Kada je sistem zadat diferentnom jednačinom, bilo implicitno ili eksplicitno, impulsni odziv se može odrediti rekurzijom. Neka je diferentna jednačina zadata u općem obliku:

$$g[n] + a_1 g[n-1] + a_2 g[n-2] + \cdots + a_N g[n-N] = \\ = b_0 f[n] + b_1 f[n-1] + \cdots + b_M f[n-M] \tag{3.65}$$

Ako je ulaz u ovaj sistem impulsna sekvenca, tj. $f[n] = \delta[n]$, onda je odziv jednak impulsnom odzivu, odnosno $g[n] = h[n]$. Ukoliko diferentna jednačina opisuje kauzalni sistem, tj. ako je $h(n) = 0$ za $n < 0$, preostaje da se odrede vrijednosti $h(n)$ za $n \geq 0$ U jednačini (3.65) $g[n]$ se zamjenjuje sa $h[n]$, a $f[n]$ sa $\delta[n]$. Zatim se $h[n]$ napiše u obliku (3.46):

$$h[n] = -a_1 h[n-1] - a_2 h[n-2] - \cdots - a_N h[n-N] + \\ + b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + \cdots + b_M \delta[n-M] \tag{3.66}$$

Vrijednost $h(0)$ se računa uvrštavajući u izraz (3.66) diskretno vrijeme $n = 0$:

$$h(0) = -a_1 h(-1) - a_2 h(-2) - \cdots - a_N h(-N) + \\ + b_0 \delta(0) + b_1 \delta(-1) + \cdots + b_M \delta(-M) \tag{3.67}$$

Na desnoj strani relacije (3.67) sve vrijednosti $h(n)$ su jednake nuli (jer je pretpostavljeno da diferentna jednačina opisuje kauzalni sistem). Takođe su jednake nuli sve vrijednosti $\delta(n)$ izuzev vrijednosti $\delta(0)$ koja je jednaka jedinici, pa se dobije:

$$h(0) = b_0$$

Zatim se računa $h(1)$ uvrštavajući $n = 1$:

$$h(1) = -a_1 h(0) - a_2 h(-1) - \cdots - a_N h(1-N) + \\ + b_0 \delta(1) + b_1 \delta(0) + \cdots + b_M \delta(1-M)$$

Kada se zamijene poznate vrijednosti, dobije se:

$$h(1) = -a_1 b_0 + b_1$$

Ovakav postupak se nastavlja sve dok se ne odrede sve potrebne vrijednosti $h(n)$ iz kojih se zaključuje opći oblik impulsnog odziva $h[n]$.

Primjer 3.14:

Odrediti impulsni odziv sistema koristeći rekurziju:

$$g[n] + 0.5g[n-1] + 0.25g[n-2] = f[n-1]$$

Rješenje:
Na osnovu prethodnog razmatranja i relacije (3.66) impulsni odziv je:

$$h[n] = -0.5h[n-1] - 0.25h[n-2] + \delta[n-1]$$

Iz ove relacije računaju se vrijednosti $h(n)$, za $n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
h(0) &= -0.5h(-1) - 0.25h(-2) + \delta(-1) = 0 \\
h(1) &= -0.5h(0) - 0.25h(-1) + \delta(0) = 1 \\
h(2) &= -0.5h(1) - 0.25h(0) + \delta(1) = -0.5 \\
h(3) &= -0.5h(2) - 0.25h(1) + \delta(2) = 0 \\
h(4) &= -0.5h(3) - 0.25h(2) + \delta(3) = 0.125 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ako se ovaj postupak nastavi, dobiju se vrijednosti $h(n)$ iz kojih se može eventualno odrediti generalni oblik impulsnog odziva $h[n]$.

Korištenjem rekurzije, kao što se vidi, mogu se dobiti vrijednosti $h(n)$, ali generalni oblik $h[n]$ nije uvijek jednostavno naći, pa se za određivanje analitičkog oblika $h[n]$ koriste i druge metode.

3.5.5 Step odziv LTI diskretnih sistema

Kao i kod kontinualnih sistema impulsni odziv (3.53) u potpunosti karakterizira LTI sistem. Drugi specijalni signal kojim se može okarakterizirati ponašanje LTI sistema je step odziv. Step odziv $s[n]$ je odziv sistema na jediničnu $u[n]$ sekvencu:

$$s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{3.68}$$

Prema ovoj relaciji jasno je da se $h[n]$ može odrediti na osnovu step odziva kao:

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{3.69}$$

Dakle, impulsni odziv diskretnog LTI sistema je prva razlika step odziva. Kako se impulsni odziv može odrediti na osnovu step odziva, to se i step odziv može koristiti pri analizi LTI sistema.

Primjer 3.15:

Data je diferentna jednačina:

$$y[n] - y[n-1] + 0.9\,y[n-2] = x[n], \quad \text{za } n \geq 0$$

Koristeći Python nacrtati:
a) impulsni odziv $h[n]$ za $n = -10, \ldots, 80$
b) step odziv $s[n]$ za $n = -10, \ldots, 80$.

Rješenje:
Na osnovu diferentne jednačine koeficijenti a_k i b_k iz relacije (3.45) su:

$$b = [1], \quad a = [1, -1, 0.9]$$

Impulsni i step odziv računaju se direktno iz rekurentne formule dobijene iz diferentne jednačine (3.46):

$$y[n] = x[n] + y[n-1] - 0.9\,y[n-2]$$

Budući da interval počinje od $n = -10$, koristi se parametar `offset=10` kao tehnički detalj implementacije u Pythonu, kako bi se omogućilo indeksiranje i negativnih indeksa niza. Impulsni odziv dobija se propuštanjem delta sekvence kroz rekurentnu formulu, a step odziv propuštanjem jedinične sekvence $u[n]$.
Impulsni odziv $h[n]$ i step odziv $s[n]$ su prikazani u okviru dijagrama dobivenih programskim kodom 3.7.

Programski kod 3.7

```
n      = np.arange(-10, 81)
N      = len(n)
offset = 10    # y[n] -> y[n+offset], tehnicki detalj Pythona

# a) impulsni odziv - ulaz je delta sekvenca
x_imp = np.zeros(N)
x_imp[n == 0] = 1

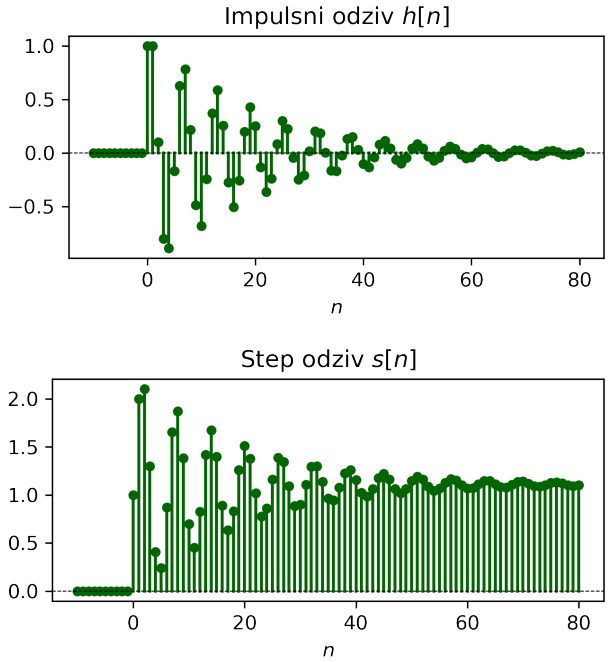
h = np.zeros(N + offset)
for k in range(N):
    h[k+offset] = (x_imp[k] + h[k+offset-1]
                   - 0.9 * h[k+offset-2])

# b) step odziv - ulaz je jedinicna sekvenca
x_step = np.zeros(N)
x_step[n >= 0] = 1

s = np.zeros(N + offset)
for k in range(N):
    s[k+offset] = (x_step[k] + s[k+offset-1]
                   - 0.9 * s[k+offset-2])

sis.dijagram(n, h[offset:offset+N], tip='uzorci',
         naslov='Impulsni odziv $h[n]$')
```

```
sis.dijagram(n, s[offset:offset+N], tip='uzorci',
         naslov='Step odziv $s[n]$')
```



3.6 Funkcija sistema

Umjesto $\delta[n]$ i $u[n]$ sekvenci, koje daju impulsni i step odziv, može se koristiti i sekvenca z^n, što će biti razmatrano u ovom poglavlju. Naime, ako je ulaz u linearni i stacionarni sistem sekvenca $f[n] = z^n$, gdje je z realni ili kompleksni broj, odziv sistema, čiji je impulsni odziv $h[n]$, na ovu sekvencu je:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} \tag{3.70}$$

Suma sa desne strane izraza (3.70) ne zavisi od n, nego predstavlja broj, koji zavisi samo od z (i od impulsnog odziva, koji je unutrašnje svojstvo samog sistema). Ako se ta suma, koja treba da konvergira, obilježi sa $H(z)$, onda je:

$$g[n] = z^n H(z) \tag{3.71}$$

odnosno odziv LTI sistema na sekvencu oblika $f[n] = z^n$ dobije se množenjem trenutne vrijednosti ulaza sa $H(z)$, gdje je:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k} \tag{3.72}$$

Ukoliko se z mijenja, izraz za $H(z)$ se može posmatrati i kao funkcija koja zavisi od promjenljive z. Za linearne i vremenski invarijantne sisteme takva funkcija se naziva *funkcija sistema.*

Primjer 3.16:

Neka je ulaz u sistem $f[n] = 2^n$ i neka je impulsni odziv sistema:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

Naći funkciju sistema $H(z)$ i odziv sistema $g[n]$.

Rješenje:
Na osnovu relacije (3.72) može se napisati:

$$H(z) = z^0 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}}$$

jer su beskonačne i konačne sume članova geometrijske progresije date sa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1), \quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \tag{3.73}$$

Kako je $f[n] = 2^n$, znači da je $z = 2$, tako da je funkcija sistema za $z = 2$:

$$H(2) = \frac{1 - 2^{-4}}{1 - 2^{-1}} = \frac{15}{8}$$

Odziv sistema je:

$$g[n] = z^n \cdot H(2) = 2^n \cdot \frac{15}{8}$$

Primjer 3.17:

Odrediti odziv $g[n]$ za sistem koji ima ulaz $f[n] = 2^n$ i impulsni odziv $h[n] = b^n u[n]$.

Rješenje:
Kako je impulsni odziv $h[n]$ kauzalan, to je funkcija sistema:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^k$$

Kako je $H(z)$ suma beskonačne geometrijske progresije, prethodni izraz će imati konačnu vrijednost ako je $|q| = \left|\frac{b}{z}\right| < 1$, tj. ako je $|z| > |b|$, i ta vrijednost je:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{b}{z}}$$

Ako je zadovoljen uslov $2 > |b|$, dobijeni izraz za $H(z)$ se može koristiti, i kao izlaz se dobije:

$$g[n] = 2^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = 2^n \cdot \frac{1}{1 - \frac{b}{2}} = \frac{2^{n+1}}{2 - b}$$

Primjer 3.18:

Dat je linearni, stacionarni i kauzalni sistem s impulsnim odzivom:

$$h[n] = 2^{-n}u[n]$$

a) Naći funkciju sistema $H(z)$.
b) Odrediti odziv sistema $g_1[n]$, ako je ulazni signal $f_1[n] = 2^n$.
c) Odrediti odziv sistema $g_2[n]$, ako je ulazni signal $f_2[n] = \cos \pi n$.

Rješenje:
a) Funkcija sistema određuje se na osnovu relacije: $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z^{-k}$, pa je:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2z}} = \frac{2z}{2z - 1}$$

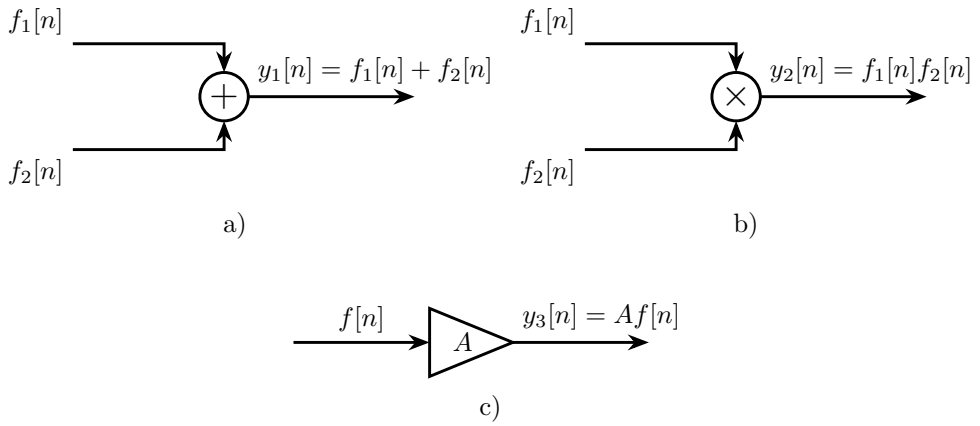
Da bi suma u prethodnoj relaciji konvergirala, mora biti zadovoljen uslov (3.73), odnosno $|1/2z| < 1$ tj. $|z| > 1/2$.

b) Za ulazni signal $f_1[n] = 2^n$ slijedi da je: $z = 2 > \frac{1}{2}$, tako da je:

$$H(2) = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 - 1} = \frac{4}{3}$$
$$g_1[n] = z^n H(z) = 2^n \cdot \frac{4}{3} \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

c) Za ulazni signal $f_2[n] = \cos \pi n = (-1)^n = z^n$, a kako mora biti $|z| > 1/2$, i kako je $|-1| > 1/2$, to je:

$$g_2[n] = z^n H(z) = (-1)^n \cdot \frac{2 \cdot (-1)}{2 \cdot (-1) - 1} = (-1)^n \cdot \frac{-2}{-3} = (-1)^n \cdot \frac{2}{3}$$



Slika 3.21: Simboli za predstavljanje: a) sabiranja sekvenci, b) množenja sekvenci, c) množenja sekvenci skalarom (pojačalo).

3.7 Operacije nad sekvencama

3.7.1 Suma i proizvod sekvenci

Simboli koji se koriste u blok dijagramima diskretnih linearnih vremenski invarijantnih sistema, za predstavljanje operacija sabiranja i množenja sekvenci i operacije množenja sekvence skalarom, prikazani su na slici 3.21.

Neka su $f_1[n]$ i $f_2[n]$ dvije poznate sekvence. Ako se vrijednosti te dvije sekvence, u svakom diskretnom trenutku n, saberu (slika 3.21.a), dobija se sekvenca $y_1[n]$:

$$y_1[n] = f_1[n] + f_2[n] \tag{3.74}$$

Ako se vrijednosti tih sekvenci, u svakom diskretnom trenutku n, pomnože (slika 3.21.b), dobija se sekvenca $y_2[n]$:

$$y_2[n] = f_1[n] \cdot f_2[n] \tag{3.75}$$

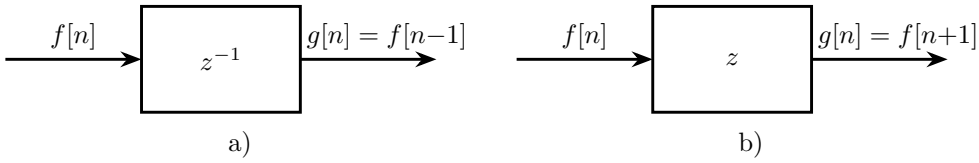
U mnogim primjenama operacija množenja sekvenci naziva se modulacijom, a uređaj koji obavlja modulaciju je modulator (slika 3.21.b). Ukoliko je jedna od sekvenci beskonačne dužine, a druga konačne (engl. *window sequence*), rezultat množenja je sekvenca konačne dužine. Formiranje sekvence konačne dužine naziva se prozoriranje (engl. *windowing*), što ima veoma značajnu ulogu pri dizajniranju digitalnih filtera. Specijalan slučaj množenja predstavlja pojačalo prikazano na slici 3.21.c) gdje se sekvenca $f[n]$ množi skalarom A i daje sekvencu:

$$y_3[n] = Af[n] \tag{3.76}$$

3.7.2 Vremenski pomak sekvence

Operacija vremenskog pomaka data je relacijom:

$$g[n] = f[n - k] \tag{3.77}$$



Slika 3.22: Simboli za: a) jediničnо kašnjenje, b) jedinično prednjačenje sekvence.

gdje je k cijeli broj. Ako je $k > 0$ onda je sekvenca zakasnila (engl. *delaying operation*), a ako je $k < 0$ sekvenca je isprednjačila (engl. *advancing operation*). Ukoliko je sekvenca zakasnila za jedan uzorak, kašnjenje se naziva jedinično kašnjenje (engl. *unit delay*) i shematski je predstavljeno na slici 3.22.a.

Za jedinično kašnjenje koristi se i simbol z^{-1} što potiče od z-transformacije zakašnjele sekvence, o čemu će biti riječi kasnije. Shematski prikaz jediničnog prednjačenja prikazan je na slici 3.22.b.

3.7.3 Kaskadna i paralelna veza LTI sistema

Neka izlaz linearnog i stacionarnog sistema s impulsnim odzivom $h_1[n]$, čiji je ulaz $f[n]$, pobuđuje drugi linearni i stacionarni sistem s impulsnim odzivom $h_2[n]$. Takva veza je *kaskadna veza* impulsnih odziva (slika 3.23.a). Izlaz sistema je konvolucija ulaza sa konvolucijom impulsnih odziva (3.78):

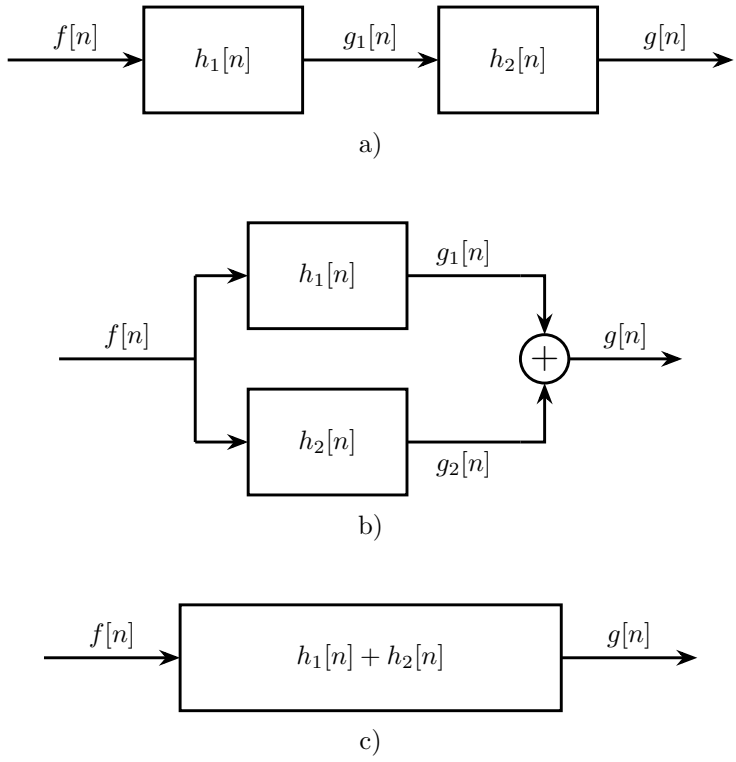
$$g[n] = g_1[n] * h_2[n] = \{f[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = f[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \tag{3.78}$$

Ovakva veza sistema daje i odgovor na pitanje da li je moguće napraviti konvoluciju tri signala. Odgovor je potvrdan, a iskorištena je osobina asocijativnosti. Prvo je napravljena konvolucija dva signala $g_1[n]$ i $h_2[n]$, a zatim novi signal $g_1[n]$ zamijenjen konvolucijom signala $f[n]$ i $h_1[n]$. Relacija (3.78) kaže da redoslijed izvršavanja operacije konvolucije nije bitan. Međutim, relacija (3.78) koja opisuje osobinu asocijativnosti, važi samo ako je sistem linearan i istovremeno vremenski invarijantan.

S druge strane, za realizaciju paralelne veze LTI sistema sa sumiranjem iskorištena je osobina distribucije. Paralelna veza dva LTI sistema (slika 3.23.b) sa istim ulazom $f[n]$ i impulsnim odzivima $h_1[n]$ i $h_2[n]$ ima impulsni odziv koji je jednak sumi impulsnih odziva, dok je izlaz jednak konvoluciji ulaza sa sumom impulsnih odziva:

$$g[n] = \{f[n] * h_1[n]\} + \{f[n] * h_2[n]\} = f[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} \tag{3.79}$$

Ekvivalentna shema paralelne veze LTI sistema prikazana je na slici 3.23.c.



Slika 3.23: a) Kaskadna veza dva LTI sistema, b) paralelna veza dva LTI sistema, c) ekvivalentna shema paralelne veze dva LTI sistema.

4. Aproksimacija kontinualnih signala

Ukoliko se signal, koji predstavlja promjenu neke veličine u vremenu, izrazi funkcijom, onda se njegova analiza svodi na analizu te funkcije. Poznati postupak iz matematike je razlaganje (dekompozicija) kontinualne funkcije $f(t)$ na funkcije $f_i(t)$, tj. aproksimacija jednog signala linearnom kombinacijom drugih signala.

Jedna od prednosti ovakvog predstavljanja je ta što se funkcije $f_i(t)$ mogu birati tako da se relativno lahko računaju po definiciji (npr. polinomi po promjenljivoj t, ili harmonijske funkcije) pa je računanje $f(t)$ za neku određenu vrijednost $t = t_0$ bitno pojednostavljeno.

Druga, važnija prednost, je ta što se veći dio diskretnih i kontinualnih sistema koji se razmatraju u teoriji signala, mogu posmatrati kao linearni i vremenski invarijantni. Ako su funkcije $f_i(t)$ izabrane tako da se njihova transformacija u sistemu lako izračunava, onda se odziv dobije kao suma odziva na pojedine funkcije $f_i(t)$, tj. kao linearna kombinacija transformacija ovih funkcija.

4.1 Aproksimacija realne funkcije realnim funkcijama

4.1.1 Aproksimacija funkcije drugom funkcijom

Funkcija $f(t)$ može se aproksimirati funkcijom $f_1(t)$, ako postoji koeficijent C_1 takav da je:

$$f(t) \cong C_1 f_1(t) \tag{4.1}$$

Neka su funkcija koja se aproksimira $f(t)$, funkcija kojom se aproksimira $f_1(t)$ i koeficijent C_1 realni. Prilikom aproksimacije, u općem slučaju, javlja se funkcija greške $e(t)$:

$$e(t) = f(t) - C_1 f_1(t) \tag{4.2}$$

Vrijednost koeficijenta C_1 treba izabrati tako da aproksimacija bude najbolja moguća. Zbog toga treba naći način za poređenje aproksimacija, koje su rezultat izbora raznih vrijednosti C_1. Kako se međusobno mogu porediti samo skalari, svakoj se aproksimaciji dodjeljuje skalar, nazvan kriterij i obilježava se sa J, a njegov će iznos ukazivati na stepen približnosti aproksimacije. Najbolja je ona aproksimacija koja ima najmanji J.

Izbor kriterija nije jednoznačan. Tačnost aproksimacije može se odrediti na više načina, a najčešće određivanjem srednje kvadratne greške (odstupanja). Kao kriterij tada

se uzima veličina:

$$J = \int_a^b e(t)e^*(t)dt = \int_a^b |e(t)|^2 dt \tag{4.3}$$

gdje su a i b granice intervala u kojem se vrši aproksimacija. Konjugovana vrijednost od $e(t)$ obilježena je sa $e^*(t)$. Vidi se da je J uvijek pozitivan broj, te da u stvari predstavlja površinu ispod kvadrata modula greške na intervalu $[a, b]$.

Iako na prvi pogled djeluje da je modul greške bolji izbor, kvadratna forma se bira jer je lakše praviti izvod kriterija i izbjegava se neprekidnost izvoda u nuli. Nedostatak ovog kriterija je što tolerira male greške, a velike ne.

Na slici 4.1. prikazana je funkcija $f(t)$ koju treba aproksimirati funkcijom $f_1(t)$, pri čemu je koeficijent aproksimacije C_1. Greška aproksimacije $e(t)$ prikazana je na slici 4.1.d, dok je kriterij J prikazan na slici 4.1.e i vidi se da je J zaista površina ispod kvadrata greške.

Da bi greška $e(t)$ bila minimalna, neophodno je da parcijalni izvodi kriterija po koeficijentima C_i, koji određuju funkcije aproksimacije, budu nula. Tada se mogu naći optimalne vrijednosti tih koeficijenata. U slučaju aproksimacije jednom funkcijom, koeficijent C_1 određuje se iz relacije:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = 0 \tag{4.4}$$

Ako su funkcija koju treba aproksimirati $f(t)$, funkcija kojom se aproksimira $f_1(t)$ i koeficijent C_1 realni, kriterij tada ima oblik:

$$J = \int_a^b e(t)e(t)dt = \int_a^b \left[f(t) - C_l f_l(t)\right]\left[f(t) - C_l f_l(t)\right] dt \tag{4.5}$$

Parcijalni izvod kriterija po koeficijentu C_1 je:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = \int_a^b (-2) f_1(t)\left[f(t) - C_1 f_1(t)\right] dt = -2\int_a^b f_1(t)e(t)dt = 0 \tag{4.6}$$

Iz relacije (4.6) je:

$$\int_a^b f_1(t)f(t)dt - C_1 \int_a^b f_1^2(t)dt = 0$$

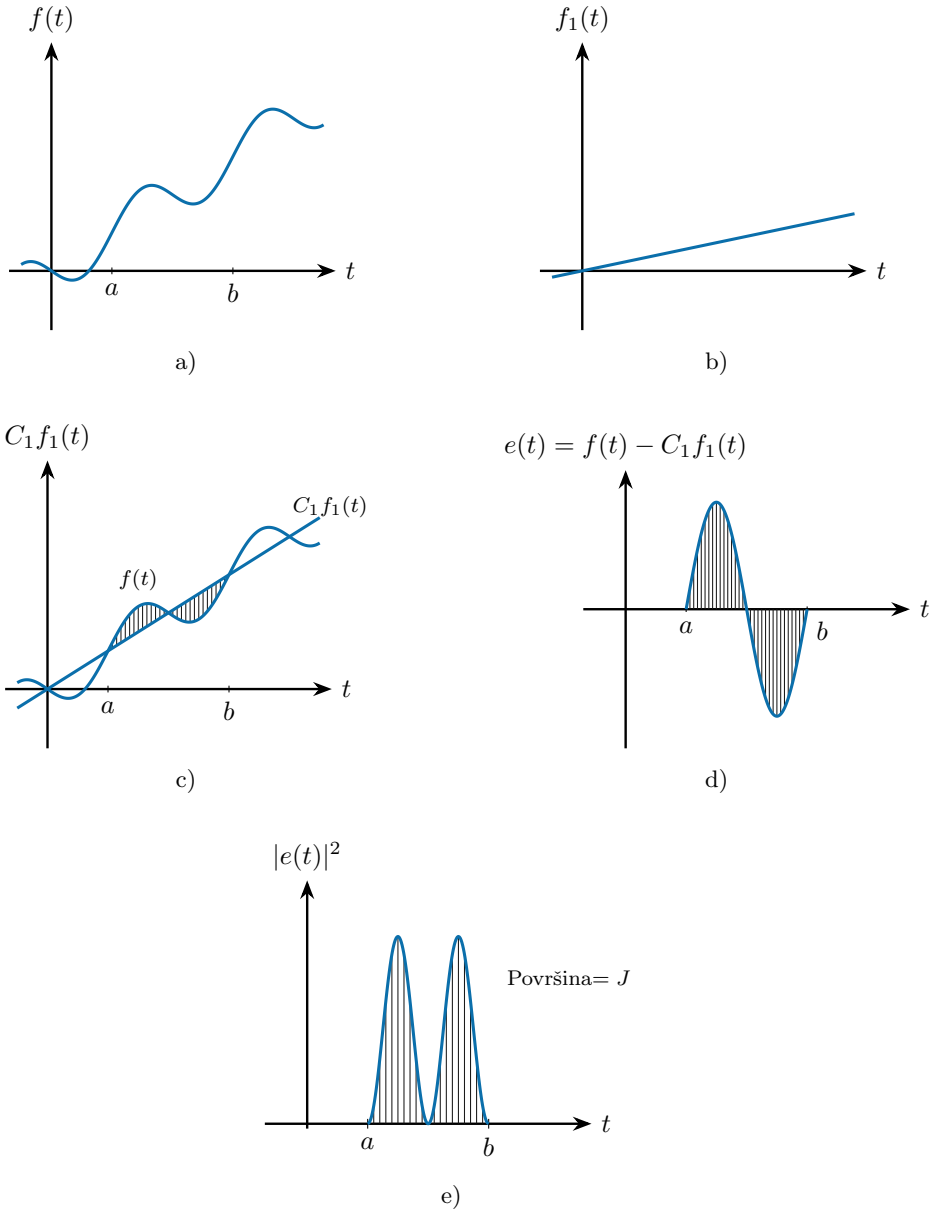
odakle je vrijednost koeficijenta C_1 :

$$C_1 = \frac{\int_a^b f(t)f_1(t)dt}{\int_a^b f_1^2(t)dt} \tag{4.7}$$

Iz relacije (4.6) također se vidi da je integral proizvoda funkcije $f_1(t)$ kojom se vrši aproksimacija i funkcije greške $e(t)$, na datom intervalu jednak nuli:

$$\int_a^b f_1(t)e(t)dt = 0 \tag{4.8}$$

Kao što će biti pokazano u nastavku, ovo znači da su funkcije $f_1(t)$ i $e(t)$ ortogonalne na intervalu $[a, b]$, odnosno statistički jako različite. Dakle, kod optimalne aproksimacije



Slika 4.1: Postupak aproksimacije funkcije $f(t)$ jednom funkcijom $f_1(t)$ na intervalu $[a, b]$: a) originalna funkcija $f(t)$, b) funkcija kojom se aproksimira $f(t)$, c) aproksimacija $\tilde{f}(t) = C_1 f_1(t)$, d) greška aproksimacije $e(t)$ na intervalu, e) kvadrat modula greške aproksimacije $|e(t)|^2$ na intervalu.

funkcije drugom funkcijom signal greške je ortogonalan na funkciju kojom se vrši aproksimacija - odnosno, "ostatak" pri aproksimaciji (u ovom slučaju $e(t)$) je toliko različit od funkcije kojom se aproksimira ($f_1(t)$) da nema smisla dalje "popravljati" aproksimaciju.

Analogno, ako su funkcije $f(t)$ i $f_1(t)$ međusobno ortogonalne, vrijednost C_1 je nula (4.7). To se može interpretirati na slijedeći način: funkcije $f(t)$ i $f_1(t)$ su na datom intervalu po obliku toliko različite, da nema smisla da se jedna aproksimira drugom.

4.1.2 Aproksimacija sa dvije funkcije

Pri aproksimaciji funkcije $f(t)$ sa dvije funkcije, može se napisati:

$$f(t) \cong C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \tag{4.9}$$

a funkcija greške je:

$$e(t) = f(t) - C_1 f_1(t) - C_2 f_2(t) \tag{4.10}$$

Ako su $f(t), f_1(t), f_2(t), C_1$ i C_2 realni, kriterij ima oblik:

$$J = \int_a^b e(t)e(t)dt \tag{4.11}$$

Da bi greška bila minimalna neophodno je da su izvodi kriterija po koeficijentima C_1 i C_2 jednaki nuli, odnosno:

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = -2\int_a^b f_1(t)e(t)dt = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial J}{\partial C_2} = -2\int_a^b f_2(t)e(t)dt = 0$$

Dakle, u slučaju aproksimacije sa dvije funkcije, u optimalnom slučaju, greška je ortogonalna na obje funkcije kojima se vrši aproksimacija. Vrijednosti C_1 i C_2 određuju se iz jednačina:

$$C_1 \int_a^b f_1(t)f_1(t)dt + C_2 \int_a^b f_1(t)f_2(t)dt = \int_a^b f(t)f_1(t)dt \tag{4.12}$$

$$C_1 \int_a^b f_1(t)f_2(t)dt + C_2 \int_a^b f_2(t)f_2(t)dt = \int_a^b f(t)f_2(t)dt \tag{4.13}$$

Ako su funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ međusobno ortogonalne, onda je u relacijama (4.12) i (4.13) integral njihovog proizvoda na intervalu [a, b] jednak nuli, te se sistem dvije jednačine sa dvije nepoznate svodi na dvije jednačine sa po jednom nepoznatom. Slijedi:

$$C_i = \frac{\int_a^b f(t)f_i(t)dt}{\int_a^b f_i(t)f_i(t)dt} \quad (i \in \{1, 2\}) \tag{4.14}$$

Vrijednost C_1 ista je kao u slučaju aproksimacije jednom funkcijom.

4.1.3 Aproksimacija sa više funkcija i princip ortogonalnosti

Pri aproksimaciji funkcije $f(t)$ linearnom kombinacijom više zadanih funkcija javlja se greška $e(t)$.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(t) + e(t) \tag{4.15}$$

Kao i kod aproksimacije sa jednom ili dvije funkcije, bira se kriterij J koji je matematički najpogodniji. Ako se izabere kriterij dat relacijom (4.3), i ako se naprave parcijalni izvodi po svim koeficijentima C_i, onda se minimalna vrijednost greške dobije iz uslova:

$$\frac{\partial J}{\partial C_i} = -2\int_a^b f_i(t)e(t)dt = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots n-1 \tag{4.16}$$

Na osnovu izraza (4.16) definira se **princip ortogonalnosti**: ako se neka funkcija aproksimira linearnom kombinacijom drugih funkcija $f_i(t)$, onda se minimalna vrijednost kriterija J (4.11), u posmatranom intervalu, dobije kada je funkcija greške ortogonalna na sve funkcije kojima se vrši aproksimacija:

$$\int_a^b f_i(t)e(t)dt = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots n-1 \tag{4.17}$$

Korištenjem jednačina koje odgovaraju principu ortogonalnosti dobija se n linearnih algebarskih jednačina za određivanje koeficijenata C_i.

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_k \int_a^b f_i(t)f_k(t)dt = \int_a^b f(t)f_i(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots n-1 \tag{4.18}$$

Ako su funkcije $f_i(t)$ međusobno ortogonalne, sistem jednačina (4.18) svodi se na n jednačina po jednoj nepoznatoj. Tada se na intervalu $[a, b]$ uslov ortogonalnosti predstavlja sa:

$$\int_a^b f_i(t)f_k(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \lambda_i, & i = k \end{cases} \tag{4.19}$$

Ako je $\lambda_i = 1$ za sve $i = 0, 1, 2, \dots n-1$, za ortogonalni sistem funkcija $\{f_i(t)\}$ kaže se da je ortonormirani sistem na intervalu $[a, b]$. Tada se koeficijenti C_i dobijaju iz relacije:

$$C_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \int_a^b f(t)f_i(t)dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots n-1 \tag{4.20}$$

Važna osobina koeficijenata C_i, koja je posljedica ortogonalnosti, vezana je za neograničenu mogućnost izbora broja osnovnih funkcija potrebnih za razlaganje. Jednom izračunati koeficijenti za odgovarajući signal, na datom intervalu, vrijede stalno (i mogu se koristiti za prenos, kompresiju itd.).
Bitno je napomenuti da broj funkcija kojima se aproksimira može biti i beskonačan:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} C_i f_i(t) \tag{4.21}$$

Ukoliko se aproksimacija vrši konačnim brojem od n funkcija, iz relacije (4.11) se dobiva:

$$\int_a^b e^2(t)dt = \int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(t) \right]^2 dt \tag{4.22}$$

Da bi aproksimacija bila najbolja, srednjekvadratna greška mora imati minimalnu vrijednost, a to vrijedi za slučaj kada su funkcije kojima se vrši aproksimacija međusobno

ortogonalne, odnosno zadovoljavaju relaciju (4.19). Uzimajući u obzir relaciju (4.20) izraz (4.22) se može napisati u obliku:

$$\int_a^b f^2(t)dt - 2\sum_{i=0}^{n-1} C_i \int_a^b f(t)f_i(t)dt + \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \int_a^b f_i^2(t)dt =$$
$$= \int_a^b f^2(t)dt - 2\sum_{i=0}^{n-1} C_i^2\lambda_i + \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2\lambda_i = \int_a^b f^2(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2\lambda_i \tag{4.23}$$

Ako se posmatra ortonormirani sistem osnovnih funkcija, onda je $\lambda_i = 1$, tako da sistem ortonormiranih funkcija s konačnim brojem članova reda daje najbolju aproksimaciju funkcije $f(t)$ u smislu srednje kvadratne greške, ako se ona može učiniti proizvoljno malom (ε) povećanjem broja članova n, tj.

$$\int_a^b \left[f(t) - \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(t) \right]^2 dt < \varepsilon \tag{4.24}$$

Na osnovu prethodnih rezultata očigledno je da važi:

$$\int_a^b f^2(t)dt - \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \geq 0 \quad \text{ili} \quad \sum_{i=0}^{n-1} C_i^2 \leq \int_a^b f^2(t)dt \tag{4.25}$$

Relacija (4.25) se naziva Beselova nejednakost i daje značajnu osobinu (Fourierovog) reda, ali važno je napomenuti da ova nejednakost važi za bilo koji sistem ortogonalnih funkcija.

4.1.4 Potpun skup ortogonalnih funkcija

Potpun skup ortogonalnih funkcija je takav skup ortogonalnih funkcija kojima se ne može dodati ni jedna funkcija koja će biti ortogonalna na sve ostale. Npr. ako se uvede analogija sa vektorima, u trodimenzionalnom prostoru mogu se naći tri vektora koja su međusobno ortogonalna - npr. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Ovim vektorima se ne može dodati više ni jedan vektor koji bi bio ortogonalan na sve ostale.

Prilikom razlaganja funkcije $f(t)$ na potpunom skupu ortogonalnih funkcija greška $e(t)$ jednaka je nuli, tj. funkcija se ne aproksimira, nego je tačno predstavljena linearnom kombinacijom drugih funkcija. Dokaz ove tvrdnje slijedi iz principa ortogonalnosti. Po tom principu greška $e(t)$ mora biti ortogonalna na sve funkcije kojima se vrši aproksimacija $f_i(t)$, a pošto takve funkcije nema, jer je skup $f_i(t)$ potpun, slijedi da je $e(t) = 0$.

4.2 Aproksimacija funkcije kompleksnim funkcijama

4.2.1 Princip ortogonalnosti za kompleksne funkcije

U općem slučaju funkcija koja se aproksimira $f(t)$, funkcije kojima se aproksimira $f_i(t)$ i koeficijenti C_i su kompleksni. Ako se pri aproksimaciji javlja greška $e(t)$, onda se može napisati:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(t) + e(t) \tag{4.26}$$

Kriterij je:

$$J = \int_a^b e(t)e^*(t)dt \tag{4.27}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} e^*(t) &= f^*(t) - \sum_{i=0}^{n-1} C_i^* f_i^*(t) \\ C_i &= C_i^R + jC_i^I \quad C_i^* = C_i^R - jC_i^I \end{aligned} \tag{4.28}$$

U prethodnoj relaciji C_i^R i C_i^I su realni brojevi, a j imaginarna jedinica. Optimalna vrijednost kriterija J se može dobiti traženjem parcijalnih izvoda kriterija po C_i^R i C_i^I, odnosno iz relacija: $\partial J/\partial C_i^R = 0$ i $\partial J/\partial C_i^I = 0$.

Provođenjem ovog postupka dobije se princip ortogonalnosti za kompleksne funkcije koji kaže da je integral proizvoda funkcije greške i konjugovanih funkcija kojima se vrši aproksimacija, na konačnom intervalu, jednak nuli, odnosno:

$$\int_a^b e(t)f_i^*(t)dt = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n-1 \tag{4.29}$$

Ako su funkcije $f_i(t)$ međusobno ortogonalne, što se u ovom slučaju izražava kao:

$$\int_a^b f_i(t)f_k^*(t)dt = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \lambda_i, & i = k \end{cases} \tag{4.30}$$

onda se koeficijenti C_i računaju iz izraza:

$$C_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \int_a^b f(t)f_i^*(t)dt, \quad \lambda_i = \int_a^b f_i(t)f_i^*(t)dt \quad (i = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{4.31}$$

Postoji veliki broj potpunih skupova ortogonalnih funkcija. U analizi signala često se koriste eksponencijalne ortogonalne funkcije definirane kao:

$$f_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \omega_0 \in \mathbb{R} \tag{4.32}$$

Ove funkcije su ortogonalne na intervalu: $a \leq t \leq a + T$, gdje je $T = 2\pi/\omega_0$ period funkcija $f_k(t)$, jer vrijedi:

$$\int_a^{a+T} f_k(t)f_m^*(t)dt = \int_a^{a+T} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t}dt = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ T & k = m \end{cases} \tag{4.33}$$

Razvoj neke funkcije po funkcijama (4.32) naziva se **kompleksni Fourierov red** funkcije $f(t)$ i ima opći oblik:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a \leq t \leq a + T \tag{4.34}$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{4.35}$$

Tabela 4.1: Brojevne vrijednosti u Walshovoj matrici 8×8.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

4.3 Sistemi ortogonalnih funkcija

Postoje različiti sistemi ortogonalnih funkcija $\{f_i(t)\}$ i svaki sistem daje svoj skup koeficijenata razvoja $\{C_i\}$ iste funkcije $f(t)$. Koji će se od sistema primjeniti u konkretnom slučaju zavisi od prirode problema koji se rješava, odnosno potreba i ciljeva analize. Za potrebe analize kontinualnih signala, tipično se koristi razvoj u Fourierov red, odnosno harmonijske funkcije. Za analizu signala koji imaju četvrtastu formu, recimo analognih reprezentacija digitalnih signala, uobičajeno je korištenje ortogonalnih funkcija koje imaju dio po dio konstantne vrijednosti, kao što su sistemi Walshovih i Haarovih funkcija.

4.3.1 Walshove funkcije

Walshove funkcije se definiraju na konačnom intervalu dužine T. Za svako $p \in \mathbb{N}$ sistem Walshovih funkcija sadrži 2^p funkcija ranga p. Za $p = 0$ može se definirati $W^0 = [1]$. Ako se matrica za sistem od 2^p Walshovih funkcija obilježi sa W^p, onda je odgovarajuća matrica za sistem od 2^{p+1} funkcija data sa:

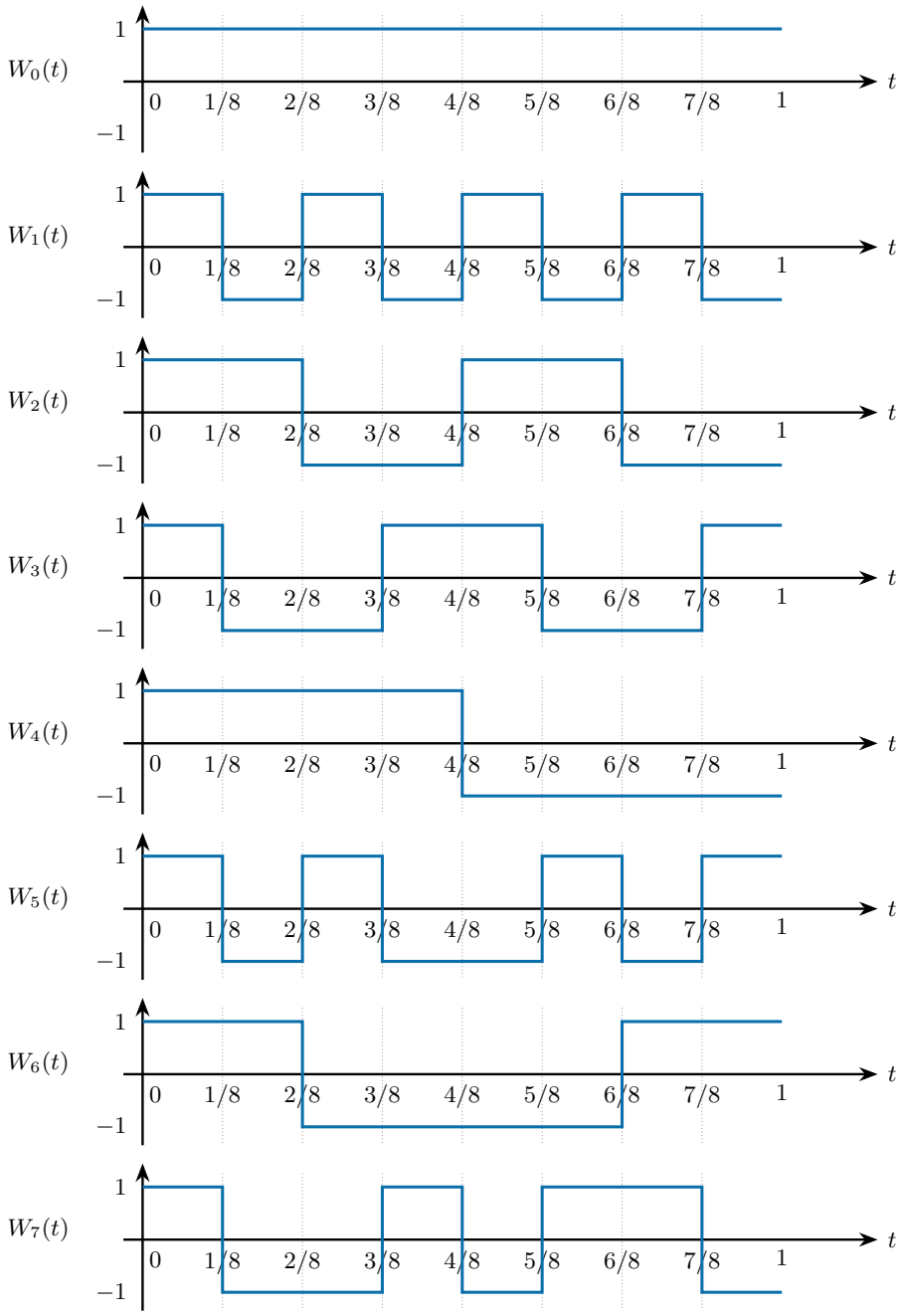
$$W^{p+1} = \begin{bmatrix} W^p & W^p \\ W^p & -W^p \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

Za $p \geq 1, 2 \ldots$ matrica Walshovih funkcija formira se na osnovu relacije (4.36). Tako za $p = 1$ osnovna matrica ima oblik:

$$W^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

a za $p = 3$ osam Walshovih funkcija W^3 može se predstaviti matricom 8×8 u kojoj su vrijednosti samo +1 ili -1 na svakoj osmini intervala T (tabela 4.1.).

Vremenski dijagrami za osam Walshovih funkcija prikazani su na slici 4.2. Walshovim funkcijama može se aproksimirati bilo koja funkcija na konačnom intervalu. Pošto je broj Walshovih funkcija konačan (2^p), onda će se pri aproksimaciji po pravilu javljati greška. Za određivanje koeficijenata Walshovih funkcija koristi se relacija (4.20), jer se radi o aproksimaciji realne funkcije, realnim funkcijama. Koeficijent λ_i je u ovom slučaju jednak jedinici. Aproksimirana funkcija dobije se iz relacije (4.15).



Slika 4.2: Osam Walshovih funkcija.

Primjer 4.1:

Funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ aproksimirati sa osam Walshovih funkcija.

Rješenje:
Koristeći relaciju (4.20) mogu se naći koeficijenti $C_0 \div C_7$. Ako se sa $p_0 \div p_7$ označe površine na osminama intervala, sa W^3 Walshove funkcije ranga 3, onda se na osnovu relacije (4.20) koeficijenti $C_0 \div C_7$ određuju iz izraza:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} W^3 \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}$$

Funkcija $f(t) = \cos(2\pi t)$ ima period $T = 1$. Na intervalu $[0, 1]$ dovoljno je izračunati samo dvije površine (slika 4.3.):

$$p_0 = \int_0^{1/8} f(t)dt = \int_0^{1/8} \cos 2\pi t dt = \left.\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right|_0^{1/8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

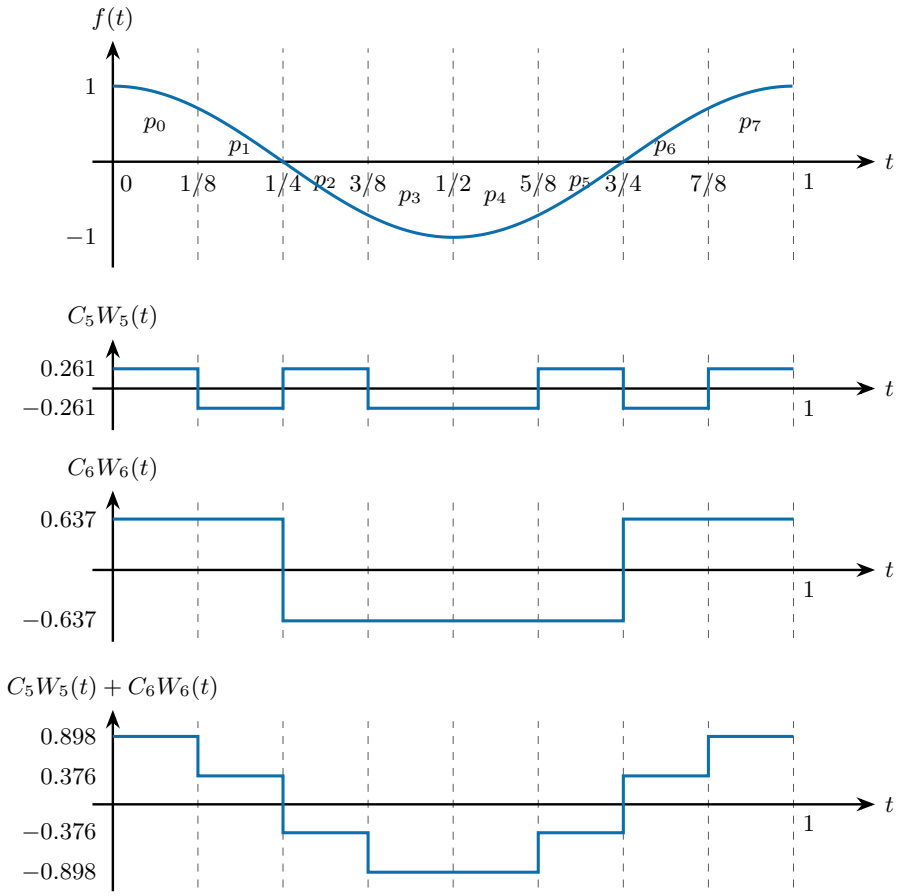
$$p_1 = \int_{1/8}^{1/4} f(t)dt = \int_{1/8}^{1/4} \cos 2\pi t dt = \left.\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right|_{1/8}^{1/4} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\pi} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4\pi}$$

Za ostale površine sa slike 4.3. vidi se da važi:

$$p_0 = -p_3 = -p_4 = p_7$$
$$p_1 = -p_2 = -p_5 = p_6$$

Na osnovu matrice iz tabele 4.1 i izračunatih površina $p_0 \div p_7$, koeficijenti $C_0 \div C_7$ su:

$$C_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 0$$
$$C_1 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 = 0$$
$$C_2 = p_0 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 + p_5 - p_6 - p_7 = 0$$
$$C_3 = p_0 - p_1 - p_2 + p_3 + p_4 - p_5 - p_6 + p_7 = 0$$
$$C_4 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = 0$$
$$C_5 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - p_4 + p_5 - p_6 + p_7 =$$
$$= 4p_0 - 4p_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} - \frac{2 - \sqrt{2}}{\pi} = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\pi} = 0.261$$
$$C_6 = p_0 + p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_6 + p_7 = 4p_0 + 4p_1 = \frac{2}{\pi} = 0.637$$
$$C_7 = p_0 - p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 + p_6 - p_7 = 0$$

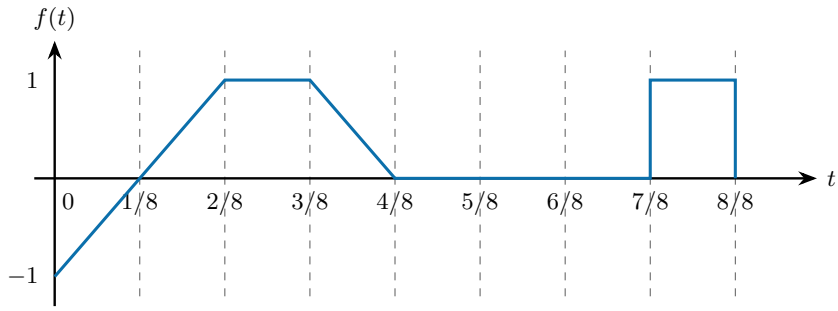


Slika 4.3: Aproksimacija sa osam Walshovih funkcija (primjer 4.1).

Kako su samo koeficijenti C_5 i C_6 nenulti, iz relacije (4.15) za aproksimaciju (razvoj) funkcije ortogonalnim funkcijama, dobije se:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{n-1} C_i W_i(t) = C_5 W_5(t) + C_6 W_6(t)$$

Na osnovu ove relacije nacrtana je funkcija $f(t) \cong C_5 W_5(t) + C_6 W_6(t)$ (slika 4.3.) koja približno aproksimira funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$.



Slika 4.4: Signal $f(t)$ (primjer 4.2).

Primjer 4.2:

Signal $f(t)$ prikazan na slici 4.4. aproksimirati sa osam Walshovih funkcija.

- Odrediti približne vrijednosti signala na osminama intervalima i nacrtati aproksimirani signal.
- Nacrtati signal greške.
- Odrediti vrijednost kriterija J definiranog relacijom (4.3)
- Da li je dati signal signal snage ili signal energije ili ni snage ni energije?
- Odrediti snagu i energiju ako je to moguće.

Rješenje:
a) Signal $f(t)$ se može napisati u obliku:

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(t) + e(t) = \sum_{i=0}^{n-1} C_i W_i + e(t)$$

gdje je $e(t)$ signal greške. Pri aproksimaciji sa osam Walshovih funkcija koeficijenti su dati izrazom:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} W^3 \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}$$

Kako je funkcija data na intervalu dužine $T = 1$, površine $p_0 \div p_7$, na osminama intervala označene su na slici 4.5.
Sa slike 4.5. slijede površine $p_0 \div p_7$:

$$p_0 = -p_1 = -p_3 = -\frac{1}{16}, \quad p_2 = p_7 = \frac{1}{8}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = 0$$

Koeficijenti $C_0 \div C_7$ su:

$$C_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$
$$C_1 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 + p_4 - p_5 + p_6 - p_7 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{16}$$
$$C_2 = p_0 + p_1 - p_2 - p_3 + p_4 + p_5 - p_6 - p_7 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{16}$$
$$C_3 = p_0 - p_1 - p_2 + p_3 + p_4 - p_5 - p_6 + p_7 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$
$$C_4 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$
$$C_5 = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 - p_4 + p_5 - p_6 + p_7 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$
$$C_6 = p_0 + p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_6 + p_7 = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}$$
$$C_7 = p_0 - p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 + p_6 - p_7 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = -\frac{5}{16}$$

Približne vrijednosti signala $f(t)$ na osminama intervala $t \in (0, 1)$ određuju se na osnovu relacije:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{i=0}^{7} C_i f_i(t) = \sum_{i=0}^{7} C_i W_i(t)$$

Kako na intervalu $t \in (0, 1/8)$ svih osam Walshovih funkcija ima vrijednost jednaku jedan, to je $\tilde{f}_0(t) = 8 \cdot (-1/16) = -8/16$, itd.

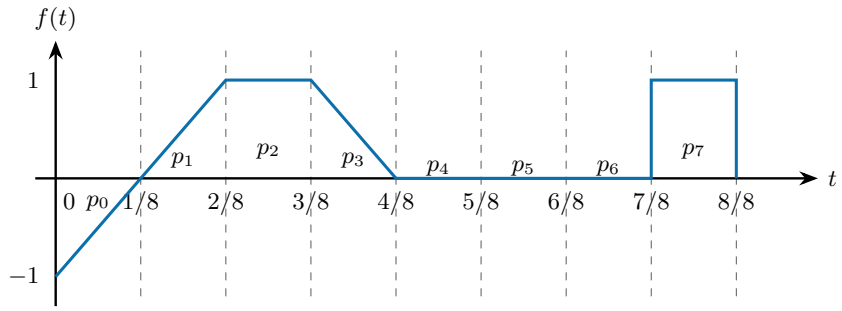
$$\tilde{f}(t) = -\frac{8}{16}, \quad t \in \left(0, \frac{1}{8}\right); \quad \tilde{f}(t) = \frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right); \quad \tilde{f}(t) = 1, \quad t \in \left(\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right); \quad \tilde{f}(t) = 0, \quad t \in \left(\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right)$$

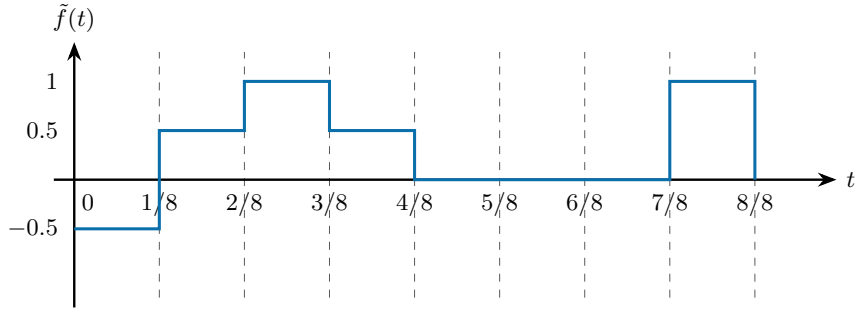
$$\tilde{f}(t) = 0, \quad t \in \left(\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right); \quad \tilde{f}(t) = 1, \quad t \in \left(\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right)$$

Aproksimirani signal prikazan je na slici 4.6.

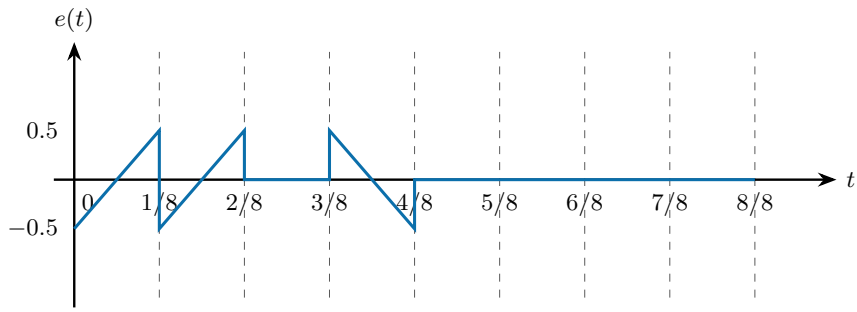
b) Signal greške $e(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$ ima oblik prikazan na slici 4.7.



Slika 4.5: Originalni signal (primjer 4.2).



Slika 4.6: Aproksimirani signal (primjer 4.2).



Slika 4.7: Signal greške (primjer 4.2).

c) Na intervalu $t \in (0, 1/16)$ signal greške je $e(t) = 8t - (1/2)$. Sa slike 4.7. očigledno

je da se kriterij J može odrediti iz relacije:

$$J = \int_0^1 e^2(t)dt = 6\int_0^{1/16}\left(8t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = 6\int_0^{1/16}\left(64t^2 - 8t + \frac{1}{4}\right)dt =$$
$$= 6\left(64\frac{t^3}{3} - 8\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t\right)\Big|_0^{1/16} = \frac{1}{32}$$

d) Signal $f(t)$ prikazan na slici 4.4. je aperiodički. Za $t \to \infty$ amplituda pada na nulu, te se radi o signalu energije, čija je snaga $P = 0$.

e) Energija signala se određuje na osnovu relacije:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 3\int_0^{1/8}(8t-1)^2dt + 2\int_{2/8}^{3/8}1^2dt$$
$$= 3\int_0^{1/8}\left(64t^2 - 16t + 1\right)dt + 2\int_{2/8}^{3/8}1^2dt$$
$$= 3\cdot\left[64\cdot\frac{t^3}{3} - 16\frac{t^2}{2} + t\right]_0^{1/8} + 2t|_{2/8}^{3/8}$$
$$= 3\cdot\left[64\cdot\frac{1}{3\cdot 8^3} - 16\frac{1}{2\cdot 8^2} + \frac{1}{8}\right] + \frac{2}{8} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

4.3.2 Haarove funkcije

Haarove funkcije se definiraju na intervalu $[0, 1]$. Kompletan sistem Haarovih funkcija može se definirati pomoću dvije relacije. Relacija (4.38) definira Haarove funkcije $\mathrm{har}(0, t)$ i $\mathrm{har}(1, t)$:

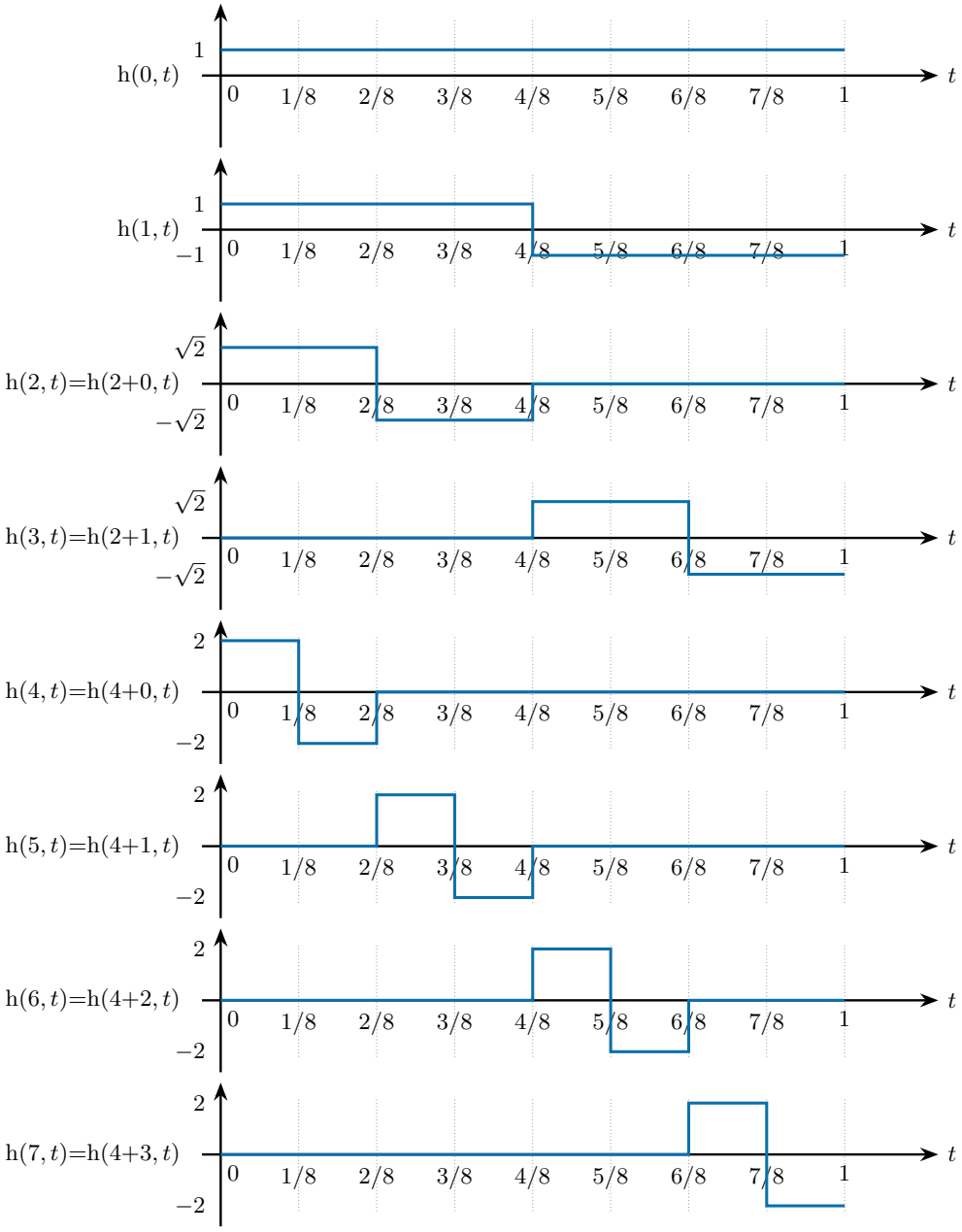
$$\mathrm{har}(0,t) = 1 \quad (0 \le t \le 1), \quad \mathrm{har}(1,t) = \begin{cases} +1, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t \le 1 \end{cases} \tag{4.38}$$

$$\mathrm{har}\left(2^p + n, t\right) = \begin{cases} \sqrt{2^p}, & \frac{n}{2^p} < t < \frac{n+\frac{1}{2}}{2^p} \\ -\sqrt{2^p}, & \frac{n+\frac{1}{2}}{2^p} < t < \frac{n+1}{2^p} \\ 0, & 0 \le t < \frac{n}{2^p} \wedge \frac{n+1}{2^p} < t \le 1 \end{cases} \tag{4.39}$$

Relacija (4.39) definira sve ostale Haarove funkcije $\mathrm{har}\left(2^p + n, t\right)$, koje imaju vrijednosti nula i $\pm\sqrt{2^p}$, gdje je $p = 1, 2, \ldots$ dok n može imati vrijednosti $n = 0, 1, 2 \ldots 2^p - 1$.

Vremenski dijagrami osam Haarovih funkcija prikazani su na slici 4.8. sa vrijednostima $\pm 1, 0, \pm\sqrt{2}$ $(p = 1, n = 0, 1)$ i ± 2 $(p = 2, n = 0, 1, 2, 3)$ na svakoj osmini intervala T. Tabelom 4.2 je definirana matrica 8×8 za osam Haarovih funkcija.

Haarovim funkcijama, kao i Walshovim, može se aproksimirati bilo koja funkcija na konačnom intervalu uz korištenje relacija (4.15) i (4.20).



Slika 4.8: Osam Haarovih funkcija.

Tabela 4.2: Brojevne vrijednosti u Haarovoj matrici 8×8

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0	0	0	0
0	0	0	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
2	-2	0	0	0	0	0	0
0	0	2	-2	0	0	0	0
0	0	0	0	2	-2	0	0
0	0	0	0	0	0	2	-2

.

Primjer 4.3:

Funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ aproksimirati sa osam Haarovih funkcija na intervalu $[0, 1]$.

Rješenje:
Koeficijenti $C_0 \div C_7$ nalaze se iz relacije (4.20). Period funkcije $f(t)$ je $T = 1$, a $p_0 \div p_7$ su površine na osminama intervala. Koeficijenti $C_0 \div C_7$ određuju se iz relacije:

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}$$

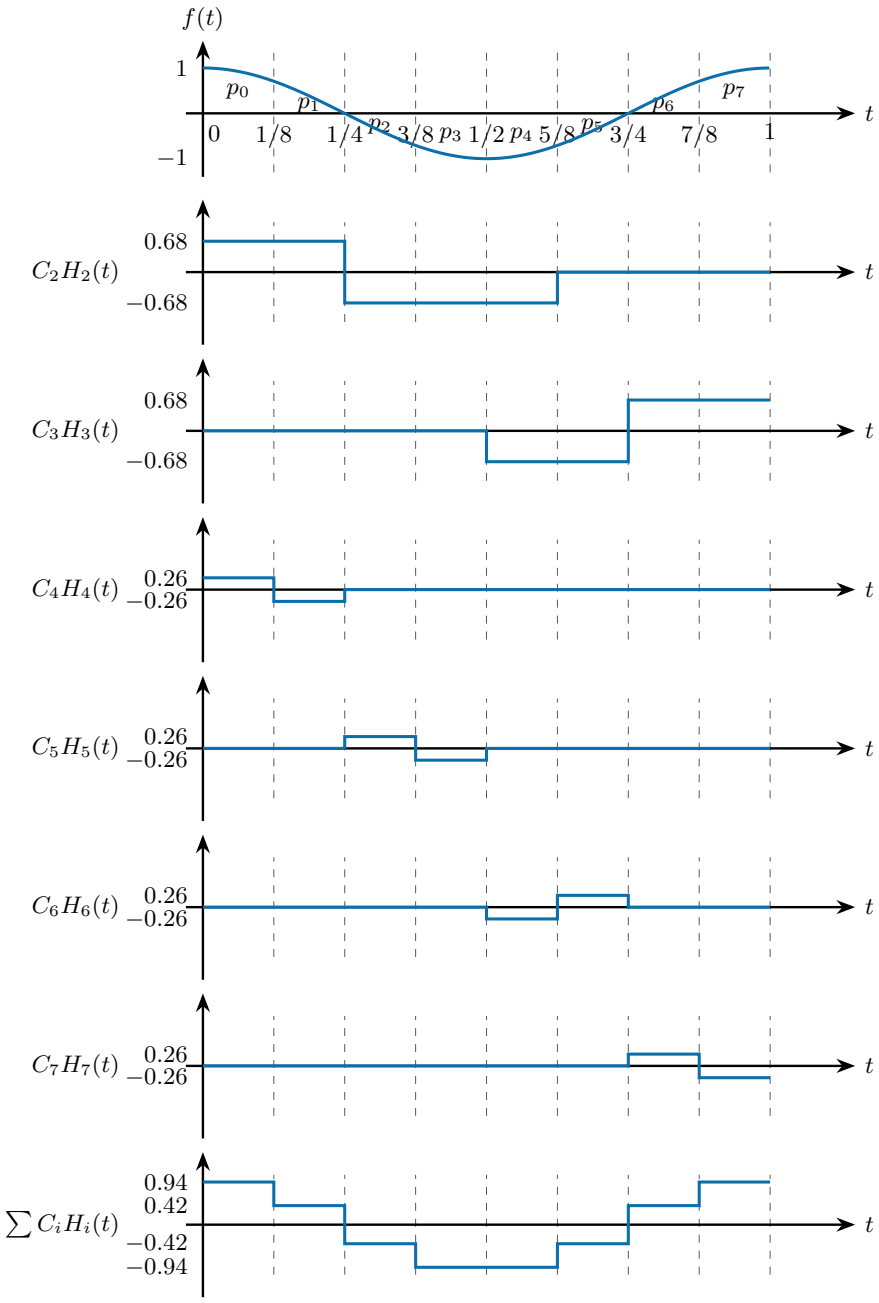
Za funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ na intervalu $[0, 1]$ dovoljno je izračunati samo dvije površine (slika 4.9.):

$$p_0 = \int_0^{1/8} f(t)dt = \int_0^{1/8} \cos 2\pi t dt = \left.\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right|_0^{1/8} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}$$

$$p_1 = \int_{1/8}^{1/4} f(t)dt = \int_{1/8}^{1/4} \cos 2\pi t dt = \left.\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\right|_{1/8}^{1/4} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\pi} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4\pi}$$

Za ostale površine sa slike 4.9. važi:

$$p_0 = -p_3 = -p_4 = p_7$$
$$p_1 = -p_2 = -p_5 = p_6$$



Slika 4.9: Aproksimacija Haarovim funkcijama (primjer 4.3).

Na osnovu izračunatih površina $p_0 \div p_7$, koeficijenti $C_0 \div C_7$ su:

$$C_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 0$$
$$C_1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = 0$$
$$C_2 = \sqrt{2}\,(p_0 + p_1) - \sqrt{2}\,(p_2 + p_3) =$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4\pi} + \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi}\right) - \sqrt{2}\left(-\frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.45$$
$$C_3 = \sqrt{2}\,(p_4 + p_5) - \sqrt{2}\,(p_6 + p_7) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4\pi} - \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} + \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi} - \frac{\sqrt{2}}{2\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} = -0.45$$
$$C_4 = 2p_0 - 2p_1 = \frac{2\sqrt{2}}{4\pi} - \frac{2(2-\sqrt{2})}{4\pi} = \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} = 0.13$$
$$C_5 = 2p_2 - 2p_3 = -2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\pi} = \frac{\sqrt{2}-1}{\pi} = 0.13$$
$$C_6 = 2p_4 - 2p_5 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\right) + 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} = \frac{-\sqrt{2}+1}{\pi} = -0.13$$
$$C_7 = 2p_6 - 2p_7 = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{4\pi} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4\pi} = \frac{-\sqrt{2}+1}{\pi} = -0.13$$

Iz relacije (4.15) za aproksimaciju funkcije ortogonalnim funkcijama, dobije se:

$$f(t) \cong \sum_{i=0}^{n-1} C_i H_i = C_2 H_2 + C_3 H_3 + C_4 H_4 + C_5 H_5 + C_6 H_6 + C_7 H_7$$

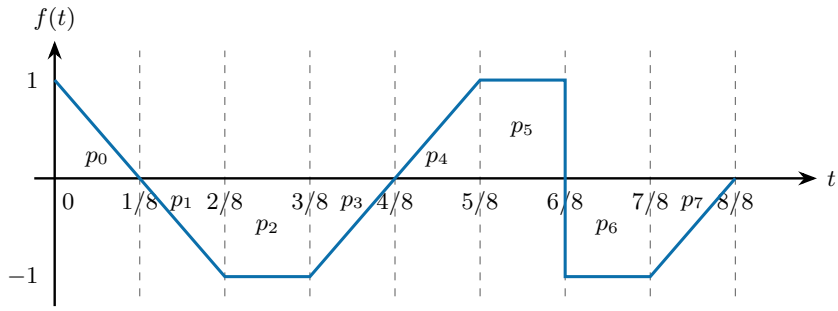
Haarovu funkciju H_2 amplitude $\pm\sqrt{2}$ treba pomnožiti koeficijentom $C_2 = 0.45$, što daje amplitudu ± 0.68, itd. do funkcije H_7 amplitude ± 2 koju treba pomnožiti koeficijentom $C_7 = -0.13$, što daje amplitudu ∓ 0.26. Sabirajući dobivene proizvode $C_i H_i$ po osminama intervala $[0, 1]$ dobije se funkcija (slika 4.9.) koja aproksimira funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ na intervalu $[0, 1]$.

Primjer 4.4:

Aproksimirati signal prikazan na slici 4.10. sa osam Haarovih funkcija. Nacrtati aproksimirani signal i odrediti vrijednost kriterija J.

Rješenje:
Neka je interval aproksimacije zadate funkcije $T = 1$, a $p_0 \div p_7$ površine na osminama intervala (slika 4.10.). Za funkciju $f(t)$ na intervalu $[0, 1]$ dovoljno je izračunati samo dvije površine:

$$p_0 = -p_1 = -p_3 = p_4 = -p_7 = \frac{1}{16} \quad p_5 = -p_2 = -p_6 = \frac{1}{8}$$



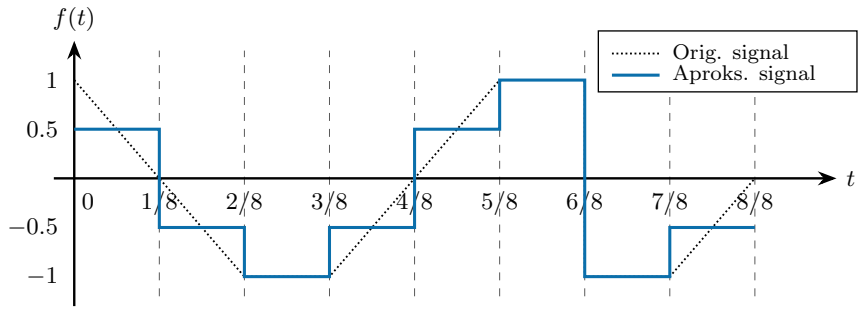
Slika 4.10: Originalni signal (primjer 4.4).

Na osnovu matrice iz tabele 4.2 koeficijenti $C_0 \div C_7$ su:

$$C_0 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = -\frac{3}{16}$$
$$C_1 = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6 - p_7 = -\frac{3}{16}$$
$$C_2 = \sqrt{2}\,(p_0 + p_1 - p_2 - p_3) = \sqrt{2} \cdot \frac{3}{16}$$
$$C_3 = \sqrt{2}\,(p_4 + p_5 - p_6 - p_7) = \sqrt{2} \cdot \frac{6}{16}$$
$$C_4 = 2p_0 - 2p_1 = \frac{4}{16}, \quad C_5 = 2p_2 - 2p_3 = -\frac{2}{16}$$
$$C_6 = 2p_4 - 2p_5 = -\frac{2}{16}, \quad C_7 = 2p_6 - 2p_7 = -\frac{2}{16}$$
$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{7} C_i H_i = \sum_{i=0}^{7} \tilde{f}_i(t) = \tilde{f}(t)$$

Funkcije $\tilde{f}_i(t)$ se određuju na sljedeći način:

$$\tilde{f}_0(t) = 1 \cdot C_0 + 1 \cdot C_1 + \sqrt{2} \cdot C_2 + 2 \cdot C_4, \quad t \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_0(t) = \frac{-3}{16} + \frac{-3}{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} = \frac{8}{16}, \quad t \in \left(0, \frac{1}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_1(t) = \frac{-3}{16} + \frac{-3}{16} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{4}{16} = -\frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_2(t) = \frac{-3}{16} + \frac{-3}{16} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{-2}{16} = -\frac{16}{16}, \quad t \in \left(\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_3(t) = \frac{-3}{16} + \frac{-3}{16} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{16} - 2 \cdot \frac{-2}{16} = -\frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right)$$



Slika 4.11: Originalni i aproksimirani signal (primjer 4.4).

$$\tilde{f}_4(t) = \frac{-3}{16} - \frac{-3}{16} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{6}{16} + 2\cdot\frac{-2}{16} = \frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_5(t) = \frac{-3}{16} - \frac{-3}{16} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{6}{16} - 2\cdot\frac{-2}{16} = \frac{16}{16}, \quad t \in \left(\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_6(t) = \frac{-3}{16} - \frac{-3}{16} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{6}{16} + 2\cdot\frac{-2}{16} = -\frac{16}{16}, \quad t \in \left(\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right)$$
$$\tilde{f}_7(t) = \frac{-3}{16} - \frac{-3}{16} - \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{6}{16} - 2\cdot\frac{-2}{16} = -\frac{8}{16}, \quad t \in \left(\frac{7}{8}, \frac{8}{8}\right)$$

Na osnovu ovih vrijednosti, na slici 4.11. nacrtan je aproksimirani signal.
Vrijednost kriterija je:

$$J = \int_0^1 e^2(t)dt = 10\int_0^{1/16}\left(8t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = 10\int_0^{1/16}\left(64t^2 - 8t + \frac{1}{4}\right)dt =$$
$$= 10\left(64\frac{t^3}{3} - 8\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4}t\right)\Big|_0^{1/16} = \frac{5}{96}$$

Primjer 4.5:

Aproksimirati funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ na intervalu $[-1, 1]$ u smislu minimuma srednjekvadratne greške, funkcijama $f_1(t), f_2(t)$ i $f_3(t)$ prikazanim na slici 4.12.

Rješenje:
Koeficijenti se računaju prema formuli:

$$C_i = \frac{\int_a^b f(t)f_i(t)dt}{\int_a^b f_i^2(t)dt}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

pri čemu su granice integracije date sa $a = -1, b = 1$. Funkcija koja se aproksimira $f(t)$ i funkcije kojima se aproksimira $f_1(t), f_2(t)$ i $f_3(t)$ su parne funkcije, te su granice

integriranja simetrične, što se može iskoristiti pri računanju koeficijenata C_i :

$$C_l = \frac{1}{2}\int_{-1}^{l} \cos 2\pi t dt = \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_0^l = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-1/2}(-\cos 2\pi t)dt + \int_{-1/2}^{1/2}(\cos 2\pi t)dt + \int_{1/2}^{-1}(-\cos 2\pi t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_0^{1/2} - \frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_{1/2}^{l}\right] = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{-3/4}\cos 2\pi t dt - \int_{-3/4}^{-1/4}\cos 2\pi t dt + \int_{-1/4}^{1/4}\cos 2\pi t dt \right.$$

$$\left. - \int_{1/4}^{3/4}\cos 2\pi t dt + \int_{3/4}^{1}\cos 2\pi t dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \left[\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_0^{1/4} - \frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_{1/4}^{3/4} + \frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_{3/4}^{1}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

Kako je samo koeficijent C_3 različit od nule, to je aproksimirana funkcija:

$$\tilde{f}(t) = C_3 f_3(t) = \frac{2}{\pi} f_3(t)$$

Zbog parnosti funkcije $[f(t) - \tilde{f}(t)]^2$ srednjekvadratna greška, odnosno vrijednost kriterija je:

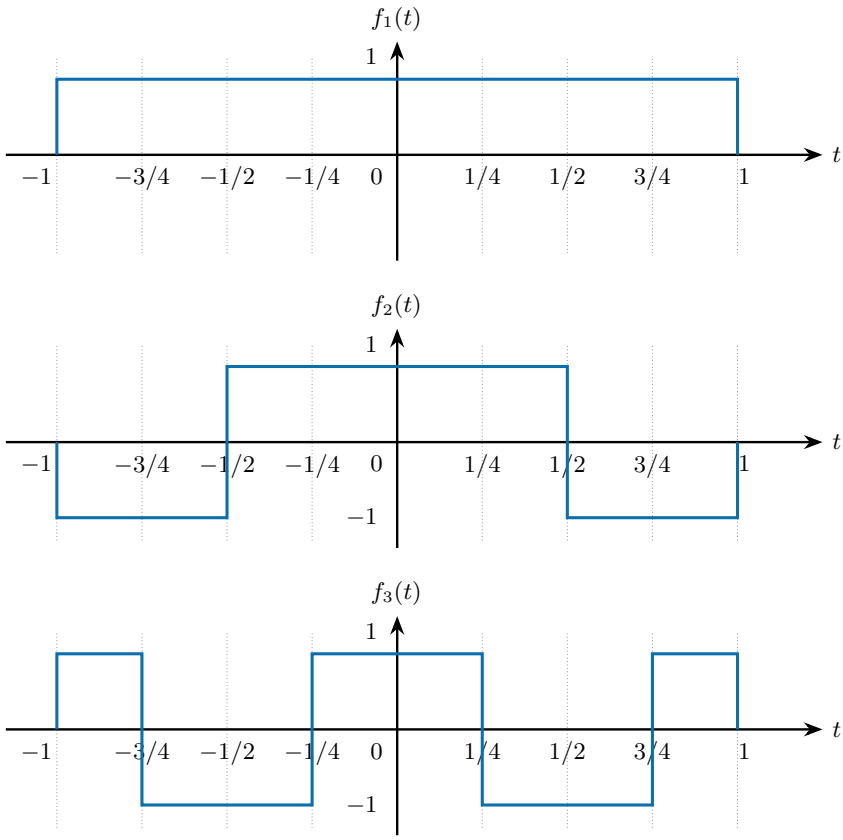
$$J = \int_{-1}^{1} e^2(t)dt = \int_{-1}^{1}[f(t) - \tilde{f}(t)]^2 dt =$$

$$= 8\cdot\int_0^{1/4}\left(\cos 2\pi t - \frac{2}{\pi}\right)^2 dt = 8\cdot\int_0^{1/4}\left(\cos^2 2\pi t - \frac{4}{\pi}\cos 2\pi t + \frac{4}{\pi^2}\right)dt =$$

$$= 8\cdot\int_0^{1/4}\left(\frac{1+\cos 4\pi t}{2} - \frac{4}{\pi}\cos 2\pi t + \frac{4}{\pi^2}\right)dt$$

$$= 8\cdot\int_0^{1/4}\frac{\cos 4\pi t}{2}dt - 8\cdot\int_0^{1/4}\frac{4}{\pi}\cos 2\pi t\cdot dt + 8\cdot\int_0^{1/4}\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right)dt =$$

$$= 4\cdot\frac{\sin 4\pi t}{4\pi}\bigg|_0^{1/4} - \frac{32}{\pi}\cdot\frac{\sin 2\pi t}{2\pi}\bigg|_0^{1/4} + 8\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\right)t\bigg|_0^{1/4} = 1 - \frac{8}{\pi^2} = 0.188$$



Slika 4.12: Funkcije kojima treba aproksimirati funkciju $f(t) = \cos(2\pi t)$ (primjer 4.5).

4.4 Ortogonalnost u odnosu na težinsku funkciju

Neka je data nenegativna funkcija $W(t)$ na intervalu $[a, b]$. Za funkcije iz skupa $\{f_k(t)\}$ se kaže da su ortogonalne na intervalu $[a, b]$ u odnosu na težinsku/otežavajuću (engl. *weighting function*) funkciju $W(t)$ ako važi uslov:

$$\int_a^b f_k(t) f_m^*(t) W(t) dt = 0, \quad k \neq m \tag{4.40}$$

Težinska funkcija se može interpretirati na slijedeći način: neka je potrebno aproksimirati funkciju $f(t)$ linearnom kombinacijom funkcija $f_k(t)$. Zbog prirode problema veličina greške nema isti značaj za svaku vrijednost t. Npr. može biti važno da greška bude mala za male vrijednosti t, dok njena vrijednost nije kritična za velike vrijednosti t (primjer takve težinske funkcije je $W(t) = e^{-t}u(t)$).

Da bi se težinska funkcija uzela u obzir, može se za optimalan izbor koeficijenata

razvoja po funkcijama $f_k(t)$ minimizirati sljedeći integral:

$$J = \int_a^b \left[f(t) - \sum_k C_k f_k(t) \right]^2 W(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.41}$$

Za ovakav kriterij princip ortogonalnosti glasi:

$$\int_a^b e(t) f_k^*(t) W(t) dt = 0, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.42}$$

Ako su funkcije $f_k(t)$ ortogonalne u odnosu na $W(t)$, koeficijenti C_k se dobijaju iz jednačine:

$$C_k = \frac{\int_a^b f(t) f_k^*(t) W(t) dt}{\int_a^b f_k(t) f_k^*(t) W(t) dt}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.43}$$

4.5 Aproksimacija Walshovim funkcijama u Pythonu

Prilikom kreiranja programa za aproksimaciju funkcija Walshovim funkcijama koriste se pogodnosti `numpy` biblioteke za rad sa matricama. Program je organiziran u pet logičkih cjelina: sinteza Walshove matrice, definiranje vremenske baze, sinteza Walshovih funkcija, računanje koeficijenata aproksimacije i grafički prikaz rezultata.

Pri numeričkoj aproksimaciji određenog integrala funkcije $f(t)$ koristi se funkcija `np.sum()`. Funkcija `np.sum(f[a:b])` daje zbir vrijednosti funkcije $f(t)$ na indeksima od `a` do `b-1`. Za korektnu aproksimaciju vrijednosti integrala, rezultat je potrebno pomnožiti vremenskim korakom $T_{\min}$:

$$\int_{t_a}^{t_b} f(t)\, dt \cong T_{\min} \cdot \sum_{i=a}^{b-1} f(t_i)$$

Sinteza Walshove matrice

Walshova matrica se u Pythonu definira rekurzivno pomoću `numpy` funkcije `np.block`. Ako je N broj željenih Walshovih funkcija, broj iteracija iznosi $\log_2(N)$. Polazna matrica je $W = [1]$, a svaka iteracija udvostručuje dimenziju matrice prema rekurzivnoj relaciji:

$$W_{2k} = \begin{bmatrix} W_k & W_k \\ W_k & -W_k \end{bmatrix}$$

Programski kod 4.1

```
N = 8                    # broj zeljenih Walshovih funkcija
br = int(np.log2(N))     # broj iteracija (za N=8, br=3)

# Rekurzivna sinteza Walshove matrice
W = np.array([[1]])
for k in range(br):
    W = np.block([[W,  W],
                  [W, -W]])
```

```
print(f"Walshova matrica {N}x{N}:")
print(W)
```

```
Walshova matrica 8x8:
[[ 1  1  1  1  1  1  1  1]
 [ 1 -1  1 -1  1 -1  1 -1]
 [ 1  1 -1 -1  1  1 -1 -1]
 [ 1 -1 -1  1  1 -1 -1  1]
 [ 1  1  1  1 -1 -1 -1 -1]
 [ 1 -1  1 -1 -1  1 -1  1]
 [ 1  1 -1 -1 -1 -1  1  1]
 [ 1 -1 -1  1 -1  1  1 -1]]
```

Sinteza vremenske baze

Umjesto fiksiranja vremenskog koraka $T_{\min}$, prirodnije je fiksirati broj tačaka po jednom segmentu Walshove funkcije (`pts`). Na taj način, bez obzira na izbor N, svaki od N segmenata intervala $[0, 1]$ uvijek ima isti broj tačaka, što osigurava ujednačenu rezoluciju prikaza. Ukupan broj tačaka je $L = N \cdot \texttt{pts}$, a vremenski korak se iz toga automatski određuje kao $T_{\min} = 1/L$.

Napomena: vremenska baza t pokriva poluotvoreni interval $[0, 1)$ – tačka $t = 1$ nije uključena. Ovo je prirodan izbor za periodične signale i ne utiče na aproksimaciju, budući da su sve Walshove funkcije konstantne na svakom od N segmenata.

Programski kod 4.2

```
pts = 50                # broj tacaka po segmentu
d = pts                 # duzina jednog segmenta u tackama
L = N * d               # ukupan broj tacaka (za N=8, pts=50: L=400)
Tmin = 1.0 / L          # vremenski korak

# t pokriva interval [0, 1), tacka t=1 nije ukljucena
t = np.arange(0, 1, Tmin)

print(f"Broj tacaka po segmentu: {pts}")
print(f"Broj segmenata: {N}")
print(f"Ukupan broj tacaka: {L}")
print(f"Vremenski korak Tmin = 1/{L} = {Tmin:.6f}")
```

```
Broj tacaka po segmentu: 50
Broj segmenata: 8
Ukupan broj tacaka: 400
Vremenski korak Tmin = 1/400 = 0.002500
```

Sinteza Walshovih funkcija

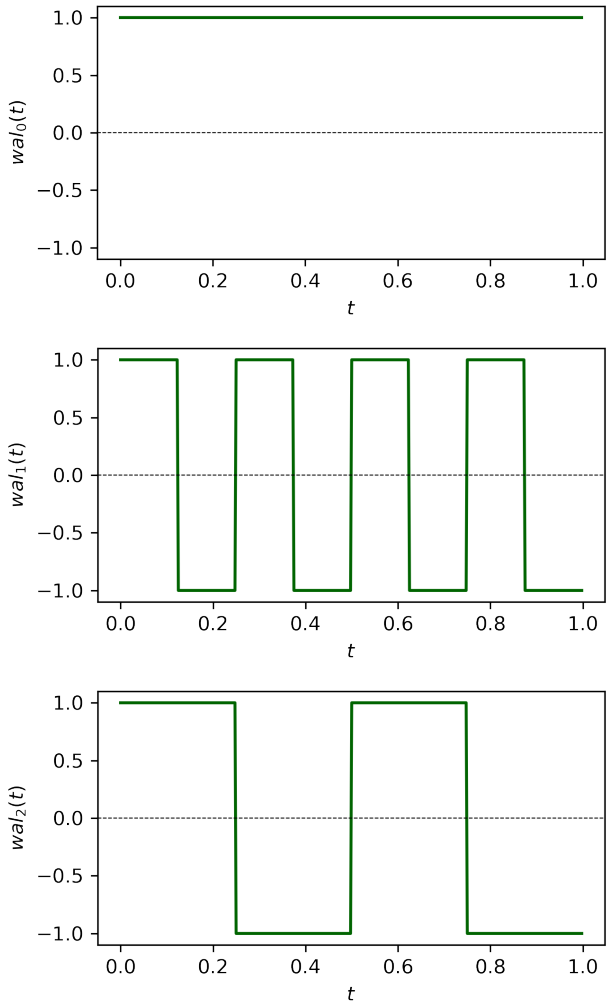
Walshove funkcije se formiraju direktno iz Walshove matrice W. Vrijednost k-te Walshove funkcije na j-tom segmentu jednaka je elementu $W_{k,j}$ Walshove matrice. Rezultat je matrica `wal` dimenzija $N \times L$, čiji svaki red predstavlja jednu Walshovu funkciju.

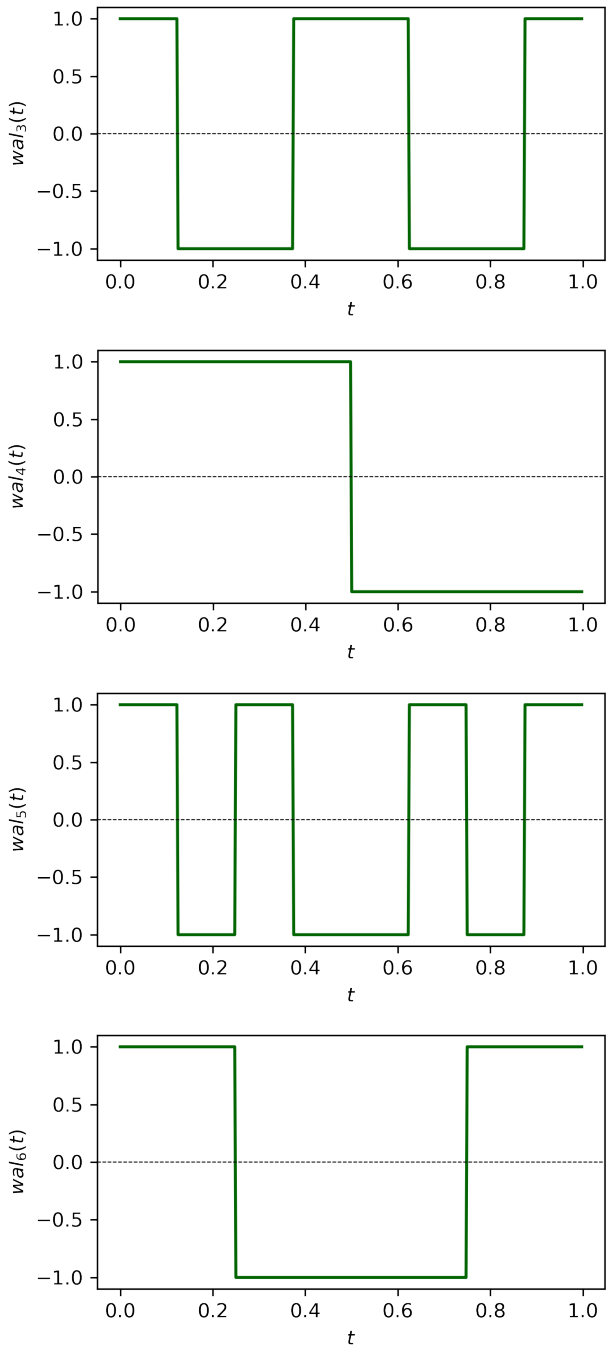
Programski kod 4.3

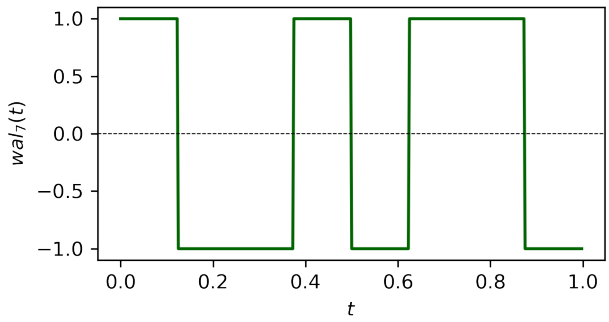
```
wal = np.zeros((N, L))

for k in range(N):              # za svaku Walsh funkciju
    for j in range(N):          # za svaki segment
        wal[k, j*d:(j+1)*d] = W[k, j]

for m in range(N):
    sis.dijagram(t=t, x=wal[m, :],
                 y_labela=f'$wal_{m}(t)$', ylim=(-1.1, 1.1))
```




1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
$wal_3(t)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t
$wal_4(t)$
$wal_5(t)$
$wal_6(t)$



Računanje koeficijenata aproksimacije

Pri računanju koeficijenata aproksimacije p_k koristi se činjenica da je vrijednost određenog integrala funkcije $f(t)$ na k-tom segmentu jednaka:

$$p_k = \int_{k/N}^{(k+1)/N} f(t)\,dt \cong T_{\min} \cdot \sum_{i=k\cdot d}^{(k+1)\cdot d-1} f(t_i), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Koeficijenti C_k dobijaju se množenjem Walshove matrice W sa vektorom koeficijenata $\mathbf{p}$, što se u Pythonu zapisuje kao `C = W @ p`.

Programski kod 4.4

```
f = np.cos(2 * np.pi * t)   # funkcija koju aproksimiramo

# koeficijenti p(k) = integral f(t) na k-tom segmentu
p = np.zeros(N)
for k in range(N):
    p[k] = np.sum(f[k*d:(k+1)*d]) * Tmin

print(f"Koeficijenti p: {np.round(p, 4)}")

# koeficijenti Ck = W * p
C = W @ p

print("Koeficijenti C:")
for k in range(len(C)):
    print(f"  C[{k}] = {np.round(C[k], 4)}")
```

```
Koeficijenti p: [ 0.1129  0.0475 -0.0457 -0.1122 -0.1129 -
0.0475  0.0457  0.1122]
Koeficijenti C:
  C[0] = 0.0
  C[1] = 0.0
  C[2] = 0.0
  C[3] = 0.0
  C[4] = 0.005
  C[5] = 0.2637
```

```
C[6] = 0.6366
C[7] = -0.0021
```

Rekonstrukcija i grafički prikaz

Aproksimirana funkcija dobija se superpozicijom N Walshovih funkcija ponderisanih koeficijentima C_k:

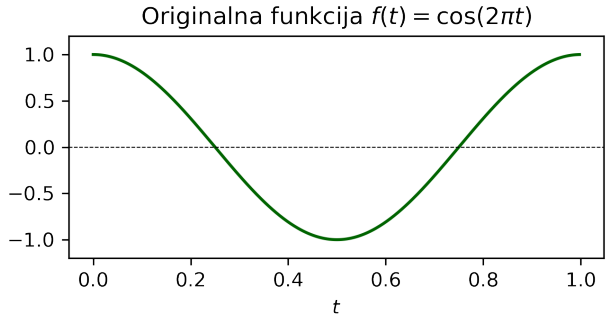
$$\hat{f}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot wal_k(t)$$

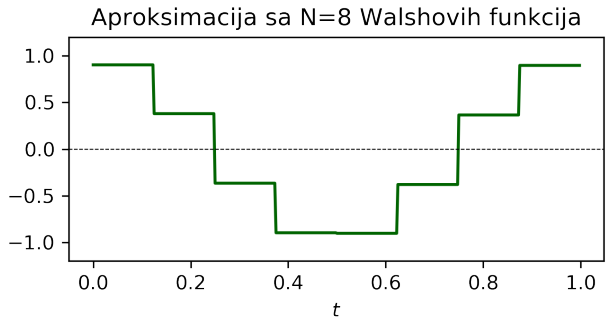
Programski kod 4.5

```
aprox = np.zeros(L)
for r in range(N):
    aprox += C[r] * wal[r, :]

sis.dijagram(t, f,
             ylim=(-1.2, 1.2),
             naslov=r'Originalna funkcija $f(t) = \cos(2\pi t)$')

sis.dijagram(t, aprox,
             ylim=(-1.2, 1.2),
             naslov=f'Aproksimacija sa N={N} Walshovih funkcija')
```





Nakon pokretanja programa dobijaju se dijagrami originalne i aproksimirane funkcije. Ukoliko se poveća broj Walshovih funkcija na $N = 64$, greška aproksimacije se značajno smanjuje.

5. Spektralna analiza periodičkih signala

Kako je pokazano u prethodnom poglavlju, pri analizi kontinualnih signala koristi se metod razlaganja signala na linearnu kombinaciju drugih signala. Broj takvih signala može biti beskonačan. Pri izboru sistema funkcija kojima se vrši aproksimacija najbolje ga je izabrati tako da odgovara prirodi signala koji se aproksimira. Također, poželjno bi bilo da funkcije kojima se vrši aproksimacija budu uniformne na način da se mijenjaju po istom zakonu, a razlikuju se samo po parametru (koeficijentu). Poštujući prethodne principe, za analizu periodičkih signala treba izabrati prostoperiodičke funkcije koje su i najčešće korišteni ortogonalni sistem funkcija. Linearna kombinacija prostoperiodičkih funkcija, čije su učestanosti $k\omega_0$ cjelobrojni umnošci osnovne učestanosti ω_0, daje vremensku funkciju koja je periodička s periodom T_0, bez obzira na vrijednost koeficijenata. To znači da se za signal koji se aproksimira može izabrati jedinstveni skup vrijednosti koeficijenata, a postupak izbora koeficijenata određen je razvojem signala u Fourierov red (engl. *Fourier series - FS*).

5.1 Razvoj periodičkih signala u Fourierov red

Pomoću Fourierovih redova aproksimiraju se periodički signali na intervalu $t \in (-\infty, +\infty)$. U narednom izlaganju za razvoj signala u Fourierov red bit će korištena kompleksna forma prostoperiodičkih funkcija. Njihov potpun skup definiran je relacijom:

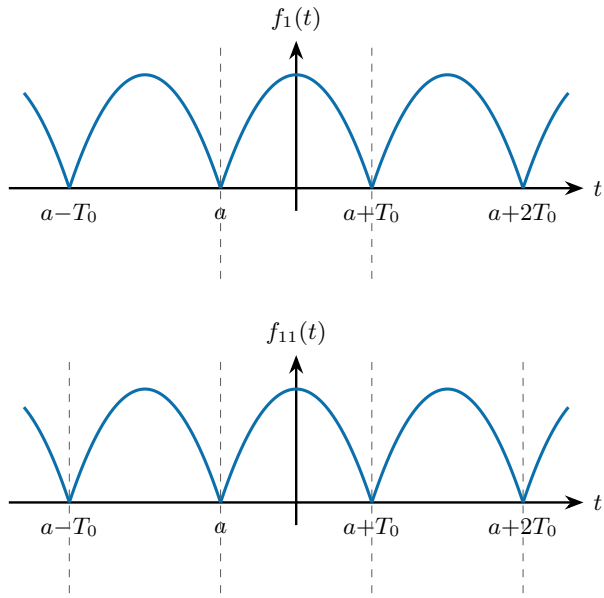
$$\left\{ f_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \right\}_{k=-\infty}^{+\infty} \tag{5.1}$$

gdje je: $j = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica, $k \in \mathbb{Z}$, a ω_0 – realna pozitivna konstanta koja se naziva ugaona (kružna) učestanost. Ove funkcije čine potpun skup ortogonalnih funkcija na intervalu $[a, b]$ ako je:

$$b - a = T_0, \quad T_0 = 2\pi/\omega_0$$

gdje je T_0 osnovni (fundamentalni) period periodičkog signala koji se aproksimira. Primjenom principa ortogonalnosti na kompleksne prostoperiodičke funkcije $f_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, dobije se:

$$\int_a^{a+T_0} f_k(t) f_m^*(t) dt = \int_a^{a+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0, & k = m \end{cases} \tag{5.2}$$



Slika 5.1: Aproksimacija periodičkog signala razvojem u Fourierov red na periodu.

jer je integral kompleksne prostoperiodičke funkcije $f_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$, na intervalu dužine T_0, jednak nuli. Aproksimacija signala $f(t)$ kompleksnim prostoperiodičkim funkcijama data je izrazom:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a \leq t \leq b, \quad b - a = T_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.3}$$

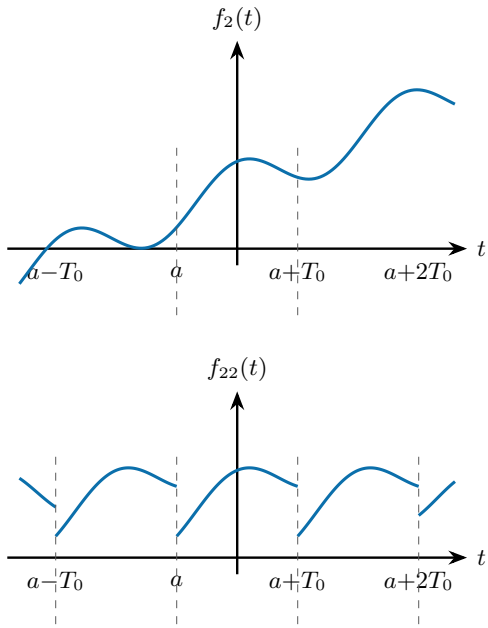
Da bi beskonačna suma u izrazu (5.3) za $f(t)$ konvergirala $\forall t \in [a, a + T_0]$, dovoljno je da budu zadovoljeni Dirichletovi uslovi:

- funkcija $f(t)$ je apsolutno integrabilna na periodu T_0, odnosno:

$$\int_a^{a+T_0} |f(t)|\, dt < \infty, \tag{5.4}$$

- $f(t)$ ima konačan broj ekstrema (minimuma, maksimuma) na periodu T_0,
- $f(t)$ ima konačan broj prekida (i svi su prve vrste) na periodu T_0.

Ako su Dirichletovi uslovi zadovoljeni, Fourierov red konvergira ka $f(t)$ u svim tačkama neprekidnosti. Na mjestima prekida, red konvergira ka srednjoj vrijednosti lijeve i desne granice funkcije. Greška pri aproksimaciji $e(t)$ u smislu srednje kvadratne greške jednaka je nuli, jer je skup funkcija kojima se vrši aproksimacija (5.1) potpun skup ortogonalnih funkcija.



Slika 5.2: Aproksimacija aperiodičkog signala razvojem u Fourierov red na konačnom intervalu.

Koeficijenti Fourierovog reda C_k signala $f(t)$ iz izraza (5.3) određuju udio funkcije $e^{jk\omega_0 t}$ u formiranju funkcije $f(t)$, a računaju se iz relacije:

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.5}$$

Kako su za razvoj u Fourierov red korištene kompleksne prostoperiodičke funkcije, to su i koeficijenti Fourierovog reda C_k, u općem slučaju, kompleksni. Konstanta a u relaciji (5.5) može imati proizvoljnu vrijednost, ali se obično koriste vrijednosti $a = 0$ ili $a = -T_0/2$. Signal $f(t)$ i koeficijenti C_k predstavljaju transformacioni par Fourierovog reda, jer se iz koeficijenata C_k može odrediti analitički oblik signala $f(t)$ koristeći relaciju (5.3), dok se iz $f(t)$ mogu odrediti koeficijenti C_k koristeći relaciju (5.5). Ta veza se može zapisati u obliku:

$$f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k \tag{5.6}$$

Veza funkcije i njenih koeficijenata (5.6) može biti od velike praktične koristi pri rješavanju različitih problema. Ukoliko se ispostavi da je neku (ili neke) matematičke operacije ili analize teško izvesti u vremenskom (t) domenu, onda se na toj etapi rješavanja problema prelazi u frekventni (ω) domen i rješavanje nastavlja odgovarajućim operacijama nad funkcijom u frekventnom domenu. Po potrebi se, inverznom transformacijom, signal može ponovo vratiti u vremenski domen.

Koeficijenti C_k (gdje je $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) koji u potpunosti definiraju periodički signal $f(t)$, se nazivaju **frekventni spektar signala** $f(t)$ ili **spektralni koeficijenti**,

jer je svakom koeficijentu Fourierovog reda pridružen po jedan kompleksni sinusni signal različite frekvencije i faze. Tako se definiraju slijedeći spektri:

C_k	- frekventni spektar
$\mathrm{Re}\,(C_k)$	- realni dio spektra
$\mathrm{Im}\,(C_k)$	- imaginarni dio spektra
$\lvert C_k \rvert$	- amplitudni spektar
$\arg\,(C_k)$	- fazni spektar

Spektralni koeficijenti C_k su alternativni način da se periodički signal $f(t)$, dat u vremenskom domenu, opiše u frekventnom domenu. Ta dva domena su komplementarna jedan drugom, ali zajedno omogućavaju bolje razumijevanje osobina signala. Kada se ovi koeficijenti pomnože kompleksnim funkcijama iz relacije (5.3) dobijaju se komponente razvoja signala, koje se nazivaju **harmonici**. Sabiranjem ovih komponenata dobija se polazni periodički signal $f(t)$.

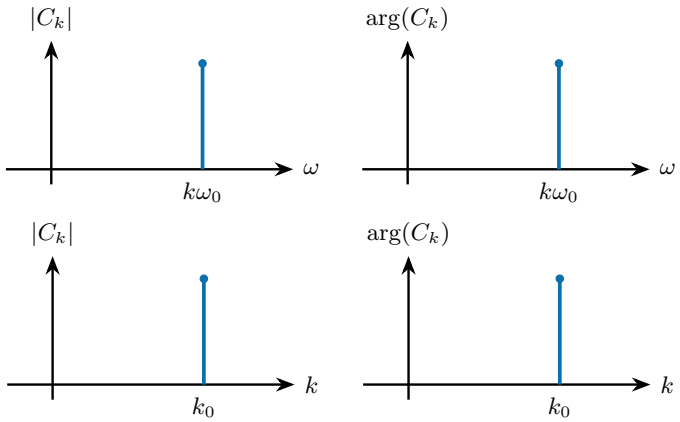
Na slikama 5.1 i 5.2 su prikazani periodički signal $f_1(t)$ i aperiodički signal $f_2(t)$. Aproksimacije tih signala Fourierovim redom su: $f_{11}(t)$ i $f_{22}(t)$. Periodički signal $f_1(t)$ (slika 5.1.) perioda T_0 podudara se sa Fourierovim redom i van intervala aproksimacije, pa Fourierov red $f_{11}(t)$ predstavlja signal $f_1(t)$ za sve vrijednosti vremena t. Ukoliko se radi o aperiodičkom signalu $f_2(t)$ (slika 5.2), signal i njegov Fourierov red $f_{22}(t)$ podudaraju se, u općem slučaju, samo na intervalu aproksimacije.

5.2 Grafički prikaz spektra

Grafički prikaz signala u vremenskom domenu omogućava brzo sagledavanje određenih odnosa koji postoje u talasnom obliku signala. Prikaz u vremenskom domenu ne predstavlja nikakvu principijelnu poteškoću, jer postoji puna dimenzionalna kompatibilnost - signal i njegov grafički prikaz se mogu predstaviti u dvije dimenzije.

S druge strane, dvodimenzionalni prikaz spektralnog domena se čini nemogućim s obzirom da se prostor ortogonalnih funkcija može tretirati kao višedimenzionalan, gdje svaka funkcija predstavlja dimenziju, a njen koeficijent koordinatu signala po toj dimenziji. Međutim, kako su sve funkcije istog oblika i razlikuju se samo po jednom parametru (ω_0) moguće je formirati prikaz signala u ω domenu pomoću spektra, što je vrlo korisno za daljnju obradu signala. Elemente spektra najpreglednije je prikazati kao na slici 5.3. Ovo direktno proističe iz fazorskog prikaza prostoperiodičke komponente. Ako se ovaj princip primijeni na sve komponente (harmonike) dobije se grafički prikaz amplitudnog i faznog spektra. Spektri se grafički predstavljaju vertikalnim linijama koje se mogu završavati crticom ili kružićem. Ove linije se mogu crtati na dva načina: u tačkama $k\omega_0$ (a na apscisi je ugaona frekvencija ω), ili u cjelobrojnim tačkama $k_0 \in \mathbb{Z}$ (a na apscisi je diskretna osa k). Pošto su vrijednosti spektra definirane samo za određene učestanosti i kako su veličine koeficijenata predstavljene linijama, ovakav prikaz se naziva diskretni ili linijski spektar - i *de-facto* predstavlja diskretni signal.

Važno je napomenuti da u općem slučaju nije dozvoljeno na ordinati prikazivati samo vrijednosti C_k, nego se mora prikazivati jedan od četiri spektra (amplitudni, fazni, realni ili imaginarni). **Međutim, kada je spektar C_k isključivo realan ili imaginaran, pri čemu može biti pozitivan ili negativan, u svrhu ilustracije je dozvoljeno crtati samo vrijednosti C_k. Ovaj pristup će biti korišten u nastavku knjige, tamo gdje to bude svrsishodno.**



Slika 5.3: Ekvivalentni grafički prikazi amplitudnog i faznog spektra.

5.3 Spektar realnog signala

Spektar realnog periodičkog signala $f(t)$ može se analitički izraziti preko parnog i neparnog dijela signala $f_p(t)$ i $f_n(t)$:

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \\ = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[f_p(t)+f_n(t)\right]\left[\cos\left(k\omega_0 t\right) - j\sin\left(k\omega_0 t\right)\right]dt \tag{5.7}$$

Spektar realnog periodičkog signala $f(t)$ sastoji se od realnog i imaginarnog dijela spektra:

$$C_k = \mathrm{Re}\left(C_k\right) + j\,\mathrm{Im}\left(C_k\right) \tag{5.8}$$

Kako je interval integriranja simetričan ($a = T_0/2$), $\cos\left(k\omega_0 t\right)$ parna funkcija po t, a $\sin\left(k\omega_0 t\right)$ neparna funkcija po t, dobije se:

$$\mathrm{Re}\left(C_k\right) = \frac{2}{T_0}\int_0^{+T_0/2} f_p(t)\left[\cos\left(k\omega_0 t\right)\right]dt \tag{5.9}$$

$$\mathrm{Im}\left(C_k\right) = -\frac{2}{T_0}\int_0^{+T_0/2} f_n(t)\left[\sin\left(k\omega_0 t\right)\right]dt \tag{5.10}$$

Iz ovih izraza izvode se slijedeći zaključci:

- ako je signal $f(t)$ parna funkcija, C_k su realni brojevi, jer je tada $f_n(t) \equiv 0$, tj. $\mathrm{Im}\left(C_k\right) = 0$,
- ako je signal $f(t)$ neparna funkcija, C_k su imaginarni brojevi, jer je tada $f_p(t) \equiv 0$ tj. $\mathrm{Re}\left(C_k\right) = 0$,
- kako su $\mathrm{Re}\left(C_k\right)$ i $\mathrm{Im}\left(C_k\right)$ funkcije od k, iz izraza (5.9) i (5.10) slijedi:

  - $Re\,(C_k)$ je parna funkcija od k jer je $\cos(k\omega_0 t)$ parna funkcija od k,
  - $\mathrm{Im}\,(C_k)$ je neparna funkcija od k jer je $\sin(k\omega_0 t)$ neparna funkcija od k.

- također, kako je kako je:

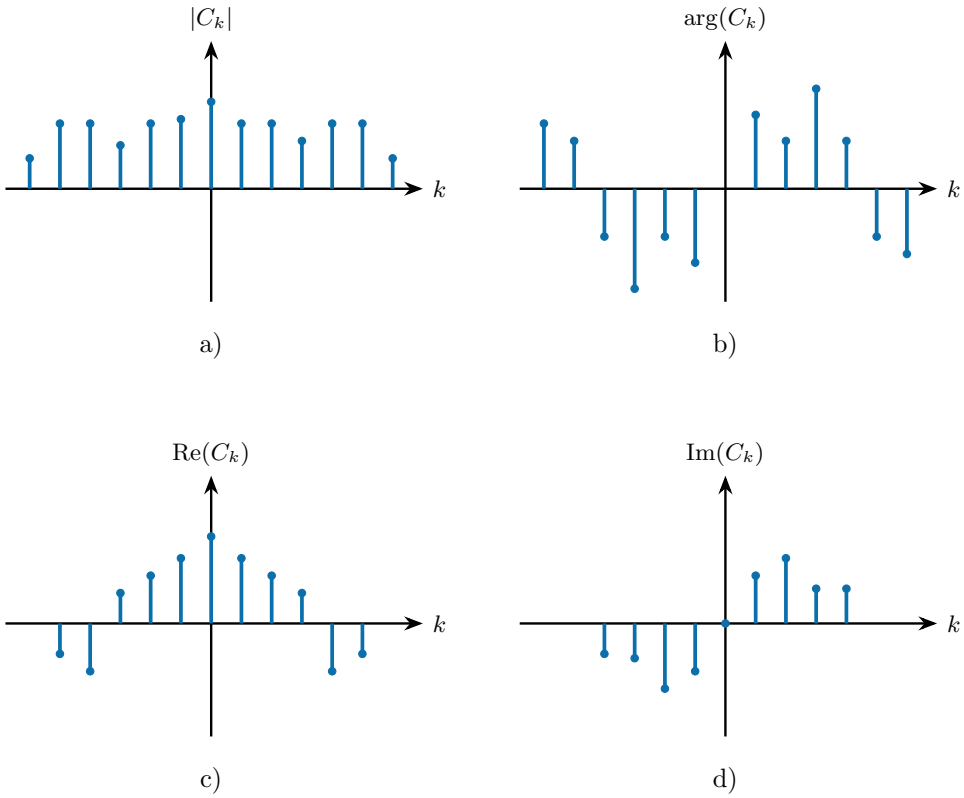
$$|C_k| = \sqrt{[\mathrm{Re}\,(C_k)]^2 + [\mathrm{Im}\,(C_k)]^2}, \quad \arg(C_k) = \mathrm{arctg}\,\frac{\mathrm{Im}\,(C_k)}{\mathrm{Re}\,(C_k)} \tag{5.11}$$

  slijedi:

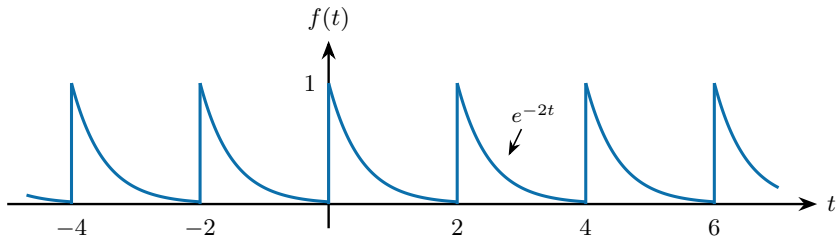
  - amplitudni spektar $|C_k|$ je parna funkcija od k,
  - fazni spektar $\arg(C_k)$ je neparna funkcija od k.

Zbog ovih osobina spektri realnih periodičkih fukcija se obično crtaju samo za k pozitivno, a zbog osobina parnosti i neparnosti lako se dobiju vrijednosti i za k negativno (slika 5.4.). Ovo omogućava da se C_{-k} dobije iz C_k :

$$C_{-k} = \mathrm{Re}\,(C_{-k}) + j\,\mathrm{Im}\,(C_{-k}) = \mathrm{Re}\,(C_k) - j\,\mathrm{Im}\,(C_k) = C_k^* \tag{5.12}$$



Slika 5.4: Primjeri spektara periodičkog signala: a) amplitudni, b) fazni, c) realni i d) imaginarni spektar.



Slika 5.5: Signal $f(t)$ u vremenskom domenu (primjer 5.1).

Bitno je napomenuti da se spektar dobijen iz kompleksnog Fourierovog reda prostire se simetrično na pozitivne i negativne učestanosti ω. Negativne učestanosti se pojavljuju samo zbog izbora ortogonalnog skupa trigonometrijskih funkcija u eksponencijalnom obliku (5.3). U kompleksnom Fourierovom redu svaki simetrični par članova daje čistu, prirodnu (realnu) prostoperiodičnu funkciju, tako da korištenje negativnih učestanosti ne smeta korištenju dobijenih rezultata za realne, fizikalno ostvarive signale. Prema tome, postojanje negativnih učestanosti treba posmatrati formalno, kao olakšicu da se što brže dođe do rezultata. Dvostrani spektar, sa negativnim učestanostima, naziva se **matematički spektar**, dok je jednostrani spektar (samo sa pozitivnim učestanostima) **prirodni spektar**.

Slijedeći primjeri ilustrirat će određivanje koeficijenata Fourierovog reda signala i određivanje originalnog signala iz koeficijenata.

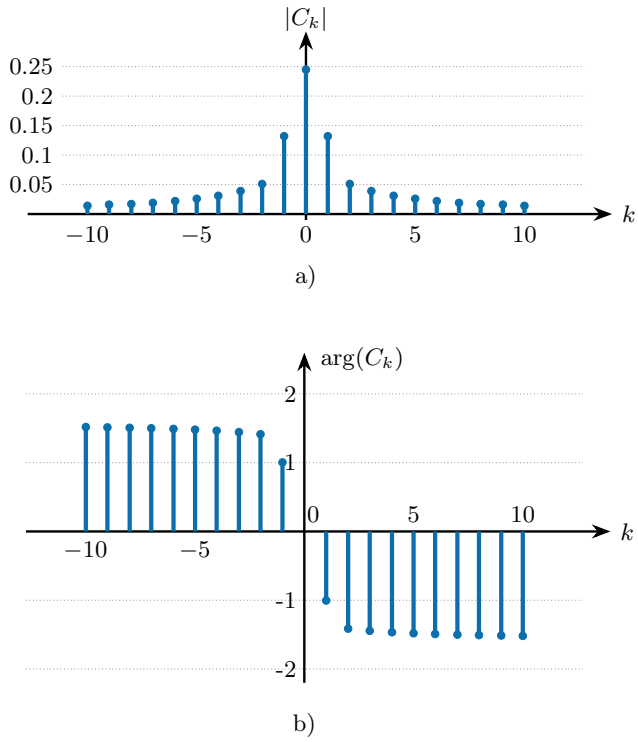
Primjer 5.1:

Odrediti koeficijente Fourierovog reda signala $f(t)$ prikazanog na slici 5.5.

Rješenje:
Period signala $f(t)$ je $T_0 = 2$, odnosno $\omega_0 = 2\pi/2 = \pi$. Na intervalu $0 \le t \le 2$, signal $f(t)$ može se opisati relacijom $f(t) = e^{-2t}$. Na osnovu relacije (5.5) koeficijenti C_k su:

$$C_k = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t}e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}dt = \frac{-1}{2(2+jk\pi)}e^{-(2+jk\pi)t}\Big|_0^2 =$$
$$= \frac{1}{4+jk2\pi}\left(1-e^{-4}e^{-jk2\pi}\right) = \frac{1-e^{-4}}{4+jk2\pi} = \frac{\left(1-e^{-4}\right)(4-j2k\pi)}{16+4k^2\pi^2}$$

Za $k = 0$ dobije se $C_0 = \left(1-e^{-4}\right)\cdot 4/16 \cong 0.25$, dok je $\arg(C_k) = 0$, jer je $\mathrm{Im}(C_k) = 0$. Za ostale vrijednosti k amplitudni i fazni spektar se dobiju na osnovu relacija (5.11). Na slici 5.6. nacrtan je amplitudni spektar ($|C_k|$) i fazni spektar ($\arg(C_k)$) signala $f(t)$.



Slika 5.6: a) Amplitudni spektar, b) fazni spektar signala (primjer 5.1).

Primjer 5.2:

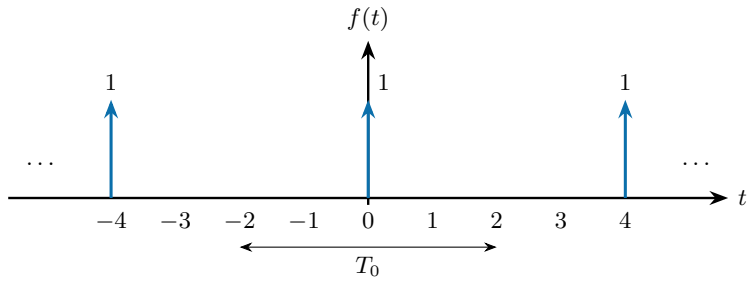
Odrediti koeficijente Fourierovog reda signala definiranog relacijom:

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 4r)$$

Rješenje:
Zadati signal je povorka impulsa (slika 5.7) fundamentalnog perioda $T_0 = 4$, pri čemu svaki period signala sadrži po jedan impuls. Signal $f(t)$ je paran, tako da su granice integriranja u relaciji (5.5) simetrične. Kako u tim granicama, odnosno samo u $t = 0$, signal $f(t)$ ima nenultu vrijednost i jednak je $\delta(t)$, to je:

$$C_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \delta(t) e^{-jk(2\pi/4)t} dt = \frac{1}{4}, \quad |C_k| = \frac{1}{4}, \quad \arg(C_k) = 0$$

U ovom slučaju amplitudni spektar je diskretno konstantan, a fazni je nula. Kako



Slika 5.7: Povorka impulsa perioda $T_0 = 4$ (primjer 5.2).

beskonačna suma iz relacije (5.3) ne konvergira, to signal $f(t)$ ne zadovoljava Dirichletove uslove. Međutim, proceduralno, primjena tehnike razvoja u Fourierov red povorke impulsa je korisna, bez obzira na matematičku nekorektnost pri ispitivanju konvergencije.

Primjer 5.3:

Odrediti koeficijente Fourierovog reda za signal definiran relacijom:

$$f(t) = 3\cos(\pi t/2 + \pi/4) \tag{5.13}$$

Rješenje:
Fundamentalni period signala $f(t)$ je $T_0 = 4$. Kako je $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/2$, relacija (5.3) se može napisati u obliku Fourierovog reda:

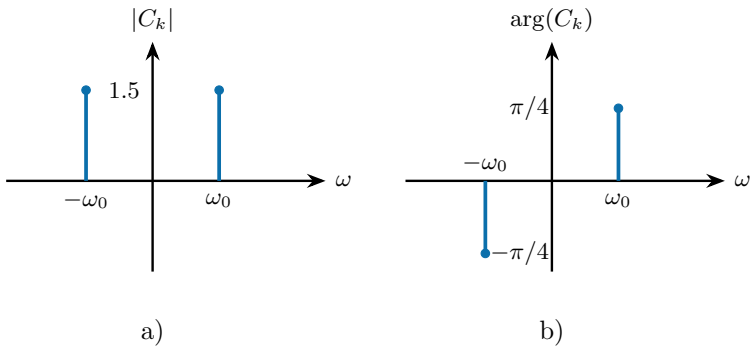
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\pi t/2} \tag{5.14}$$

Koristeći Eulerovu formulu signal $f(t)$, dat relacijom (5.13) može se napisati u kompleksnom obliku:

$$f(t) = 3 \cdot \frac{e^{j\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi t}{2}} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi t}{2}} \tag{5.15}$$

Poređenjem relacija (5.14) i (5.15) dobiju se Fourierovi koeficijenti:

$$C_k = \begin{cases} \frac{3}{2}e^{-j\pi/4}, & k = -1 \\ \frac{3}{2}e^{j\pi/4}, & k = 1 \\ 0, & \text{za ostale vrijednosti } k \end{cases} \tag{5.16}$$



Slika 5.8: a) Amplitudni spektar, b) fazni spektar signala (primjer 5.3).

Amplitudni i fazni spektar imaju po dvije nenulte komponente, i to za $k = \pm 1$ (slika 5.8.). Ukupna snaga periodičkog signala $f(t)$ je koncentrirana na dvije frekvencije $\omega = \pm\pi/2$.

Primjer 5.4:

Odrediti vremenski oblik signala $f(t)$ fundamentalnog perioda $T_0 = 2$, ako su spektralni koeficijenti:

$$C_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \cdot e^{jk\pi/20}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

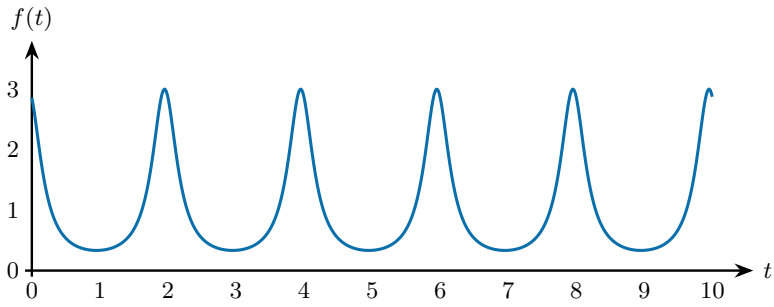
Rješenje:
Kako je $T_0 = 2$, to je $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$. Zamjenjujući spektralne koeficijente C_k i ω_0 u relaciju (5.3) dobije se:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t} =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk\pi/20} e^{jk\pi t} + \sum_{r=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{r} e^{-jr\pi/20} e^{-jr\pi t}$$

Rezultat sumiranja ove dvije geometrijske progresije je:

$$f(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^{j(\pi t + \pi/20)}} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j(\pi t + \pi/20)}} - 1 = \frac{3}{5 - 4\cos(\pi t + \pi/20)}$$

Signal $f(t)$ je sintetiziran programskim kodom 5.1 u Pythonu. Važno je napomenuti da prilikom sabiranja kompleksnih funkcija rezultat sabiranja će biti također kompleksna



Slika 5.9: Signal $f(t)$ (primjer 5.4).

funkcija, ali će u slučaju aproksimacije realne funkcije imaginarni dio biti zanemarivo mali. Zbog toga je prilikom vizualizacije potrebno ekstraktovati samo realni dio aproksimacije sa `np.real`.

Programski kod 5.1

```
t = np.arange(0, 10.001, 0.001)
x1 = 3 / (5 - 4 * np.cos(np.pi * t + (np.pi / 20)))

sis.dijagram(t, x1, naslov='$f(t)$')

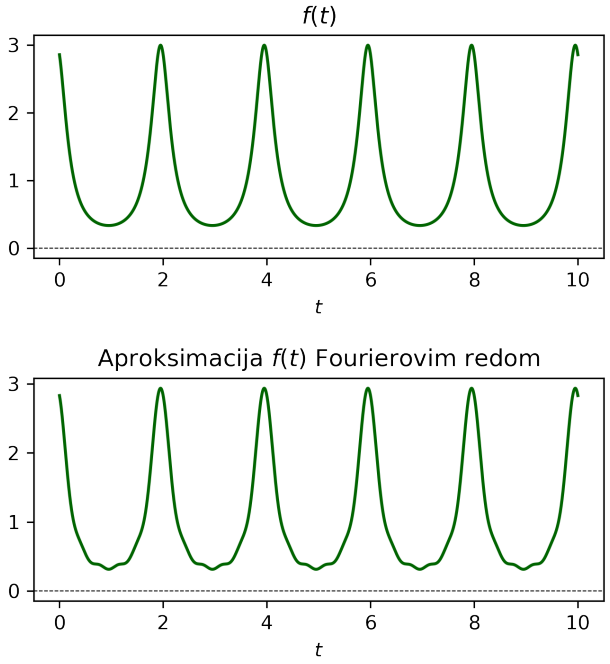
#aproksimacija sa M-harmonika
M = 5
w0 = np.pi

aproks = np.zeros(len(t))

for k in range(-M, M + 1):
    ck = ((0.5)**abs(k))* np.exp(1j* k * np.pi /20)
    aproks = aproks +  ck * np.exp(1j* k * w0 * t)

aproks = np.real(aproks)

sis.dijagram(t, aproks, naslov='Aproksimacija $f(t)$ Fourierovim redom')
```



Primjer 5.5:

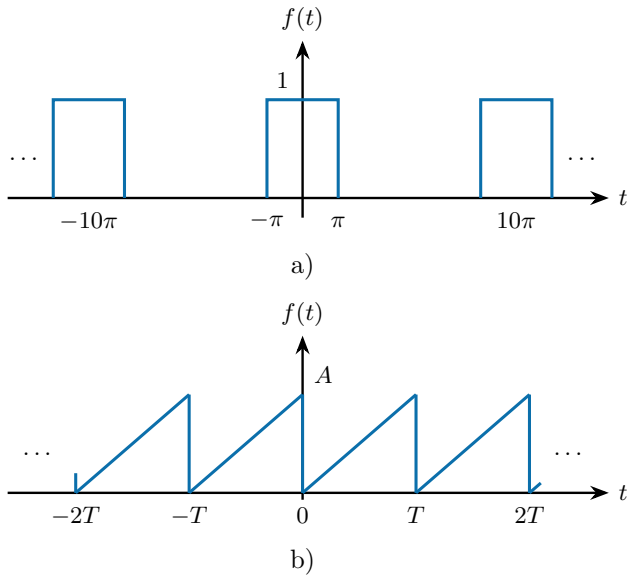
Za signale prikazane na slikama 5.10.a i 5.10.b naći koeficijente Fourierovog reda. Kolika je jednosmjerna komponenta tih signala?

Rješenje:
a) Signal prikazan na slici 5.10.a je periodički sa periodom $T_0 = 10\pi$ i kružnom učestanošću $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 1/5$. Za $k \neq 0$ koeficijenti Fourierovog reda su:

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-jk\omega_b t}dt \\ &= \frac{1}{10\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot e^{-\frac{jkt}{5}}dt = \frac{1}{10\pi}\cdot\frac{5}{-jk}e^{-\frac{jkt}{5}}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{jk}\left(e^{\frac{jk\pi}{5}} - e^{-\frac{jk\pi}{5}}\right) \\ &= \frac{1}{k\pi}\cdot\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) = \frac{1}{5}\,\mathrm{Sa}\left(\frac{k\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

Koeficijent C_0, koji predstavlja jednosmjernu komponentu signala $f(t)$, je:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt = \frac{1}{10\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{2\pi}{10\pi} = \frac{1}{5}$$



Slika 5.10: Periodički signali (primjer 5.5).

b) Signal prikazan na slici 5.10.b je također periodički sa periodom T_0 i kružnom učestanošću $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Za $k \neq 0$ koeficijenti Fourierovog reda su:

$$
\begin{aligned}
C_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{A}{T_0}\cdot t\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{A}{T_0^2}\int_0^{T_0} t\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{A}{T_0^2}\cdot\left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{(-jk\omega_0)^2}\right)(-jk\omega_0 t-1)\Bigg|_0^{T_0} \\
&= \frac{A}{T_0^2}\cdot\left(\frac{-1}{(k\omega_0)^2}\right)\left(e^{-jk\omega_0 T_0}\,(-jk\omega_0 T_0-1)-1(0-1)\right) \\
&= \frac{-A}{(k\omega_0 T_0)^2}\cdot\left(e^{-jk\omega_0 T_0}\,(-jk\omega_0 T_0-1)+1\right) \\
&= \frac{A}{(2k\pi)^2}\cdot\left(e^{-jk2\pi}(jk2\pi+1)-1\right) = \\
&= \frac{A}{(2k\pi)^2}\cdot jk2\pi = \frac{Aj}{2k\pi}
\end{aligned}
$$

Jednosmjerna komponenta signala prikazanog na slici 5.10.b je:

$$C_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \frac{A}{T_0}\cdot t dt = \frac{A}{T_0^2}\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{T_0} = \frac{A}{2}$$

Kao što se vidi iz integrala, jednosmjerna komponenta zapravo predstavlja srednju vrijednost signala na periodu T_0. To je ista ona srednja vrijednost (npr. napona) koju mjere instrumenti, srednja vrijednost napona na kondenzatoru kod punovalnog ispravljača, ili komponenta koja se uklanja na osciloskopu izborom položaja preklopnika DC-AC-GND na AC.

5.4 Trigonometrijski oblici Fourierovog reda

Ukoliko se želi izbjeći upotreba kompleksne konstante j, odnosno ako se želi raditi sa realnim koeficijentima, koriste se trigonometrijski oblici Fourierovog reda. Koristeći smjenu:

$$C_k = \frac{a_k - jb_k}{2}, \quad C_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2} \tag{5.17}$$

Fourierov red signala $f(t)$ postaje:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)\right] \tag{5.18}$$

Fourierovi koeficijenti zadanog signala su:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)dt \quad a_k = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \tag{5.19}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \tag{5.20}$$

Također, Fourierov red signala $f(t)$ može se dobiti smjenom:

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, \quad A_k^2 = a_k^2 + b_k^2, \quad \Phi_0 = 0, \quad \Phi_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} \tag{5.21}$$

odakle slijedi:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[A_k\cos(k\omega_0 t + \Phi_k)\right] \tag{5.22}$$

Kompleksna (5.3) i trigonometrijska forma (izrazi (5.18), (5.22)) Fourierovog reda su dva različita načina pisanja istog reda, jer su funkcije kojima se vrši aproksimacija samo alternativne forme predstavljanja prostoperiodičkih funkcija.

5.5 Osobine Fourierovog reda kontinualnih signala

Osobine Fourierovog reda (Tabela 5.1)) dokazuje se na osnovu relacija (5.3) i (5.5). Neka periodički signal $f(t)$ ima osnovni period T, učestanost $\omega_0 = 2\pi/T$ i koeficijente Fourierovog reda C_k :

$$f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k \tag{5.23}$$

Linearnost - ako periodički signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju koeficijente Fourierovog reda $C_k^{'}$ i $C_k^{''}$:

$$f_1(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k^{'}, \quad f_2(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k^{''} \tag{5.24}$$

onda će njihova linearna kombinacija imati koeficijent Fourierovog reda C_k koji je linearna kombinacija koeficijenata $C_k^{'}$ i $C_k^{''}$:

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k = \alpha_1 C_k^{'} + \alpha_2 C_k^{''} \tag{5.25}$$

Vremenski pomak - pomjeranje periodičkog signala $f_1(t)$ perioda T u vremenu se ostvaruje zamjenom promjenljive t sa $t - t_0$:

$$f_2(t) = f_1(t - t_0) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{T} \int_T f_1(t - t_0)\, e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{5.26}$$

$$= \frac{1}{T} \int_T f_1(\tau) e^{-jk\omega_0(\tau + t_0)} d\tau \tag{5.27}$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} \frac{1}{T} \int_T f_1(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \tag{5.28}$$

$$= e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot a_k$$

$$f_1(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} a_k \implies \quad f_1(t - t_0) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = b_k \tag{5.29}$$

Iz ovog izraza se vidi da vremenski pomak signala $f_1(t)$ za t_0 ne mijenja njegov amplitudni spektar, jer je: $|a_k| = |b_k|$. Također, vremensko pomjeranje periodičnog signala ne mijenja njegov period.

Vremenska refleksija - primjenom osobine vremenske refleksije period signala se ne mijenja. Za određivanje koeficijenata Fourierovog reda signala $f(-t)$ polazi se od Fourierovog reda tog signala:

$$f(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{-jk\omega_0 t} \tag{5.30}$$

Zamjenom $k = -m$ dobija se:

$$f(-t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{-m} e^{jm\omega_0 t} \tag{5.31}$$

Vidi se da desna strana relacije (5.31) ima oblik Fourierovog reda s koeficijentima C_{-k}, tako da ako je:

$$f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k \tag{5.32}$$

onda vrijedi:

$$f(-t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_{-k} \tag{5.33}$$

Vremensko skaliranje - za razliku od prethodnih transformacija, vremensko skaliranje je operacija koja podrazumijeva promjenu perioda signala. Ako je $f(t)$ periodički signal koji ima osnovni period T i kružnu učestanost $\omega_0 = 2\pi/T$, onda zamjena vremena t vremenom αt u signalu $f(t)$, za bilo koju realnu pozitivnu konstantu α, daje periodički signal $f(\alpha t)$ koji ima period T/α i učestanost $\alpha\omega_0$. Operacija vremenskog skaliranja se primjenjuje na svaki harmonik signala $f(t)$. Odatle slijedi da se koeficijenti Fourierovog reda neće promijeniti, ali će se promijeniti frekvencije na kojima se nalaze. Ako signal $f(t)$ ima Fourierov red dat relacijom (5.3), onda je:

$$f(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk(\alpha\omega_0)t} \tag{5.34}$$

Fourierov red signala $f(\alpha t)$ razlikuje se od Fourierovog reda signala $f(t)$, jer se osnovna učestanost promjenila.

Proizvod periodičkih signala - neka periodički signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju isti period T i koeficijente Fourierovog reda a_k i b_k:

$$f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} a_k, \quad f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t} \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} b_k$$

Proizvod ta dva periodička signala je periodički signal perioda $T/2$ s koeficijentima Fourierovog reda C_k :

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n} \tag{5.35}$$

Suma na desnoj strani relacije (5.35) može se interpretirati kao konvoluciona suma diskretnih signala koji predstavljaju koeficijente Fourierovog reda signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$.

Konjugovanje - ako periodički signal $f(t)$ ima koeficijente Fourierovog reda C_k, onda njegova konjugovano kompleksna vrijednost $f^*(t)$ ima koeficijente Fourierovog reda C^*_{-k}:

$$f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k \implies f^*(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C^*_{-k} \tag{5.36}$$

Ova osobina se dokazuje na osnovu relacije (5.3), konjugovanjem obje strane te relacije, a zatim se sumaciona promjenljiva k zamijeni sa $-k$. Važno je primijetiti da ako je signal $f(t)$ realan, onda je $f(t) = f^*(t)$, pa prema relaciji (5.36) koeficijenti Fourierovog reda će biti konjugovano simetrični, tj:

$$C_{-k} = C^*_k \tag{5.37}$$

Parsevalova relacija za periodičke kontinualne signale - daje vezu između srednje

snage periodičnog signala i koeficijenata razvoja u Fourierov red. Ona ima sljedeći oblik:

$$\frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \tag{5.38}$$

gdje su C_k koeficijenti Fourierovog reda, a T period signala $f(t)$. Lijeva strana relacije (5.38) je srednja snaga (odnosno energija po jedinici vremena) na jednom periodu signala $f(t)$. Srednja snaga k-tog harmonika signala $f(t)$ je:

$$\frac{1}{T}\int_T \left|C_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2 dt = \frac{1}{T}\int_T |C_k|^2 dt = |C_k|^2 \tag{5.39}$$

Dakle, po Parsevalovoj relaciji ukupna srednja snaga periodičkog signala jednaka sumi srednjih snaga svih harmonika.

5.6 Prostiranje periodičkih signala kroz LTI sisteme

Neka je ulaz u linearni i stacionarni sistem, koji ima frekventnu funkciju sistema $H(j\omega)$, periodički signal opisan Fourierovim redom. Odziv sistema na taj signal je:

$$g(t) = L\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k L\left\{e^{jk\omega_0 t}\right\} \tag{5.40}$$

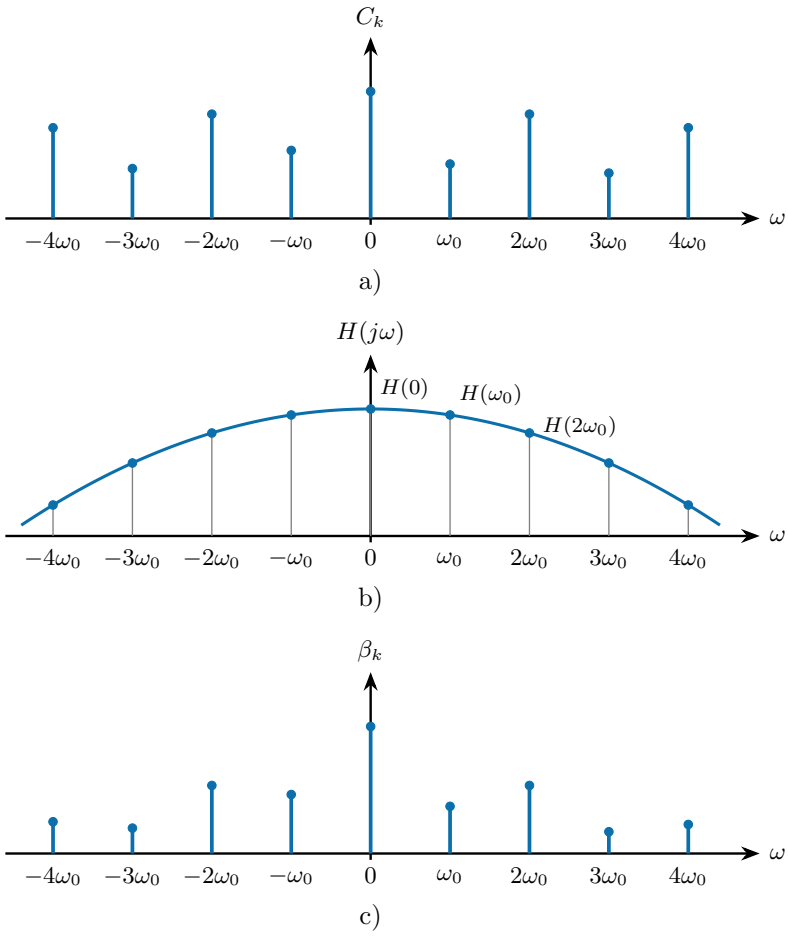
Ako se iskoristi relacija koja daje odziv linearnog i vremenski invarijantnog sistema na ulaznu funkciju oblika $e^{jk\omega_0 t}$, dobije se:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k H\left(jk\omega_0\right) e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{5.41}$$

Dakle, spektar odziva sistema dobije se kao proizvod frekventne funkcije sistema i spektra ulaznog periodičkog signala. Odziv je periodički signal, kao i ulazni, samo su članovi Fourierovog reda umjesto C_k sada β_k. Grafička predstava ove operacije je data na slici 5.11.

Zbog jednostavnije interpretacije može se uzeti da su spektri C_k i $H\left(jk\omega_0\right)$ realni. Ispod spektra C_k crta se frekventna funkcija sistema $H(j\omega)$. Vrijednosti $H(j\omega)$ u tačkama $k\omega_0$ daju $H\left(jk\omega_0\right)$. Spektar izlaza β_k dobije se množeći vrijednosti odgovarajućih linija u tačkama $k\omega_0$. Na taj način može se, na osnovu spektra ulaza i frekventne funkcije sistema, relativno jednostavno odrediti spektar odziva i procijeniti kakav tip transformacije će imati signal pri prostiranju kroz neki sistem.

Ako je, npr. $H(j\omega)$ relativno ravna (konstantna) funkcija za $|\omega| \leq \omega_c$, gdje je ω_c granična učestanost frekventne funkcije sistema, a spektar je takav da je $C_k \cong 0$ za $|\omega| > \omega_c$, onda se može zaključiti da će sistem propuštati niskofrekventne komponente ulaznog signala, a gušiti visokofrekventne komponente signala. Sistem koji bez ikakve promjene propušta sve harmonike kružne učestanosti $k\omega_0$ za koje vrijedi $|k\omega_0| \leq \omega_c$, a ne propušta harmonike sa kružnim učestanostima $|k\omega_0| > \omega_c$, naziva se (idealni) niskopropusni filter.



Slika 5.11: a) Spektar ulaznog signala, b) frekventna funkcija sistema, c) spektar odziva.

Primjer 5.6:

Na ulazu linearnog i vremenski invarijantnog sistema (LTI) opisanog diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{g}(t) + g(t) = f(t)$$

je doveden periodički signal. Odrediti koeficijente razvoja u Fourierov red ($\beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right), k \in \mathbb{Z}$) odziva $g(t)$ LTI sistema, ako je ulazu signal:
a) $f(t) = \cos^2 t$
b) $f(t) = \cos t + \sin t + \cos^2 t$
c) $f(t) = \cos^2 t + \sin t + \sin 2t$

Rješenje:
Na osnovu relacija (5.40) i (5.41) odziv sistema je:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

a) Koeficijenti C_k signala $f(t)$ određuju se primjenjujući trigonometrijske relacije na zadati signal:

$$f(t) = \cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} = \frac{1}{4}e^{-j2t} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2t}$$

Signal $f(t)$ ima osnovni period $T_0 = 2\pi/2 = \pi$, odnosno kružnu učestanost $\omega_0 = 2$. Dobijeni oblik signala $f(t)$ poredi se sa relacijom (5.3), odakle slijedi da je: $C_0 = 1/2$, a $C_{-1} = C_1 = 1/4$. Za ostale vrijednosti k, koeficijenti C_k su nula. Frekventna funkcija sistema određuje se iz zadate diferencijalne jednačine:

$$e^{j\omega t}H(j\omega)\cdot j\omega + e^{j\omega t}H(j\omega) = e^{j\omega t} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$$

$$H\left(jk\omega_0\right) = \frac{1}{1+jk\omega_0}, \quad \omega_0 = 2,$$

Traženi koeficijenti β_k su:

$$\beta_{-1} = \frac{1}{4(1-2j)}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{4(1+2j)},$$

dok su za ostale k koeficijenti $\beta_k = 0$.

b) Ulazni signal $f(t) = \cos t + \sin t + \cos^2 t$ ima osnovni period $T_0 = 2\pi$, a kružnu učestanost $\omega_0 = 1$. Koeficijenti se dobiju na slijedeći način:

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos t + \sin t + \cos^2 t = \cos t + \sin t + \frac{1}{2}(1+\cos 2t) \\ &= \frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2} + \frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e^{j2t}+e^{-j2t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}e^{-j2t} + \left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right)e^{-jt} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right)e^{jt} + \frac{1}{4}e^{j2t} \end{aligned}$$

Odavde se očitava:

$$C_{-2} = \frac{1}{4}, \quad C_{-1} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, \quad C_0 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{4}$$

Frekventna funkcija sistema za $\omega_0 = 1$ je:

$$H\left(jk\omega_0\right) = H(jk) = \frac{1}{1+jk} = \frac{1-jk}{1+k^2}$$

pa su koeficijenti β_k :

$$\beta_{-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1+2j}{5} = \frac{1+2j}{20}, \beta_{-1} = \frac{1+j}{2}\cdot\frac{1+j}{2} = \frac{j}{2}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2}$$

$$\beta_1 = \frac{1-j}{2}\cdot\frac{1-j}{2} = \frac{-j}{2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1-2j}{5} = \frac{1-2j}{20}$$

Ostali koeficijenti $\beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right)$ su nula.

c) Za ulazni signal $f(t) = \cos^2 t + \sin t + \sin 2t$ kružna učestanost je također $\omega_0 = 1$, a koeficijenti se dobiju na sličan način kao u prethodna dva slučaja:

$$f(t) = \cos^2 t + \sin t + \sin 2t = e^{-j2t}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2j}\right) - \frac{1}{2j}e^{-jt} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2j}e^{jt} + e^{j2t}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2j}\right)$$
$$\Longrightarrow C_{-2} = \frac{1}{4} + j\frac{1}{2}, \quad C_{-1} = j\frac{1}{2}, \quad C_0 = \frac{1}{2}, \quad C_1 = -j\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{4} - j\frac{1}{2}$$

Dalje se izračunava:

$$H\left(jk\omega_0\right) = H(jk) = \frac{1}{1+jk}$$
$$\beta_{-2} = \left(\frac{1}{4} + j\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-2j} = \frac{-3+j4}{20}, \quad \beta_{-1} = \frac{-j}{2-2j} = \frac{-1+j}{4}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2}$$
$$\beta_1 = \frac{-j}{2+2j} = \frac{-1-j}{4}, \quad \beta_2 = \left(\frac{1}{4} - j\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1+2j} = \frac{-3-j4}{20}$$

Ostali $\beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right)$ su jednaki nuli.

5.7 Niskopropusni filter

Važna klasa LTI sistema uključuje sisteme kod kojih je frekventni odziv jednak jedinici u datom opsegu frekvencija, a jednak nuli van tog opsega. Takav je idealni selektivni filter (engl. *Ideal Frequency-selective Filter*). Osnovna funkcija filtra je uobličavanje spektra signala, što se svodi na propuštanje dijela spektra signala koji leži u propusnom opsegu učestanosti (engl. *passband*) i slabljenju dijela spektra signala koji leži u nepropusnom opsegu (engl. *stopband*). U propusnom opsegu amplitudna karakteristika treba da bude konstantna, a fazna karakteristika linearna, jer takav sistem unosi samo pojačanje i konstantno kašnjenje, što se ne smatra izobličenjem signala.

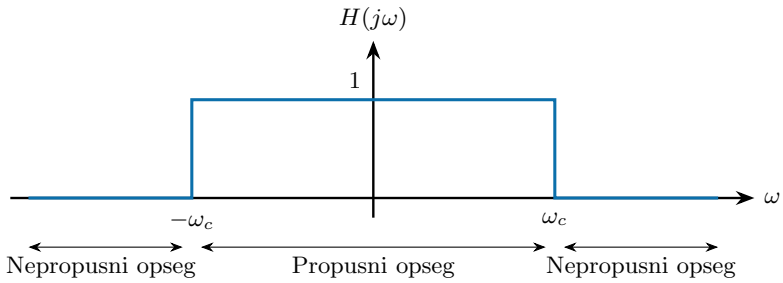
Frekventna funkcija niskopropusnog filtra - NF (engl. *Lowpass filter - LP*) je data sa:

$$H(j\omega) = \begin{cases} C\cdot e^{-j\omega t_d}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} = C\cdot e^{-j\omega t_d}\cdot p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \tag{5.42}$$

Ako je $C = 1$ i $t_d = 0$, $H(j\omega)$ je realna funkcija (slika 5.12.), a opisana je relacijom:

$$H(j\omega) = p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \tag{5.43}$$

Frekvencija ω_c (engl. *cutoff frequency*) definira granicu između propusnog i nepropusnog opsega. Za praktičnu primjenu dovoljno su dobri sistemi koji imaju frekventnu funkciju



Slika 5.12: Frekventni odziv idealnog niskopropusnog filtera.

sistema približno jednaku funkciji sistema idealnog niskopropusnog filtera, ali fizički ostvarivu (kauzalnu). Idealni niskopropusni filter s graničnom frekvencijom ω_c, predstavljen na slici 5.12 nije fizički ostvariv (nekauzalan je), jer je impulsni odziv idealnog niskopropusnog filtera nekauzalan signal (Sa - funkcija)

Djelovanje niskopropusnog filtra na signal koji kroz njega prolazi, može se vidjeti iz slijedećeg primjera (slika 5.13.).

Neka signal $f_1(t)$ ima spektar C_k^1 u oblasti niskih učestanosti (slika 5.13.a). Poslije prostiranja signala kroz niskopropusni filter, njegov spektar je praktično nepromijenjen, što znači da će i signal ostati skoro nepromijenjen. Međutim, signal $f_2(t)$, sa spektrom C_k^2 (slika 5.13.b) sadrži značajan doprinos viših harmonika, i kako oni nestaju pri prostiranju kroz idealni niskopropusni filter, signal će biti značajnije promijenjen.

Treba napomenuti da u slučaju signala koji je spektralno neograničen (u svom razvoju sadrži beskonačno mnogo harmonika), prostiranje kroz idealni niskopropusni filter je ekvivalentno razvoju signala u Fourierov red s konačnim brojem harmonika. Naime, ako filter propušta sve harmonike do m-tog bez ikakve promjene, a ostale potpuno zaustavlja, onda se na osnovu ulaza u sistem:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.44}$$

odziv sistema može napisati preko konačne sume:

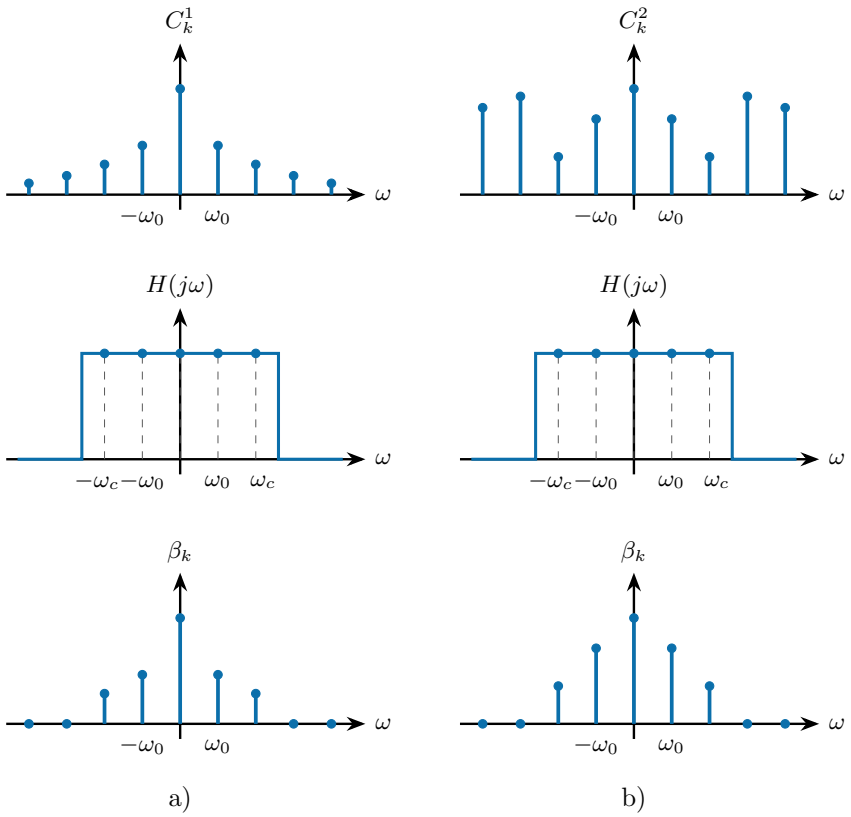
$$g(t) = \sum_{k=-m}^{m} C_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.45}$$

gdje je m određeno sa $m\omega_0 \leq \omega_c$ i $(m+1)\omega_0 > \omega_c$.

5.8 Srednja snaga periodičkog signala

Zahvaljujući osobini ortogonalnosti, srednja snaga periodičkog signala može se izraziti preko spektra:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_{-m} e^{-jm\omega_0 t} \right] dt \tag{5.46}$$



Slika 5.13: Prostiranje signala kroz niskopropusni filter: a) ulazni spektar je pretežno niskofrekventni, b) ulazni spektar ima izraženije prisustvo viših harmonika.

Iz principa ortogonalnosti je:

$$\int_a^{a+T_0} e^{j(k-m)\omega_0 t}dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T_0, & k = m \end{cases}$$

Obzirom da izbor parametra a ne utječe na iznos srednje snage, obično se radi lakšeg računanja usvaja $a = -T_0/2$ ili 0. Iz navedenog slijedi:

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} C_k e^{jk\omega_0 t} C_{-m} e^{-jm\omega_0 t} dt \right]$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[C_k C_{-m} \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt}_{=0\,(k\neq m),\quad =T_0\,(k=m)} \right]$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k C_{-k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 = |C_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} |C_k|^2 \tag{5.47}$$

Vidi se da srednja snaga periodičkog signala zavisi samo od njegovog amplitudnog spektra. Ako se analizira doprinos snazi individualnog k-tog harmonika:

$$P_k = \frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} \left[C_k e^{jk\omega_0 t}\right]\left[C_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right] dt = |C_k|^2 \tag{5.48}$$

može se zaključiti da je srednja snaga periodičkog signala jednaka sumi srednjih snaga njegovih harmonika.

Također, srednja snaga signala može se izračunati i preko koeficijenata drugih oblika Fourierovog reda (relacije (5.18) i (5.22)):

$$P = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} A_k^2 \tag{5.49}$$

5.9 Promjena srednje snage signala pri prostiranju kroz LTI sistem

Srednja snaga ulaznog signala $f(t)$, opisanog Fourierovim redom sa spektralnim koeficijentima C_k jednaka je P_f :

$$P_f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \tag{5.50}$$

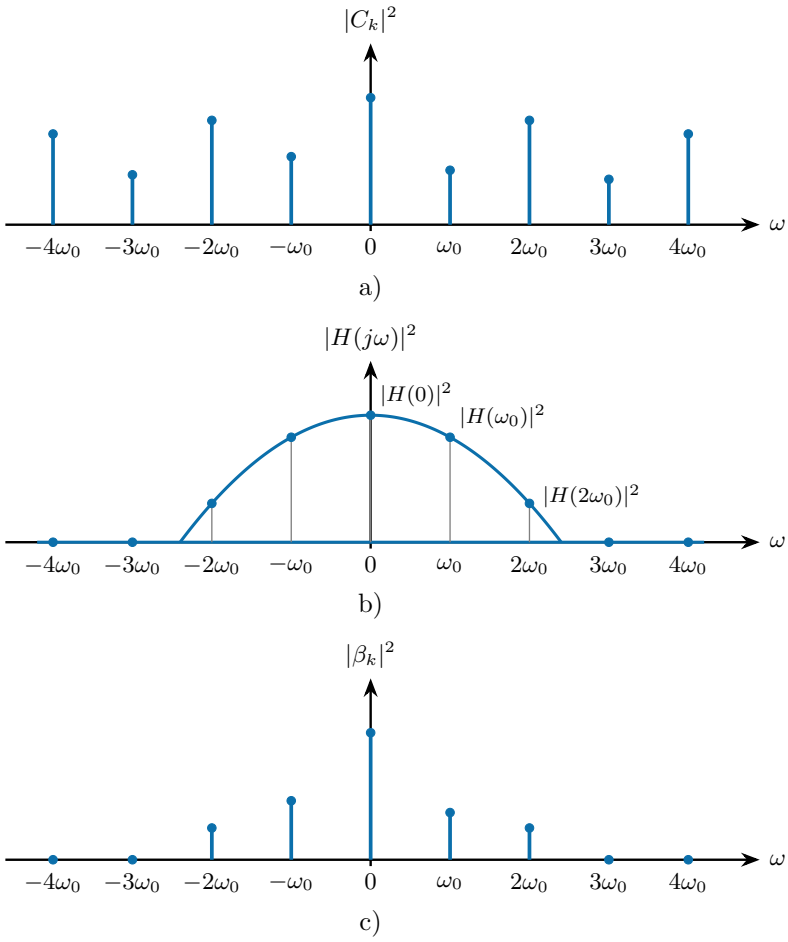
Kako je odziv LTI sistema određen relacijom:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \beta_k = C_k H\left(jk\omega_0\right) \tag{5.51}$$

to će srednja snaga izlaznog signala $g(t)$ biti P_g :

$$P_g = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\beta_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|H\left(jk\omega_0\right)\right|^2 |C_k|^2 \tag{5.52}$$

Relacija (5.52) može se grafički predstaviti kao na slici 5.14. Prvo se crta spektar snage ulaznog signala koji ima spektralne linije na $k\omega_0$, čija je visina $|C_k|^2$. Ispod tog spektra crta se funkcija $|H(j\omega)|^2$, tj. kvadrat apsolutne vrijednosti frekventne funkcije sistema. Vrijednosti ove funkcije u tačkama $k\omega_0$ daju $\left|H\left(jk\omega_0\right)\right|^2$. Kada se odgovarajuće visine linija pomnože, dobije se spektar snage izlaznog signala $|\beta_k|^2$. Srednja snaga dobije se kao suma visina svih linija.



Slika 5.14: Grafička predstava promjene srednje snage signala pri prolasku kroz LTI sistem.

Specijalno, ako je u pitanju idealni niskopropusni filter, kod koga je $H\left(jk\omega_0\right) = 1$ za $|\omega| \leq \omega_c$, srednja snaga izlaznog signala je:

$$P_g = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 \left|H\left(jk\omega_0\right)\right|^2 = \sum_{k=-m}^{m} |C_k|^2 \tag{5.53}$$

gdje je m određeno sa:

$$m\omega_0 \leq \omega_c \quad \wedge \quad (m+1)\omega_0 > \omega_c \tag{5.54}$$

5.10 Uticaj pojedinih harmonika na oblik signala

Uticaj pojedinih harmonika na oblik signala može se sagledati na primjeru periodičkog signala $f(t)$ prikazanog na slici 5.15. Spektar datog signala je:

$$C_k \underset{k\neq 0}{=} \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{+T_0/2} 1\cdot e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, \quad C_0 = \frac{1}{2} \tag{5.55}$$

Odgovarajući Fourierov red je:

$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t) + \frac{2}{5\pi}\cos(5\omega_0 t) - \frac{2}{7\pi}\cos(7\omega_0 t) + \dots$$

Ako se uvedu oznake:

$$f_0(t) = \frac{1}{2}; \quad f_1(t) = \frac{2}{\pi}\cos(\omega_0 t); \quad f_3(t) = -\frac{2}{3\pi}\cos(3\omega_0 t)\dots$$

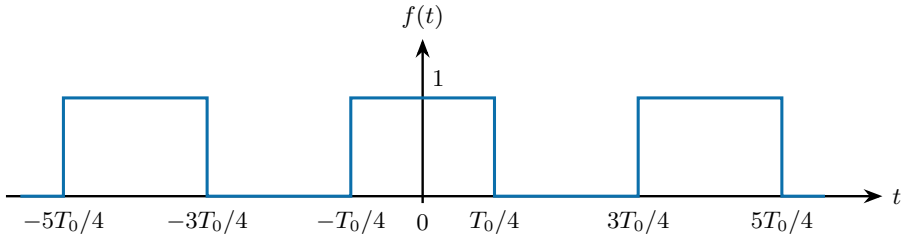
onda se na slici 5.16. može pratiti uticaj pojedinih harmonika na oblik signala.

Ako se uzmu u obzir samo niži harmonici, odstupanje aproksimacije od funkcije $f(t)$ je najveće tamo gdje je izvod funkcije, koja se dobije aproksimacijom, najveći, jer veće vrijednosti izvoda po definiciji podrazumijevaju veću brzinu promjene funkcije, a veća brzina podrazumijeva više frekvencije (broj promjena u jedinici vremena). Dodavanjem viših harmonika povećava se nagib funkcije koja se dobije aproksimacijom i sužava oblast u kojoj je odstupanje veliko. Ustvari, viši harmonici formiraju dijelove signala sa velikim izvodima. Na osnovu toga može se zaključiti da signal koji sadrži veće vrijednosti izvoda ima širok spektar.

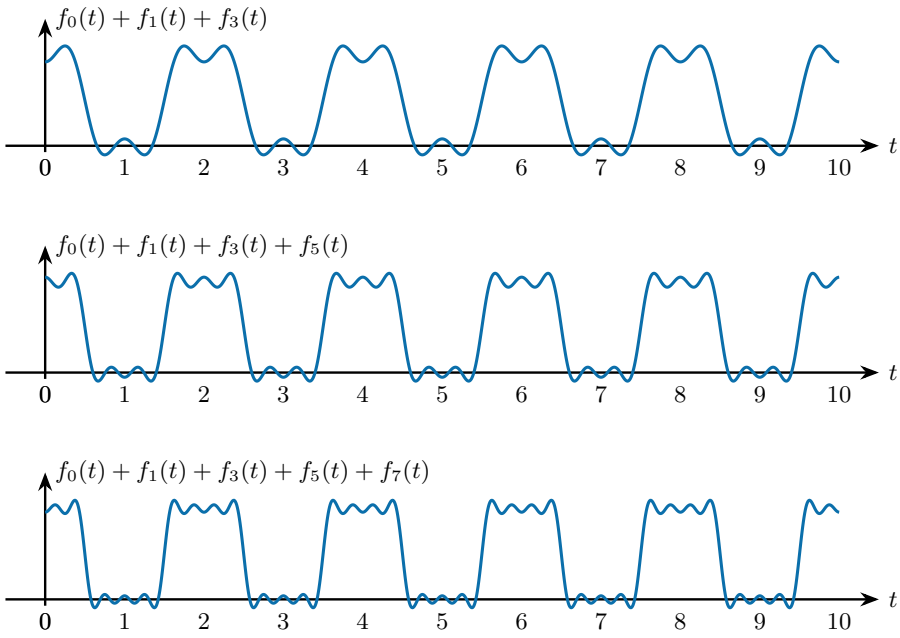
Uticaj viših harmonika na ukupnu snagu spektra može se egzaktno ocijeniti. Neka je srednja snaga signala P, a snaga aproksimiranog signala, koji sadrži samo m harmonika, P_m. Razlika snaga ova dva signala je:

$$P - P_m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2 - \sum_{k=-m}^{m} |C_k|^2 = 2\sum_{k=m+1}^{+\infty} |C_k|^2$$

U ovom slučaju nulti, prvi i treći harmonik obuhvataju skoro 95% ukupne snage signala.



Slika 5.15: Primjer periodičkog signala $f(t)$.



Slika 5.16: Uticaj pojedinih harmonika na oblik signala (prikaz za $T_0 = 2$).

Za signal iz prethodnog primjera (slika 5.16.) doprinos pojedinih harmonika ukupnoj snazi signala, dat je sljedećom tabelom:

Harmonik	$f_0(t)$	$f_1(t)$	$f_3(t)$	$f_5(t)$	$f_7(t)$
P[%] ukupne snage signala	50%	40.2%	4.6%	0.8%	0.4%

Primjer 5.7:

Periodički signal $f(t)$, prikazan na slici 5.16 za $T_0 = 1$. ulazi u idealni niskopropusni filter sa graničnom učestanosti ω_c. Odrediti intervale mogućih vrijednosti granične učestanosti ω_c, tako da filter propusti samo:
a) istosmjernu komponentu,
b) istosmjernu komponentu i prvi harmonik,
c) istosmjernu komponentu, prvi, drugi i treći harmonik.
Za sve tri varijante naći procenat izlazne snage u odnosu na snagu ulaznog signala!

Rješenje:
Na osnovu $T_0 = T = 1$ slijedi $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi$. Koeficijenti razvoja u Fourierov red

za $k \neq 0$ su:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{1}\int_{-1/4}^{1/4} 1 \cdot e^{-jk2\pi t}dt = -\frac{1}{jk2\pi}\cdot\left(e^{\frac{-jk2\pi}{4}} - e^{\frac{jk2\pi}{4}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{jk2\pi}\cdot\left(e^{\frac{-jk\pi}{2}} - e^{\frac{jk\pi}{2}}\right) = \frac{1}{k\pi}\cdot\frac{\left(e^{\frac{jk\pi}{2}} - e^{\frac{-jk\pi}{2}}\right)}{2j} = \frac{1}{k\pi}\cdot\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Sa}\,\frac{k\pi}{2}$$

Koeficijent C_0 se računa iz:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{1}\int_{-1/4}^{1/4} 1 \cdot dt = t|_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{2}$$

Srednja snaga signala je:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \frac{1}{1}\int_{-1/4}^{1/4} 1^2 \cdot dt = t|_{-1/4}^{1/4} = \frac{1}{2}$$

a) Da bi filter propustio samo istosmjernu komponentu, mora biti zadovoljen uslov $0 \leq \omega_c < \omega_0$, odnosno $0 \leq \omega_c < 2\pi$, pa se snaga računa na sljedeći način:

$$P_{izl} = P_0 = C_0^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$P_{izl}(\%) = \frac{P_0}{P}\cdot 100\% = \frac{1/4}{1/2}\cdot 100\% = 50\%$$

b) Da bi filter propustio istosmjernu komponentu i prvi harmonik, mora biti zadovoljen uslov $\omega_0 \leq \omega_c < 2\omega_0$, odnosno $2\pi \leq \omega_c < 4\pi$, pa se snaga računa na sljedeći način:

$$C_0 = \frac{1}{2}$$
$$C_1 = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{Sa}\,\frac{k\pi}{2} = \frac{1}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}, \quad P_1 = 2\left|C_1\right|^2 = 2\left|\frac{1}{\pi}\right|^2 = 0.2028$$
$$P_{izl} = P_0 + P_1 = 0.25 + 0.2028 = 0.4528$$
$$P_{izl}(\%) = \frac{P_0 + P_1}{P}\cdot 100\% = \frac{0.4528}{0.5}\cdot 100\% = 90.56\%$$

c) Da bi filter propustio istosmjernu komponentu, prvi, drugi i treći harmonik, mora biti zadovoljen uslov $3\omega_0 \leq \omega_c < 4\omega_0$, odnosno $6\pi < \omega_c \leq 8\pi$, pa se snaga računa na

sljedeći način:

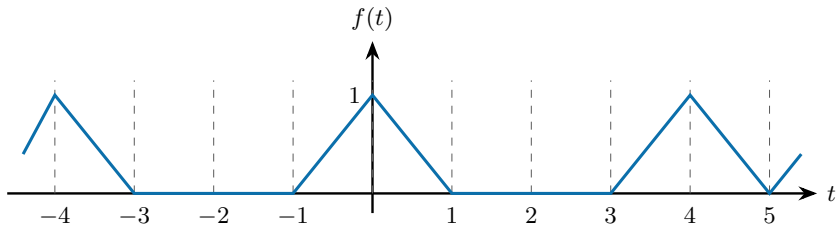
$$C_0 = \frac{1}{2}, \quad P_0 = \frac{1}{4}, \quad C_1 = \frac{1}{\pi}, \quad P_1 = 0.2028$$
$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot Sa\frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sin\pi = 0, \quad P_2 = 2\left|C_2\right|^2 = 0$$
$$C_3 = \frac{1}{2} \cdot Sa\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{3\pi} \cdot \sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{1}{3\pi}, \quad P_3 = 2\left|C_3\right|^2 = 2\left|-\frac{1}{3\pi}\right|^2 = 0.0225$$
$$P_{izl} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0.25 + 0.2028 + 0 + 0.0225 = 0.4753$$
$$P_{izl}(\%) = \frac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3}{P} \cdot 100\% = \frac{0.4753}{0.5} \cdot 100\% = 95.06\%$$

Primjer 5.8:

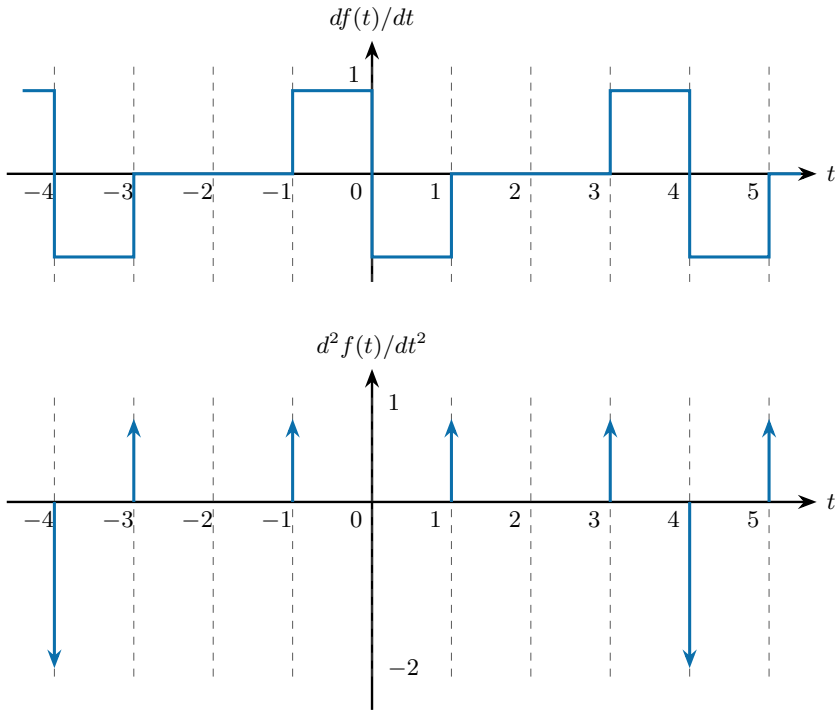
Periodički signal $f(t)$, prikazan na slici 5.17 propagira se kroz idealni niskopropusni filter, čija je granična učestanost ω_c. Koliko maksimalno harmonika može propustiti filter tako da se ne propusti više od 90% srednje snage ulaznog signala? Naći srednju snagu izlaznog signala. U kojem intervalu može biti granična učestanost filtera da bi propustio ovaj broj harmonika?

Rješenje:
Sa slike 5.17. vidi se da signal $f(t)$ ima period $T = 4$, a kružnu učestanost $\omega_0 = 2\pi/T = \pi/2$. Srednja snaga ulaznog signala je:

$$P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f^2(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} f^2(t)dt = \frac{1}{4}\left\{\int_{-1}^{0}(t+1)^2dt + \int_{0}^{1}(-t+1)^2dt\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\int_{-1}^{0}\left(t^2+2t+1\right)dt + \int_{0}^{1}\left(t^2-2t+1\right)dt\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{t^3}{3}+t^2+t\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{t^3}{3}-t^2+t\right)\Big|_{0}^{1}\right\} = \frac{1}{6}$$



Slika 5.17: Periodički signal $f(t)$ (primjer 5.8).



Slika 5.18: Prvi i drugi izvod signala $f(t)$ (primjer 5.8).

Prema tome, 90% srednje snage ulaznog signala iznosi $(1/6) \cdot 0.9 = 0.15$.

Srednja snaga izlaznog signala računa se iz koeficijenata Fourierovog reda. Koeficijenti se mogu naći korištenjem formule:

$$C_k = \frac{C_k^{(n)}}{(jk\omega_0)^n} \tag{5.56}$$

gdje su C_k koeficijenti Fourierovog reda signala $f(t)$, a $C_k^{(n)}$ koeficijenti razvoja u Fourierov red izvodne funkcije $f^{(n)}(t)$.
Ako se zadati periodički signal diferencira, dobijaju se grafici prikazani na slikama 5.18.a i 5.18.b. U ovom slučaju postoji prvi i drugi izvod, te je $n = 2$. Sada se

računaju koeficijenti funkcije $f^{(2)}(t)$:

$$C_k^{(2)} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^{(2)}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt, \quad T=4, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$
$$C_k^{(2)} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}[\delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)]e^{-j\frac{k\pi}{2}t}dt = \frac{1}{4}e^{j\frac{k\pi}{2}} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{k\pi}{2}} - \frac{1}{2}$$
$$C_k^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - 1\right) = -\sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

Za $k \neq 0$ se dobija:

$$C_k = \frac{C_k^{(2)}}{(jk\omega_0)^2} \Rightarrow C_k = \frac{-\sin^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{\left(\frac{jk\pi}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}Sa^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

Za $k = 0$ se računanje koeficijenta C_0 radi po definiciji:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}(t+1)dt + \frac{1}{4}\int_0^1(-t+1)dt =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_0^1\right] = \frac{1}{4}$$

Snage pojedinih harmonika su slijedeće:

$$|C_0|^2 = \frac{1}{16}, \quad |C_1|^2 = |C_{-1}|^2 = \frac{4}{\pi^4}, \quad |C_2|^2 = |C_{-2}|^2 = \frac{1}{\pi^4}\ldots$$

Srednja snaga izlaznog signala je:

$$P_{izl} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|C_k|^2 \cong |C_0|^2 + 2|C_1|^2 + 2|C_2|^2 + \ldots \cong \frac{1}{16} + 2\cdot\frac{4}{\pi^4} + 2\cdot\frac{1}{\pi^4} + \ldots \cong 0,165$$

Sabiranjem snaga prva dva harmonika i prva tri harmonika, dobije se:

$$\sum_{k=-1}^{1}|C_k|^2 = \frac{1}{16} + 2\frac{4}{\pi^4} = 0,144, \quad \sum_{k=-2}^{2}|C_k|^2 = \frac{1}{16} + 2\frac{4}{\pi^4} + 2\frac{1}{\pi^4} = 0,165$$

odakle slijedi da idealni niskopropusni filter, za snagu manju od 0.15 može propustiti maksimalno dva harmonika (nulti i prvi). Tako je srednja snaga izlaznog signala:

$$P_{izl} \cong \sum_{k=-1}^{1}|C_k|^2 = \frac{1}{16} + 2\frac{4}{\pi^4} = 0,144$$

što predstavlja $86,4\%$ srednje snage ulaznog signala. Da bi se izdvojili ovi harmonici, granična učestanost ω_c filtra može se nalaziti u intervalu $[\omega_0, 2\omega_0)$.

5.11 Aproksimacija periodičkih kontinualnih signala Fourierovim redom u Pythonu

Za primjer predstavljanja periodičkog signala Fourierovim redom u Pythonu, koristi se pravougaoni signal. Pri računanju koeficijenata razvoja koristi se alternativni oblik Fourierovog reda sa koeficijentima a_k i b_k, čime se izbjegava računanje s kompleksnim brojevima. Budući da se formiranje originalnog signala i parametri simulacije koriste u više mjesta, izdvojeni su u pomoćnu funkciju.

Primjer 5.9:

Aproksimirati periodički signal $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}[u(t-2-4k) - u(t-4-4k)]$ sa prvih 5 harmonika Fourierovog reda koristeći programski paket Python.

Rješenje:
U programu je potrebno definirati konačan broj harmonika koji učestvuju u aproksimaciji – u ovom primjeru to su prvih 5 harmonika. Formiranje originalnog signala ponavlja u oba programa ovog primjera, izdvojeno je u pomoćnu funkciju `formiranje_signala`. Funkcija prima vremenski niz t, period signala `per` i vremenski korak `ts`, a vraća originalni pravougaoni signal $x(t)$ i dužinu jednog perioda `gr`. Na ovaj način parametri simulacije su definirani na jednom mjestu i jednostavno se mijenjaju.

Programski kod 5.2

```
def formiranje_signala(t, per, ts):
    """Formiranje pravougaonog periodicnog signala, duty cycle 50%."""
    x = np.zeros(len(t))
    gr = int(per / ts)              # broj tacaka jednog perioda
    sirina = int(per / (2 * ts))    # sirina impulsa = pola perioda
    for t0 in np.arange(t[0], t[-1], per):
        idx = int((t0 - t[0]) / ts)
        x[idx:idx + sirina] = 1
    return x, gr
```

Koeficijenti a_k i b_k računaju se numeričkom aproksimacijom određenog integrala pomoću `np.sum`, na osnovu jednog perioda originalne funkcije `osn`:

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \cong \frac{2\,T_{\min}}{T_0}\,\texttt{np.sum}(\texttt{osn} * \texttt{np.cos}(\texttt{k} * \texttt{w0} * \texttt{t}))$$

i analogno za b_k. Koeficijent a_0 računa se zasebno nakon petlje. Za aproksimaciju nekim drugim brojem harmonika dovoljno je izmijeniti vrijednost varijable `br`.
Kao što se vidi na osnovu programskog koda 5.3, aproksimacija sa višim brojem harmonika znatno je bliža originalnom signalu nego aproksimacija sa manjim brojem harmonika.

Programski kod 5.3 je moguće izmijeniti tako da se nakon svakog dodanog harmonika prikazuje trenutni oblik aproksimirane funkcije (kao u kodu 5.4). Program koristi istu

pomoćnu funkciju `formiranje_signala` i iste parametre, tako da je jedina razlika u tome što se prikaz poziva unutar petlje – nakon svakog harmonika. Program će redom prikazati: dijagram originalne funkcije, istosmjernu komponentu (nulti harmonik, koji za ovaj signal iznosi 0.5), a zatim aproksimacije sa $1, 2, 3, \ldots,$ `br` harmonika. Poređenjem dobijenih dijagrama može se primijetiti da parni harmonici nemaju uticaj na oblik signala.

Programski kod 5.3

```
per = 4         # period signala
br  = 5         # broj harmonika
ts  = 0.01      # vremenski korak
t   = np.arange(-10, 10 + ts, ts)

x, gr = formiranje_signala(t, per, ts)

w0  = 2 * np.pi / per
osn = np.zeros(len(t))
osn[0:gr] = x[0:gr]          # jedan period originalne funkcije

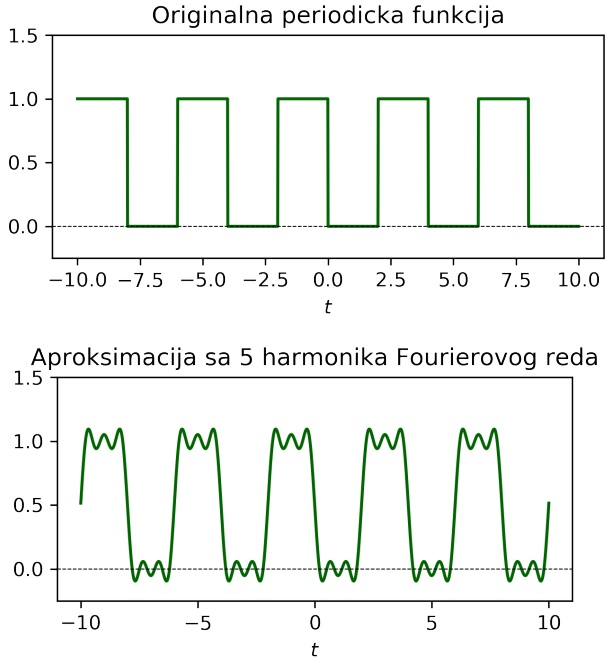
# racunanje koeficijenata i aproksimacije
a = np.zeros(br)
b = np.zeros(br)
aproks = np.zeros(len(t))

for k in range(1, br + 1):
    a[k-1] = 2 * ts / per * np.sum(osn * np.cos(k * w0 * t))
    b[k-1] = 2 * ts / per * np.sum(osn * np.sin(k * w0 * t))
    aproks = aproks + (a[k-1] * np.cos(k * w0 * t)
                       + b[k-1] * np.sin(k * w0 * t))

a0 = 2 * ts / per * np.sum(osn)    # koeficijent a0
aproks = aproks + a0 / 2

sis.dijagram(t, x,
             ylim=(-.25, 1.5),
             naslov='Originalna periodicka funkcija')

sis.dijagram(t, aproks,
             ylim=(-.25, 1.5),
             naslov=f'Aproksimacija sa {br} harmonika Fourierovog reda')
```



Programski kod 5.4

```
aproks = ts / per * np.sum(osn)   # nulti harmonik (DC komponenta)

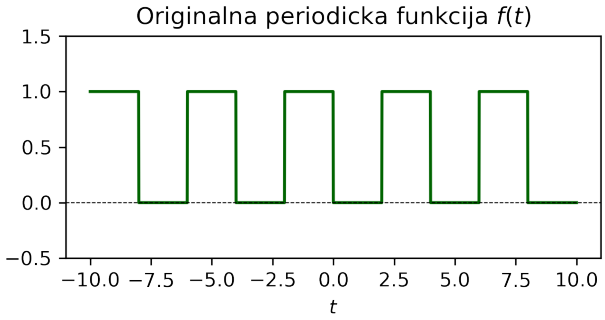
sis.dijagram(t, x,
             ylim=(-.5, 1.5),
             naslov='Originalna periodicka funkcija $f(t)$')

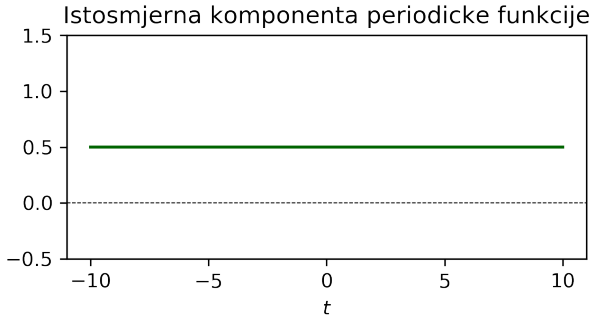
sis.dijagram(t, aproks * np.ones(len(t)),
              ylim=(-.5, 1.5),
              naslov='Istosmjerna komponenta periodicke funkcije')

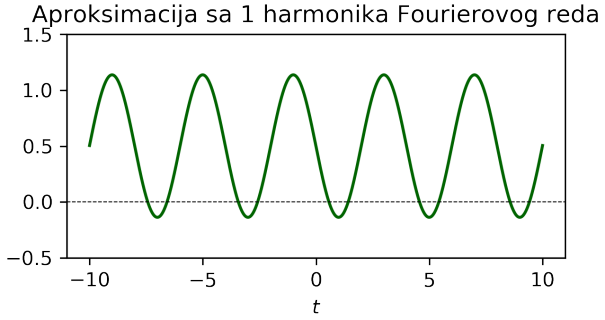
# aproksimacija sa k = 1, 2, ..., br harmonika
a = np.zeros(br)
b = np.zeros(br)

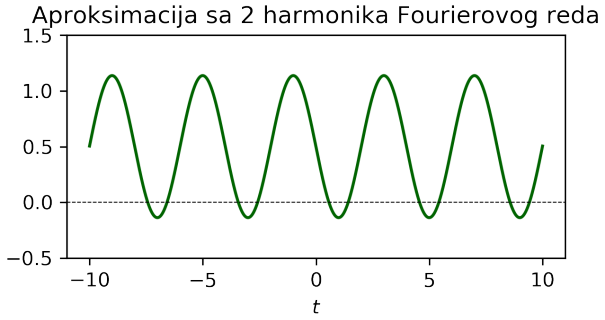
for k in range(1, br + 1):
    a[k-1] = 2 * ts / per * np.sum(osn * np.cos(k * w0 * t))
    b[k-1] = 2 * ts / per * np.sum(osn * np.sin(k * w0 * t))
    aproks = aproks + (a[k-1] * np.cos(k * w0 * t)
                       + b[k-1] * np.sin(k * w0 * t))

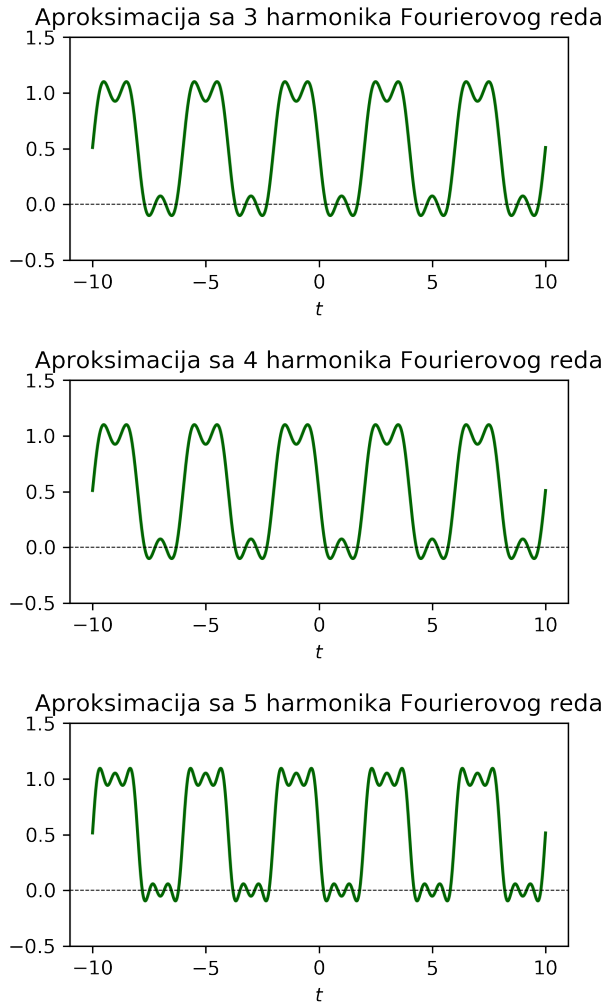
    sis.dijagram(t, aproks,
                 ylim=(-.5, 1.5),
                 naslov=f'Aproksimacija sa {k} harmonika Fourierovog reda')
```


Originalna periodicka funkcija $f(t)$
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−10.0 −7.5 −5.0 −2.5 0.0 2.5 5.0 7.5 10.0
t


Istosmjerna komponenta periodicke funkcije
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−10 −5 0 5 10
t


Aproksimacija sa 1 harmonika Fourierovog reda
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−10 −5 0 5 10
t


Aproksimacija sa 2 harmonika Fourierovog reda
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−10 −5 0 5 10
t

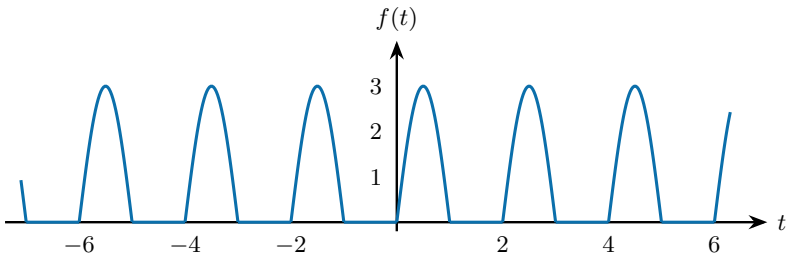


Primjer 5.10:

Na slici 5.19. prikazana je periodička funkcija $f(t)$ koja je na periodu $[0, 2)$ definirana sa:

$$f(t) = \begin{cases} 3\sin(\pi t), & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Korištenjem programskog paketa Python, naći realni, imaginarni, amplitudni i fazni spektar funkcije $f(t)$.



Slika 5.19: Periodičan signal $f(t)$ (primjer 5.10).

Rješenje:
Prilikom računanja spektara funkcije koristi se originalni oblik Fourierovog reda, tj. formule za računanje koeficijenata C_k. Realni, imaginarni, amplitudni i fazni spektar dobijaju se iz izračunatih kompleksnih koeficijenata C_k primjenom operacija `np.real`, `np.imag`, `np.abs` i `np.angle`.
Periodička funkcija formira se na vremenskoj bazi $t \in [-6, 6]$, a za računanje spektra koristi se samo jedan period. Period signala je $T_0 = 2$, što odgovara `gr = int(per/ts) = 200` tačaka.

Programski kod 5.5

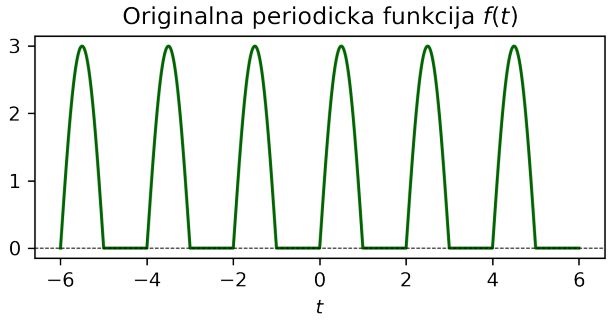
```
br    = 5       # broj harmonika (spektar od -br do +br)
ts    = 0.01    # vremenski korak
per   = 2       # period signala
t_start, t_end = -6, 6

t = np.arange(t_start, t_end + ts, ts)

# formiranje periodicke funkcije
y = 3 * np.sin(np.pi * t)
x = np.zeros(len(t))
gr = int(per / ts)          # broj tacaka jednog perioda
sirina = gr // 2            # sirina impulsa = pola perioda

for t0 in np.arange(t_start, t_end, per):
    idx = int((t0 - t_start) / ts)
    x[idx:idx + sirina] = y[idx:idx + sirina]

sis.dijagram(t, x, naslov=r'Originalna periodicka funkcija $f(t)$')
```



Koeficijenti C_k računaju se za $k = -\texttt{br}, \ldots, 0, \ldots, \texttt{br}$ numeričkom aproksimacijom integrala na jednom periodu:

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt \cong \frac{T_{\min}}{T_0} \sum_i f(t_i)\, e^{-jk\omega_0 t_i}$$

Rezultat je kompleksni niz C_k iz kojeg se direktno dobijaju sva četiri spektra. Frekvencijska osa $\texttt{om} = [-\texttt{br}, \ldots, \texttt{br}]$ predstavlja normiranu učestanost ω/ω_0.

Tražena funkcionalnost je demonstrirana programskim kodom 5.6.

Programski kod 5.6

```
w0 = 2 * np.pi / per
om = np.arange(-br, br + 1)
c  = np.zeros(2 * br + 1, dtype=complex)

# jedan period funkcije pocevsi od t=0
idx0  = int((0 - t_start) / ts)
t_per = t[idx0:idx0 + gr]
x_per = x[idx0:idx0 + gr]

for k in range(-br, br + 1):
    kompl = np.exp(-1j * k * w0 * t_per)
    c[k + br] = ts / per * np.sum(x_per * kompl)

print("Koeficijenti Ck:")
for k in range(-br, br + 1):
    print(f"  C[{k:+d}] = {c[k+br]:.4f}")

print("\nAmplitudni spektar |Ck|:")
for k in range(-br, br + 1):
    print(f"  |C[{k:+d}]| = {abs(c[k+br]):.4f}")

# realni i imaginarni spektar
sis.dijagram(om, np.real(c),
             tip='uzorci', x_labela=r'$k$',
```

```
            naslov=r'Realni spektar $\mathrm{Re}(C_k)$')

sis.dijagram(om, np.imag(c),
            tip='uzorci', x_labela=r'$k$',
            naslov=r'Imaginarni spektar $\mathrm{Im}(C_k)$')

# amplitudni i fazni spektar
sis.dijagram(om, x=np.abs(c),
            tip='uzorci', x_labela=r'$k$',
            naslov=r'Amplitudni spektar $|C_k|$')

sis.dijagram(om, x=np.angle(c),
            tip='uzorci', x_labela=r'$k$',
            naslov=r'Fazni spektar $\arg(C_k)$')
```

```
Koeficijenti Ck:
  C[-5] = 0.0000-0.0000j
  C[-4] = -0.0637+0.0000j
  C[-3] = 0.0000-0.0000j
  C[-2] = -0.3184+0.0000j
  C[-1] = 0.0000+0.7500j
  C[+0] = 0.9549+0.0000j
  C[+1] = 0.0000-0.7500j
  C[+2] = -0.3184-0.0000j
  C[+3] = 0.0000+0.0000j
  C[+4] = -0.0637-0.0000j
  C[+5] = 0.0000+0.0000j

Amplitudni spektar |Ck|:
  |C[-5]| = 0.0000
  |C[-4]| = 0.0637
  |C[-3]| = 0.0000
  |C[-2]| = 0.3184
  |C[-1]| = 0.7500
  |C[+0]| = 0.9549
  |C[+1]| = 0.7500
  |C[+2]| = 0.3184
  |C[+3]| = 0.0000
  |C[+4]| = 0.0637
  |C[+5]| = 0.0000
```

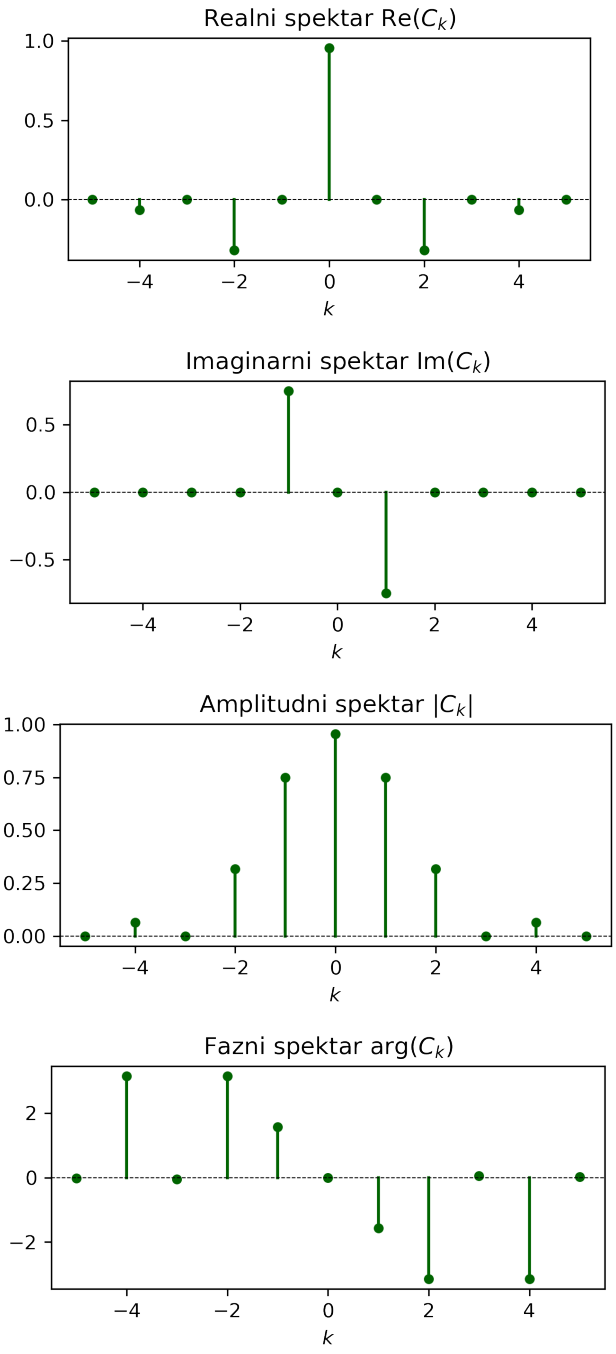

Realni spektar Re(C_k)
1.0
0.5
0.0
−4
−2
0
2
4
k
Imaginarni spektar Im(C_k)
0.5
0.0
−0.5
−4
−2
0
2
4
k
Amplitudni spektar $|C_k|$
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−4
−2
0
2
4
k
Fazni spektar arg(C_k)
2
0
−2
−4
−2
0
2
4
k

Tabela 5.1: Osobine Fourierovog reda kontinualnih signala.

Osobina	**Signal**	**Koeficijenti Fourierovog reda**
	$f(t), f_1(t), f_2(t)$ periodički signali perioda T i učestanosti $\omega_0 = 2\pi/T$	C_k, a_k i b_k
Linearnost	$A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t)$	$A_1 a_k + A_2 b_k$
Vremenski pomak	$f\left(t - t_0\right)$	$C_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
Frekventni pomak	$f(t)e^{jM\omega_0 t_0}$	C_{k-M}
Vremenska refleksija	$f(-t)$	C_{-k}
Vremensko skaliranje	$f(\alpha t)$, $\alpha > 0$, period T/α	C_k
Proizvod periodičkih signala	$f_1(t) f_2(t)$	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$
Konjugovanje	$f^*(t)$	$C^*{}_{-k}$
Periodička konvolucija	$\int_T f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$	$T a_k b_k$
Realni i parni signali	$f(t)$ - realan i paran signal	C_k - čisto realni
Realni i neparni signali	$f(t)$ - realan i neparan signal	C_k - čisto imaginarni
Diferenciranje	$df(t)/dt$	$jk\omega_0 C_k$
Integriranje	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$ (ima konačnu vr. i periodičan ako je $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) C_k$
Konjugovana simetrija za realne signale	$f(t)$ - realan signal	$C_k = C^*_{-k}$ $\mathrm{Re}\{C_k\} = \mathrm{Re}\{C_{-k}\}$ $\mathrm{Im}\{C_k\} = -\mathrm{Im}\{C_{-k}\}$ $\lvert C_k\rvert = \lvert C_{-k}\rvert$ $\arg\{C_k\} = -\arg\left\{C^*_{-k}\right\}$
Parsevalova relacija za periodičke signale	$\frac{1}{T}\int_T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lvert C_k\rvert^2$	

6. Fourierova transformacija

U prethodnom poglavlju razmatrani su periodički signali u strogom smislu te riječi i njihova spektralna analiza. Razvoj periodičkog signala $f(t)$ u Fourierov red je razlaganje signala na komponente eksponencijalnog ili sinusnog tipa, odnosno na skup ortogonalnih funkcija. U skladu sa osobinom kauzalnosti, u prirodi ne postoje periodički signali, nego oni ispoljavaju periodičnost samo u nekom konačnom intervalu. Dakle, češće se javljaju aperiodički signali kao jednokratne promjene neke veličine u vidu impulsa proizvoljnog oblika ili periodičkog signala u konačnom intervalu. Primjena Fourierovog reda na aperiodičke signale je zbog toga ograničena. Opis aperiodičkih, ali i periodičkih vremenski kontinualnih signala moguć je primjenom generalizacije Fourierovih redova, koja se naziva Fourierova transformacija.

6.1 Fourierova transformacija vremenski kontinualnih signala

6.1.1 Izvođenje Fourierove transformacije

Neka je $f(t)$ aperiodički signal koji egzistira na intervalu $-T_0/2 \leq t \leq T_0/2$, a jednak je nuli za $|t| > T_0/2$. Fourierov red signala $f(t)$ je:

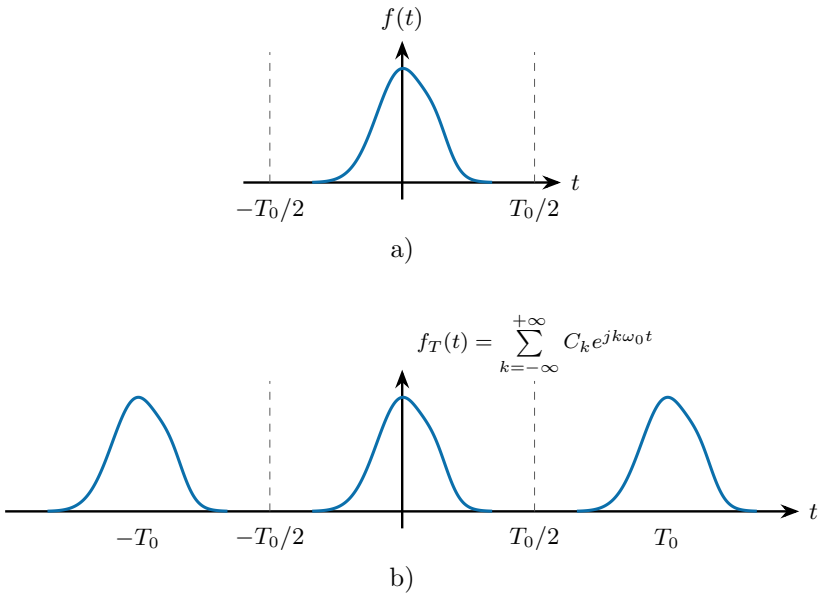
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t}, \quad t \in [-T_0/2, T_0/2] \tag{6.1}$$

$$C_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{6.2}$$

Aperiodički signal i njegova aproksimacija Fourierovim redom prikazani su na slici 6.1. Ako period T_0 raste, interval u kome se signal i njegova aproksimacija podudaraju postaje sve veći. Na kraju, kada T_0 postane beskonačno, signal i njegova aproksimacija se potpuno podudaraju. Međutim, koeficijenti C_k postaju beskonačno mali, a učestanost ω_0 teži nuli. Inverzni odnos "vrijeme-učestanost" opća je karakteristika vremenskih signala i njihovih Fourierovih transformacija.

Za ostvarivanje uslova potrebnih za egzistenciju Fourierove transformacije, uvode se oznake:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \Delta, \omega \quad k\omega_0 = \omega_k, \tag{6.3}$$



Slika 6.1: a) Aperiodički signal, b) aproksimacija signala Fourierovim redom.

pa su, na osnovu relacije (6.2) koeficijenti:

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j\omega_k t}dt \tag{6.4}$$

Ako se integral iz izraza (6.4) označi sa:

$$F\left(j\omega_k\right) = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j\omega_k t}dt \tag{6.5}$$

na osnovu relacija (6.4) i (6.5) koeficijenti su:

$$C_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\cdot F\left(j\omega_k\right) \tag{6.6}$$

a iz relacija (6.1) i (6.6) dobije se:

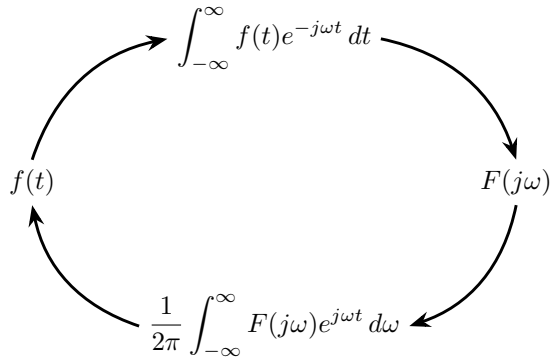
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega_k\right)e^{j\omega_k t}\Delta\omega, \quad -\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2} \tag{6.7}$$

Ako T_0 teži beskonačnosti, onda:

$$\Delta\omega \to d\omega, \quad \omega_k \to \omega, \quad F\left(j\omega_k\right) \to F(j\omega)$$

Izrazi (6.5) za $F\left(j\omega_k\right)$ i (6.7) za $f(t)$ u intervalu $-\infty < t < \infty$ dobijaju oblik:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.8}$$



Slika 6.2: Veza direktne i inverzne Fourierove transformacije.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.9}$$

Izrazi dati relacijama (6.8) i (6.9) nazivaju se direktna i inverzna Fourierova transformacija. Slikom 6.2 je ilustrovana osobina cikličnosti Fourierove transformacije.

Direktna i inverzna Fourierova transformacija signala mogu se predstaviti i skraćenom notacijom:

$$f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega), \quad F(j\omega) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} f(t) \tag{6.10}$$

Vremenski signal $f(t)$ i njegova Fourierova transformacija $F(j\omega)$ predstavljaju Fourierov transformacioni par. Relacijom (6.9) aperiodički vremenski signal $f(t)$ predstavlja se u obliku sume beskonačno velikog broja harmonika, i analogan je Fourierovom redu. Ovi harmonici su multipli beskonačno male učestanosti $d\omega$, njihove amplitude su beskonačno male i iznose $F(j\omega)d\omega/2\pi$.

Funkcija $F(j\omega)$ definirana relacijom (6.8) se naziva kompleksni spektar signala $f(t)$, i predstavlja reprezentaciju vremenskog signala $f(t)$ pomoću odgovarajuće funkcije kompleksne promjenljive.

Direktna Fourierova transformacija $F(j\omega)$ se još naziva i **lik** funkcije $f(t)$, dok se inverzna Fourierova transformacija $f(t)$ naziva **original** funkcije $F(j\omega)$.

6.1.2 Uslovi egzistencije Fourierove transformacije

Dovoljni uslovi za egzistenciju Fourierove transformacije slični su dovoljnim uslovima za egzistenciju Fourierovog reda. Dakle, Fourierova transformacija kontinualnog aperiodičkog signala $f(t)$ egzistira ako $f(t)$ zadovoljava Dirichletove uslove:

- $f(t)$ ima konačan broj minimuma i maksimuma na konačnom intervalu,
- $f(t)$ ima konačan broj prekida na konačnom intervalu (i svi su prve vrste),
- $f(t)$ je apsolutno integrabilan na intervalu $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty \tag{6.11}$$

Uzimajući u obzir uslov (6.11) i definicionu relaciju (6.8) i činjenicu da vrijedi $\left|e^{-j\omega t}\right| = 1$, slijedi da je:

$$|F(j\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt \tag{6.12}$$

što uz date Dirchletove uslove obezbjeđuje egzistenciju Fourierove transformacije kontinualnih aperiodičkih signala.

Za kontinualni aperiodički signal $f(t)$ koji ima konačnu energiju tj. signal za koga važi uslov kvadratne integrabilnosti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \tag{6.13}$$

može se garantirati da ima konačnu Fourierovu transformaciju $F(j\omega)$ i da ispunjava sve Dirchletove uslove.

Postoje primjeri signala koji ne zadovoljavaju Dirichletove uslove, a imaju jednostavne i praktično česte talasne oblike. Npr. signal $f(t) = u(t)$ nije apsolutno integrabilan, jer je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)dt = \infty \tag{6.14}$$

Međutim, ako se i u frekventnom domenu definira "delta" funkcija:

$$\begin{cases} \delta(\omega) \to \infty, & \omega = 0 \\ \delta(\omega) = 0, & \omega \neq 0 \end{cases} \quad \text{uz uslov} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega)d\omega = 1 \tag{6.15}$$

onda se mogu dobiti Fourierove transformacije nekih signala koji ne zadovoljavaju ni uslov apsolutne, ni uslov kvadratne integrabilnosti, npr. može se naći Fourierova transformacija periodičkog signala na beskonačnom intervalu.

Fourierova transformacija se koristi za analizu karakteristika kontinualnih signala i sistema i veze između kontinualnih signala i sistema. Fourierova transformacija takođe se koristi za analizu veze između diskretnih i kontinualnih signala, uz korištenje uzorkovanja, o čemu će biti riječi u narednim poglavljima.

6.2 Odnos originala i lika

6.2.1 Odnos realnih i imaginarnih dijelova funkcije i spektra

Vremenska (u općem slučaju kompleksna) funkcija $f(t)$ može se napisati u obliku:

$$f(t) = f_R(t) + jf_I(t) \tag{6.16}$$

gdje su $f_R(t)$ i $f_I(t)$ realne funkcije. Neka je Fourierova transformacija ove funkcije $F(j\omega)$. Kao kompleksna veličina $F(j\omega)$ se može napisati na slijedeći način:

$$\begin{aligned} F(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_R(t) + jf_I(t)]\,[\cos\omega t - j\sin\omega t]dt \end{aligned} \tag{6.17}$$

gdje su $R(\omega)$ i $I(\omega)$ realne funkcije promjenljive ω, pri čemu je za $e^{-j\omega t}$ korišten Eulerov obrazac. Razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela Fourierove transformacije u relaciji (6.17) dobije se:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_R(t)\cos\omega t + f_I(t)\sin\omega t]\,dt \tag{6.18}$$

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_I(t)\cos\omega t - f_R(t)\sin\omega t]\,dt \tag{6.19}$$

Za isključivo realan vremenski signal $f(t)$, odnosno:

$$f(t) = f_R(t) \tag{6.20}$$

realni i imaginarni dio Fourierove transformacije su dati sa:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t dt \tag{6.21}$$

$$I(\omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t dt \tag{6.22}$$

Prema tome, realni dio Fourierove transformacije realne funkcije je uvijek parna funkcija promjenljive ω, odnosno:

$$R(\omega) = R(-\omega)$$

jer je $\cos\omega t$ parna funkcija promjenljive ω. $R(\omega)$ se naziva realni dio spektra.

Imaginarni dio spektra $I(\omega)$ realne funkcije $f(t)$ je neparna funkcija promjenljive ω, jer je $\sin\omega t$ neparna funkcija promjenljive ω :

$$I(\omega) = -I(-\omega)$$

U tom slučaju je:

$$F(-j\omega) = R(-\omega) + jI(-\omega) = R(\omega) - jI(\omega) = F^*(j\omega) \tag{6.23}$$

tj. $F(j\omega)$ i $F(-j\omega)$ obrazuju konjugovano kompleksni par. Pored realnog i imaginarnog dijela spektra definiraju se amplitudni spektar $F(\omega)$ i fazni spektar $\Phi(\omega)$. Amplitudni spektar je:

$$F(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \tag{6.24}$$

$F(\omega)$ je uvijek parna funkcija promjenljive ω ukoliko je $f(t)$ isključivo realna funkcija. Fazni spektar je dat sa:

$$\Phi(\omega) = \arg F(j\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I(\omega)}{R(\omega)} \tag{6.25}$$

$\Phi(\omega)$ je uvijek neparna funkcija promjenljive ω kada je $f(t)$ realan vremenski signal. Kako je $F(j\omega)$ kompleksna veličina, može se napisati u obliku:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\Phi(\omega)} \tag{6.26}$$

gdje je $|F(j\omega)|$ amplituda, a $\Phi(\omega)$ faza spektra $F(j\omega)$. U skladu s tim vrijedi:

$$|F(-j\omega)| = |F(j\omega)| \tag{6.27}$$

$$\Phi(-\omega) = -\Phi(\omega) \tag{6.28}$$

Iz relacija (6.27) i (6.28) ponovo se može zaključiti da je amplitudni spektar realnog vremenskog signala parna funkcija promjenljive ω, a fazni spektar neparna funkcija promjenljive ω.

Važno je napomenuti da, kao i u slučaju grafičke prezentacije spektra periodičkih funkcija (Fourierovog reda), u općem slučaju nije dozvoljeno prikazivati samo vrijednosti $F(j\omega)$, nego se mora prikazivati jedan od četiri dijela spektra (amplitudni, fazni, realni ili imaginarni dio). **Međutim, kada je spektar $F(j\omega)$ isključivo realan ili imaginaran, u svrhu ilustracije je dozvoljeno crtati samo vrijednosti $F(j\omega)$. Ovaj pristup će biti korišten u nastavku knjige, tamo gdje to bude svrsishodno.**

6.2.2 Odnos parnog i neparnog dijela funkcije i spektra

Realna funkcija $f(t)$ uvijek se može rastaviti na dva dijela, jedan, koji predstavlja parnu $f_p(t)$ i drugi, koji predstavlja neparnu $f_n(t)$ funkciju promjenljive t.

$$f(t) = f_p(t) + f_n(t) \tag{6.29}$$

$$f(-t) = f_p(t) - f_n(t) \tag{6.30}$$

Iz relacija (6.29) i (6.30) je:

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} \tag{6.31}$$

$$f_n(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2} \tag{6.32}$$

Također, bitno je naglasiti i da za realan signal $f(t)$ vrijedi:

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{-j\omega t}d\omega \tag{6.33}$$

Iz relacije (6.29) i relacije (6.33) za inverznu Fourierovu transformaciju realne funkcije, i uzimajući u obzir osobine parnih i neparnih funkcija, slijedi:

$$f(t) = f_p(t) + f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega)\cos\omega t - I(\omega)\sin\omega t]d\omega \tag{6.34}$$

$$f(-t) = f_p(t) - f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [R(\omega)\cos\omega t + I(\omega)\sin\omega t]d\omega \tag{6.35}$$

Iz izraza (6.34) i (6.35) parni i neparni dio realne funkcije $f(t)$ je:

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\omega)\cos\omega t d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} R(\omega)\cos\omega t d\omega \tag{6.36}$$

$$f_n(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\omega)\sin\omega t d\omega = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} I(\omega)\sin\omega t d\omega \tag{6.37}$$

Izrazi (6.36) i (6.37) mogu se, bez uticaja na njihovu vrijednost, proširiti integralom proizvoda jedne parne i jedne neparne funkcije (jer je integral tog proizvoda nula) na slijedeći način:

$$f_p(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[R(\omega)\cos\omega t + jR(\omega)\sin\omega t]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.38}$$

$$f_n(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I(\omega)\sin\omega t d\omega = \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[I(\omega)\cos\omega t + jI(\omega)\sin\omega t]d\omega$$

$$= \frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}I(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.39}$$

Odavde se zaključuje da je $R(\omega) = F\{f_p(t)\}$, odnosno $R(\omega)$ je Fourierova transformacija funkcije $f_p(t)$, koja predstavlja parni dio realne funkcije $f(t)$. Slično je $jI(\omega) = F\{f_n(t)\}$ Fourierova transformacija funkcije $f_n(t)$ koja predstavlja neparni dio realne funkcije $f(t)$.

Neka je funkcija $f(t)$ kauzalna funkcija, odnosno:

$$f(t) = 0 \quad za \quad t < 0$$

Iz relacija (6.34) i (6.35), uzimajući u obzir osobine parnosti i neparnosti, dobije se:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[R(\omega)\cos\omega t - I(\omega)\sin\omega t]d\omega \tag{6.40}$$

$$f(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[R(\omega)\cos\omega t + I(\omega)\sin\omega t]d\omega \tag{6.41}$$

Kako je $f(-t) = 0$ za $t \geq 0$, to iz relacija (6.31) i (6.32) slijedi da je:

$$f_p(t) = f_n(t), \quad t \geq 0 \tag{6.42}$$

odnosno izjednačavanjem izraza datih relacijama (6.36) i (6.37) dobije se:

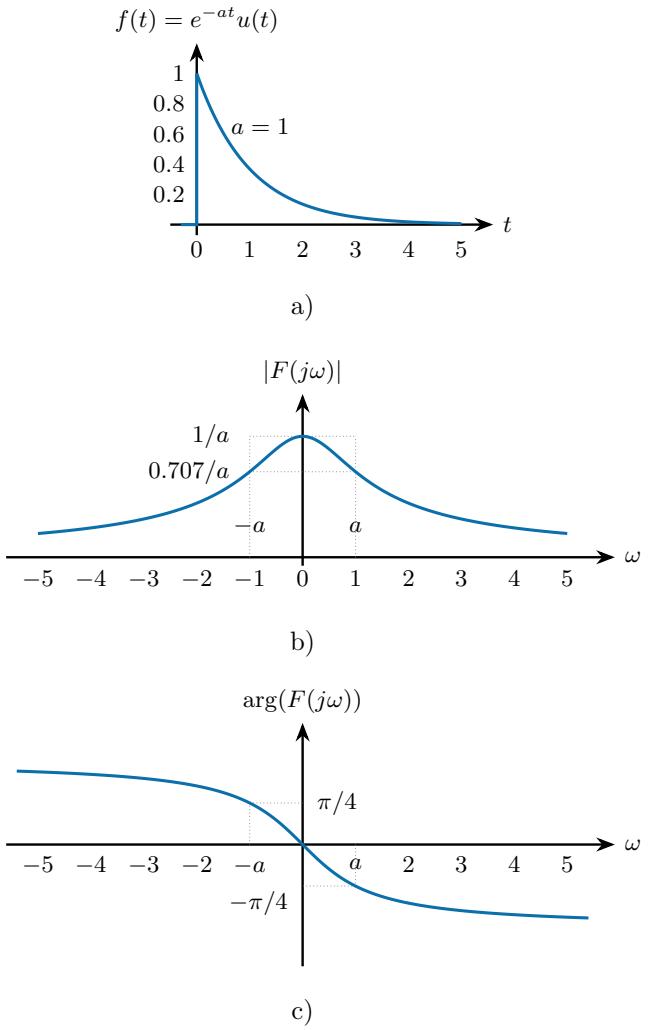
$$\int_{0}^{+\infty}R(\omega)\cos\omega t d\omega = -\int_{0}^{+\infty}I(\omega)\sin\omega t d\omega \tag{6.43}$$

Dakle, za kauzalnu funkciju $f(t)$ realni $R(\omega)$ i imaginarni dio $I(\omega)$ Fourierove transformacije $F(j\omega)$ međusobno su povezani relacijom (6.43).

Fourierova transformacija se može prikazati u funkciji učestanosti ω. Zbog osobina parnosti i neparnosti, za isključivo realne signale (a većina signala koji dolaze iz stvarnog inženjerskog svijeta su takvi), realni, imaginarni, amplitudni i fazni spektar se trebaju crtati samo za pozitivne vrijednosti učestanosti ω.

Primjer 6.1:

Odrediti Fourierovu transformaciju signala $f(t) = e^{-at}u(t)$ za $a > 0$. Nacrtati amplitudni i fazni spektar.



Slika 6.3: a) Realni eksponencijalni signal u vremenskom domenu (prikaz za $a = 1$), b) amplitudni spektar signala, c) fazni spektar signala.

Rješenje:
Iz definicione relacije Fourierove transformacije (6.8) dobije se:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = \frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\Bigg|_{0}^{+\infty}$$

Ako je $a > 0$ onda za $t \to \infty$ slijedi da $e^{-(a+j\omega)t} = e^{-at}e^{-j\omega t} \to 0$, tako da je:

$$e^{-at}u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0$$

Za $a < 0$ Fourierova transformacija $e^{-at}u(t)$ ne postoji, jer je to eksponencijalno rastuća funkcija i ne zadovoljava Dirichletove uslove, pa ni uslov (6.11) koji se odnosi na apsolutnu integrabilnost.
Amplitudni i fazni spektar (slika 6.3) funkcije $f(t) = e^{-at}u(t)$ za $a > 0$ su:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}, \quad \arg\{F(j\omega)\} = -\operatorname{arctg}(\omega/a)$$

6.3 Impulsni odziv i frekventna funkcija sistema

Neka je ulaz u linearni i vremenski invarijantni (LTI) sistem funkcija $\delta(t)$. Odziv LTI sistema na pobudu jednaku delta funkciji je impulsni odziv:

$$h(t) = L\{\delta(t)\} \tag{6.44}$$

Na osnovu relacije (6.9) za inverznu Fourierovu transformaciju impulsni odziv se može napisati u obliku:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.45}$$

gdje je $H(j\omega)$ frekventna funkcija sistema koja se, na osnovu relacije za direktnu Fourierovu transformaciju (6.8), može napisati u obliku:

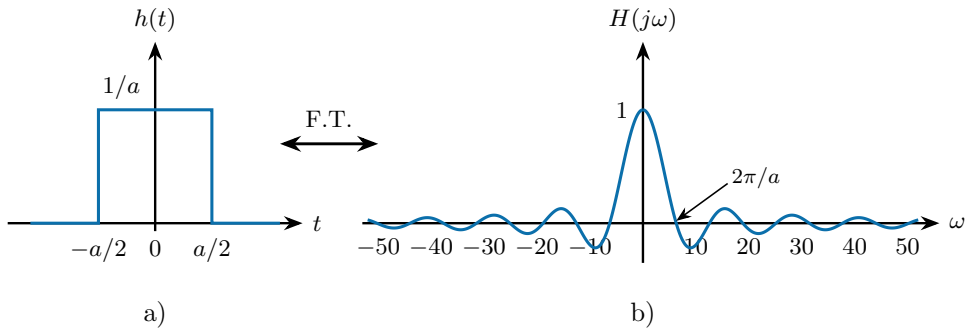
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.46}$$

Ova relacija je već dobijena u drugom poglavlju kao odziv LTI sistema na pobudu oblika $e^{j\omega t}$ (relacija (2.103)). Dakle, odziv LTI sistema $h(t)$ na impulsnu aperiodičku pobudu jednaku delta funkciji i frekventna funkcija sistema $H(j\omega)$ obrazuju Fourierov transformacioni par. To znači da je kompleksni spektar izlaznog signala, za slučaj pobude jednake delta funkciji, jednak funkciji sistema.

Primjer 6.2:

Odrediti frekventnu funkciju sistema ako je impulsni odziv sistema (slika 6.4.a):

$$h(t) = \frac{1}{a}p\left(\frac{t}{a}\right) \tag{6.47}$$



Slika 6.4: a) Pravougaoni impuls, b) Fourierova transformacija pravougaonog impulsa (primjer 6.2).

Rješenje:
Prema relaciji (6.46) frekventna funkcija sistema je:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} p(t/a) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2} \tag{6.48}$$

Dakle, za realni impulsni odziv dat relacijom (6.47), frekventna funkcija sistema je parna funkcija učestanosti ω, a u ovom slučaju i realna funkcija učestanosti ω:

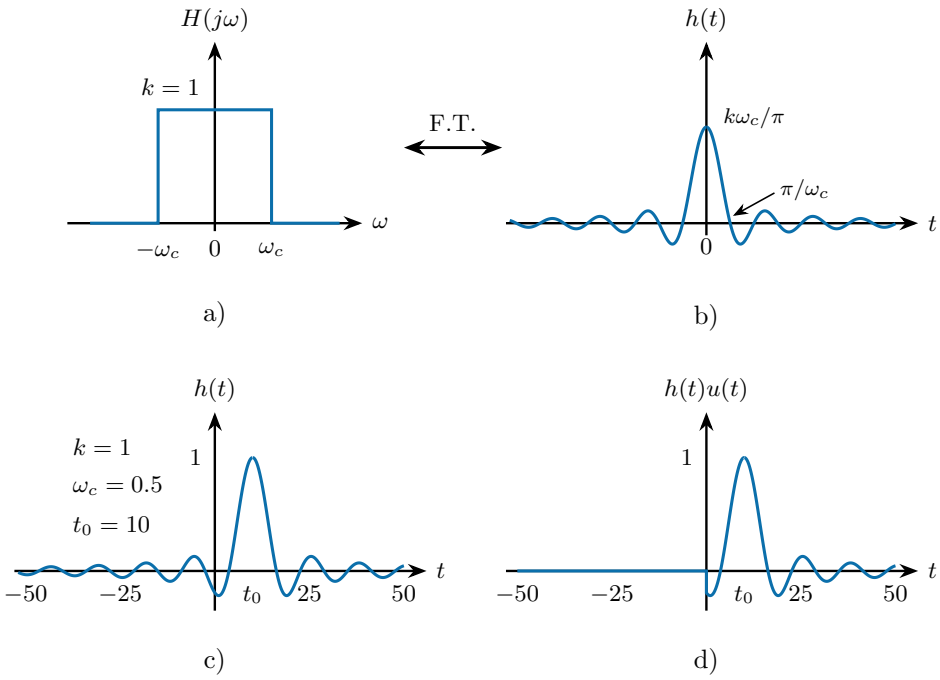
$$\frac{1}{a} p(t/a) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2} \tag{6.49}$$

Funkcija:

$$H(j\omega) = \mathrm{Re}\{H(j\omega)\} = \frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2} = \mathrm{Sa}(a\omega/2) \tag{6.50}$$

skraćeno se obilježava sa $Sa(a\omega/2)$, i prikazana je na slici 6.4.b za $a = 1$. Funkcija $Sa(a\omega/2)$ je parna funkcija učestanosti ω. Koristeći L'Hospitalovo pravilo funkcija $Sa(a\omega/2) = 1$ za $(a\omega)/2 = 0$, odnosno za $\omega = 0$, a prolazi kroz nulu u tačkama $a\omega/2 = k\pi$, $\omega = 2k\pi/a$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ta funkcija je proizvod periodičkog signala $\sin(a\omega/2)$ i monotono opadajuće funkcije $2/(a\omega)$. Tako funkcija $Sa(a\omega/2)$ ima sinusne oscilacije koje kontinualno opadaju sa $2/(a\omega)$.

Ako se pretpostavi da u izrazu (6.47) za $h(t)$, parametar a opada, tada $h(t)$ postaje sve uža, a $H(j\omega)$ sve šira, i obrnuto kada a raste. Dakle, vremenski i frekventni domen se ponašaju obrnuto. Signal u vremenskom domenu je ograničen, a u frekventnom egzistira od $-\infty$ do ∞.



Slika 6.5: a) Frekventna funkcija sistema niskopropusnog filtra za $t_0 = 0$, b) impulsni odziv niskopropusnog filtra za $t_0 = 0$, c) impulsni odziv niskopropusnog filtra za $t_0 > 0$, d) kauzalni dio impulsnog odziva niskopropusnog filtra za $t_0 > 0$ (primjer 6.3).

Primjer 6.3:

Odrediti impulsni odziv za niskopropusni filter koji ima frekventnu funkciju sistema:

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_0} p\left(\omega/2\omega_c\right) = \begin{cases} ke^{-j\omega t_0}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \tag{6.51}$$

Rješenje:
Za slučaj $t_0 = 0$ frekventna funkcija sistema je realna, i prikazana je na slici 6.5.a. Primjenjujući relaciju (6.9) za inverznu Fourierovu transformaciju na frekventnu funkciju sistema (6.51), impulsni odziv (slika 6.5.b) niskopropusnog filtra dobije se na slijedeći način:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-j\omega t_0} p\left(\omega/2\omega_c\right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot k\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{k\omega_c}{\pi} Sa\omega_c\left(t - t_0\right) \end{aligned} \tag{6.52}$$

odnosno:

$$ke^{-j\omega t_0}p\left(\omega/2\omega_c\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{k\omega_c}{\pi} Sa\omega_c\left(t-t_0\right) \tag{6.53}$$

Kao i na slici 6.4. i na slikama 6.5.a i 6.5.b uočava se da ako se ω_c u frekventnoj funkciji sistema smanjuje, frekventna funkcija sistema se sužava, a impulsni odziv $h(t)$ širi. Signal u frekventnom domenu je ograničen, a u vremenskom egzistira od $-\infty$ do ∞. Na slici 6.5.c, na osnovu relacije (6.53), nacrtan je impulsni odziv niskopropusnog filtra za $t_0 > 0$. Kao što se vidi, ovaj sistem nije fizički ostvariv, jer $h(t)$ nije kauzalna funkcija. Međutim, ako je t_0 veliko, dio impulsnog odziva $h(t)$ za $t < 0$ je mali. Zato se $h(t)$ može aproksimirati funkcijom $h(t)u(t)$ koja je kauzalna (slika 6.5.d).

6.4 Osobine Fourierove transformacije i Fourierova transformacija specijalnih signala

Osobine Fourierove transformacije dokazuju se na osnovu izraza (6.8) i (6.9) za direktnu i inverznu Fourierovu transformaciju.

6.4.1 Linearnost

Ako signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju Fourierove transformacije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$, onda važi:

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) = F(j\omega) \tag{6.54}$$

gdje je $F(j\omega)$ Fourierova transformacija signala $f(t)$. Npr. ako je:

$$f(t) = 2e^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$

onda je:

$$F(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{3}{2+j\omega}$$

6.4.2 Simetrija

Ako se u izrazu za inverznu Fourierovu transformaciju promjenljiva ω zamijeni promjenljivom x :

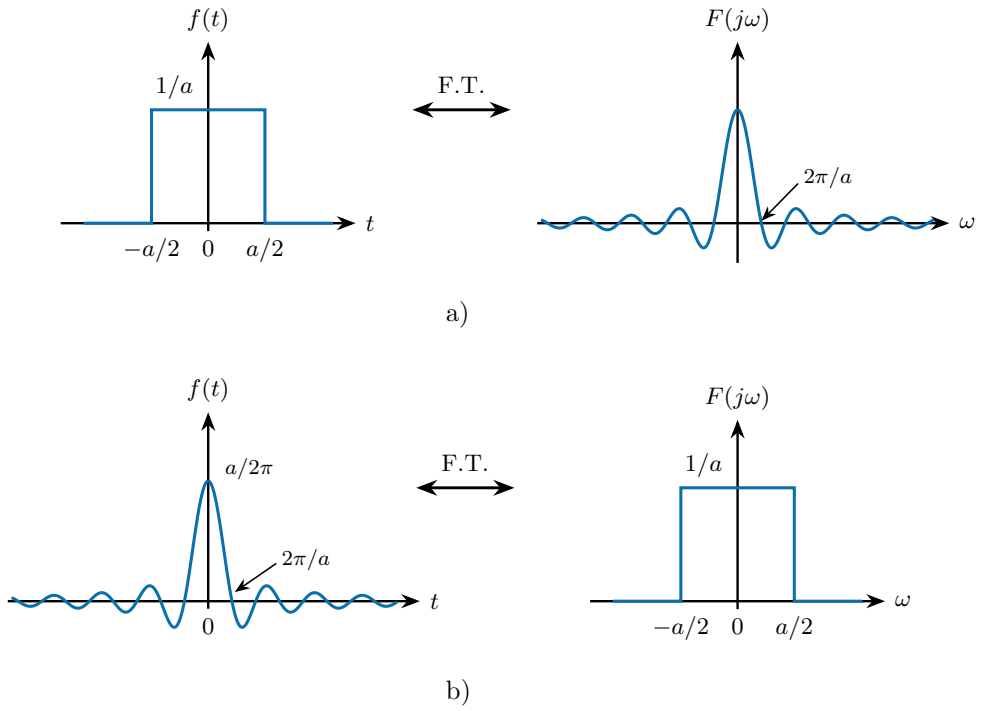
$$\omega \to x \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(jx)e^{jxt}dx \tag{6.55}$$

zatim promjenljiva t zamijeni promjenljivom $-\omega$:

$$t \to -\omega \quad \Longrightarrow \quad f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(jx)e^{-jx\omega}dx \tag{6.56}$$

i na kraju promjenljiva x zamijeni promjenljivom t, i obje strane pomnože sa 2π, dobije se:

$$x \to t \quad \Longrightarrow \quad 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt)e^{-j\omega t}dt \tag{6.57}$$



Slika 6.6: Simetrija vremenskog i frekventnog domena (primjer 6.4).

Desna strana relacije (6.57) je Fourierova transformacija $F(jt)$, i ta vremenska funkcija se dobije tako što se svako ω u izrazu za lik signala zamijeni sa t. To znači da, ako funkcija $f(t)$ ima Fourierovu transformaciju $F(j\omega)$, što se zapisuje kao:

$$f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega) \tag{6.58}$$

onda je inverzna Fourierova transformacija izraza $2\pi f(-\omega)$ jednaka $F(jt)$, i obrnuto, što se zapisuje kao:

$$2\pi f(-\omega) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(jt) \tag{6.59}$$

Primjer 6.4:

Odrediti Fourierovu transformaciju signala $Sa(at/2)$, ako je Fourierova transformacija pravougaonog signala (slika 6.6.a), na osnovu relacije (6.49) jednaka:

$$\frac{1}{a} p\left(\frac{t}{a}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\frac{a\omega}{2} \tag{6.60}$$

Rješenje:
Fourierova transformacija signala $Sa(at/2)$ može se dobiti primjenjujući na relaciju (6.60) osobinu simetrije (6.59):

$$2\pi \cdot \frac{1}{a} p\left(\frac{-\omega}{a}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\frac{at}{2} \tag{6.61}$$

Ako je $a/2 = \omega_c$ (slika 6.6.b), onda je:

$$\frac{\pi}{\omega_c} p\left(\frac{-\omega}{2\omega_c}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\omega_c t$$

Kako je pravougaoni impuls parna funkcija, može se napisati:

$$\frac{\pi}{\omega_c} p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\omega_c t \tag{6.62}$$

Ovaj rezultat je već dobijen za niskopropusni filter (6.53).

6.4.3 Fourierova transformacija impulsne funkcije

Impulsna (delta) funkcija $\delta(t)$ je apstraktan signal, ali veoma upotrebljiv za matematičko opisivanje mnogih situacija koje spadaju u granično područje primjenljivosti Fourierove transformacije. Funkcija $\delta(t)$ u koordinatnom početku ima diskontinuitet (amplituda teži u beskonačnost), a definirana je relacijom:

$$\begin{cases} \delta(t) \to \infty, & t = 0 \\ \delta(t) = 0, & t \neq 0 \end{cases} \quad \text{uz uslov} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$$

Kako je integral $\delta(t)$ funkcije, u granicama $-\infty \div \infty$ jednak jedinici, to je Fourierova transformacija funkcije $\delta(t)$:

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = e^{-j0}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{6.63}$$

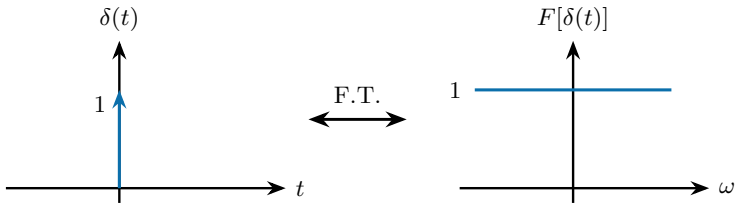
$$\delta(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 1 \tag{6.64}$$

Dakle, dobijen je uniforman i neograničen amplitudni spektar u kome je spektralna gustina amplitude $|F(j\omega)|^2 = |\Delta(j\omega)|^2 = 1$ ili drugačije rečeno $\Delta(j\omega) = 1$ sadrži kompleksne sinusoide svih frekvencija od $-\infty$ do ∞.
Delta funkcija i njena Fourierova transformacija prikazani su na slici 6.7.

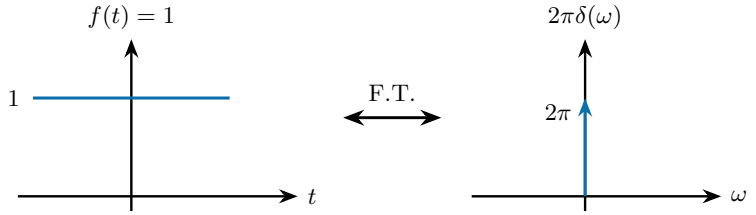
6.4.4 Fourierova transformacija konstante

Primjenom teoreme o simetriji (6.59) na impulsnu funkciju $\delta(t)$, čija je Fourierova transformacija jednaka jedan, odnosno:

$$\delta(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 1$$



Slika 6.7: Delta funkcija i njena Fourierova transformacija.



Slika 6.8: Konstanta jedan i njena Fourierova transformacija.

dobije se:

$$2\pi\delta(-\omega) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 1 \tag{6.65}$$

Kako je impulsna funkcija $\delta(\omega)$ parna, to je Fourierova transformacija jedinice data sa (slika 6.8.):

$$1 \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega) \tag{6.66}$$

Ovaj rezultat znači da istosmjerni (DC) signal $f(t) = 1$ opisan samo jednom frekvencijom $\omega = 0$.
Isti rezultat se mogao dobiti koristeći relaciju za inverznu Fourierovu transformaciju (6.9) i osobinu selektivnosti delta funkcije:

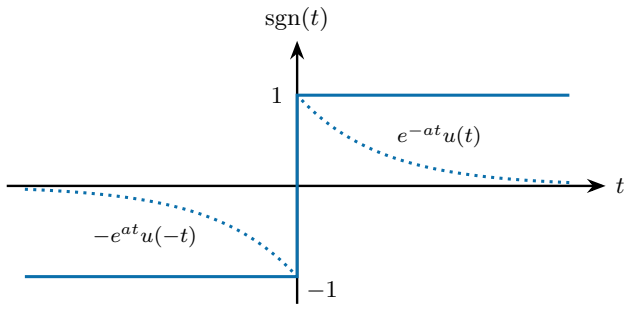
$$F^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

Korištenjem osobine homogenosti, može se dobiti Fourierova transformacija konstante k:

$$k \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\pi k\delta(\omega) \tag{6.67}$$

što predstavlja delta funkciju u frekventnom domenu, površine $2\pi k$. Relacija (6.67) znači da je frekventni sadržaj istosmjernog (DC) signala koncentriran oko ose $\omega = 0$, što se moglo zaključiti i intuitivno. Inverzna Fourierova transformacija funkcije $\delta(\omega)$ dobije se direktno iz relacije (6.66):

$$\delta(\omega) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \tag{6.68}$$



Slika 6.9: Funkcija sgn(t) i njena aproksimacija eksponencijalnim signalima.

Primjer 6.5:

Odrediti inverznu Fourierovu transformaciju signala $F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$.

Rješenje:
Koristeći relaciju za inverznu Fourierovu transformaciju (6.9) dobije se:

$$F^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Isti rezultat se mogao dobiti koristeći relacije (6.68) i (6.83):

$$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} e^{\pm j\omega_0 t} \tag{6.69}$$

Ovaj rezultat pokazuje da je spektar eksponencijalnog signala jedna spektralna linija na frekvenciji $\omega = \omega_0$.

6.4.5 Fourierova transformacija signum funkcije

Za određivanje Fourierove transfomracije signum funkcije (slika 6.9.) može se poći od sljedeće formulacije:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}\left[e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)\right] \tag{6.70}$$

Fourierova transformacija signum funkcije, za $a > 0$, određuje se iz relacije (6.70):

$$\begin{aligned} F\{\text{sgn}(t)\} &= \lim_{a\to 0}\left\{F\left\{e^{-at}u(t)\right\} - F\left\{e^{at}u(-t)\right\}\right\} = \\ &= \lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega}\right) = \lim_{a\to 0}\frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega} \end{aligned} \tag{6.71}$$

Dakle, Fourierova transformacija signum funkcije je:

$$\text{sgn}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2}{j\omega} \tag{6.72}$$

6.4.6 Fourierova transformacija jedinične funkcije

Ako se za jediničnu funkciju koristi definicija data relacijom:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0.5, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{6.73}$$

dobije se:

$$u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{6.74}$$

6.4.7 Vremensko skaliranje

Pod vremenskim skaliranjem podrazumijeva se zamjena promjenljive t u funkciji $f(t)$ promjenljivom t skaliranom sa k, gdje je k realna konstanta. Lik ovakve funkcije, za $k > 0$ dobije se na slijedeći način:

$$f(kt) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{k}u}du = \frac{1}{k}F\left(j\frac{\omega}{k}\right) \tag{6.75}$$

Ako je $k > 1$ funkcija $f(kt)$ predstavlja vremensku funkciju $f(t)$ komprimiranu faktorom k, a $F(j\omega/k)$ predstavlja ekspandiranu funkciju $F(j\omega)$, istim faktorom k. Takođe, vremensko ekspandiranje funkcije faktorom $k < 1$ uzrokuje kompresiju signala u frekventnom domenu. Vremenska kompresija faktorom $k > 1$ znači se signal brže mijenja, pa se frekvencija sinusnih komponenata, od kojih se signal sastoji, mora povećati k puta, što znači da će frekventni spektar ekspandirati i obrnuto. Npr. signal $\cos 2\omega_0 t$ po obliku je isti kao i signal $\cos\omega_0 t$, ali vremenski komprimiran faktorom $k = 2$ (jer mu je frekvencija dva puta viša). Spektar signala $\cos 2\omega_0 t$, koji ima spektralne linije na $\pm 2\omega_0$ je ekspandirana verzija spektra $\cos\omega_0 t$, koji ima spektralne linije na $\pm\omega_0$.

Na primjeru pravougaonog signala $f_1(t) = p(t)$, na slici 6.10. ilustrirano je vremensko skaliranje faktorom $k = 0.5$ i dobijen signal $f_2(t) = p(0.5t)$. Na istoj slici prikazane su Fourierove transformacije signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$, čiji su analitički izrazi:

$$\begin{aligned} f_1(t) = p(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \operatorname{Sa}(\omega/2) \\ f_2(t) = p(kt) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{k}\operatorname{Sa}\frac{\omega}{2k} \\ f_2(t) = p(0.5t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\operatorname{Sa}\omega \end{aligned}$$

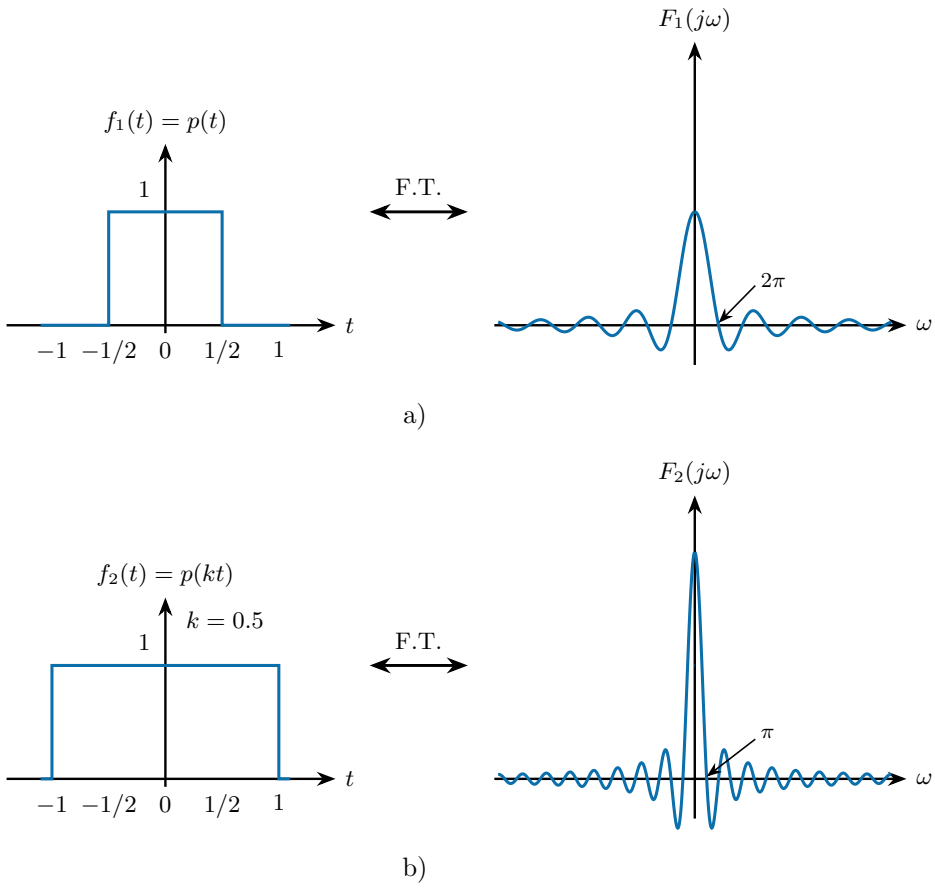
Fourierova transformacija signala $f_1(t)$ prolazi kroz nulu u tačkama $\omega = 2k\pi$, a signala $f_2(t)$ u tačkama $\omega = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Važno je napomenuti da za slučaj $k < 0$ važi:

$$f(kt) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{-1}{k}F\left(j\frac{\omega}{k}\right) \tag{6.76}$$

ili u općem slučaju ($k \neq 0$):

$$f(kt) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|k|}F\left(j\frac{\omega}{k}\right) \tag{6.77}$$



Slika 6.10: Ilustracija osobine vremenskog skaliranja.

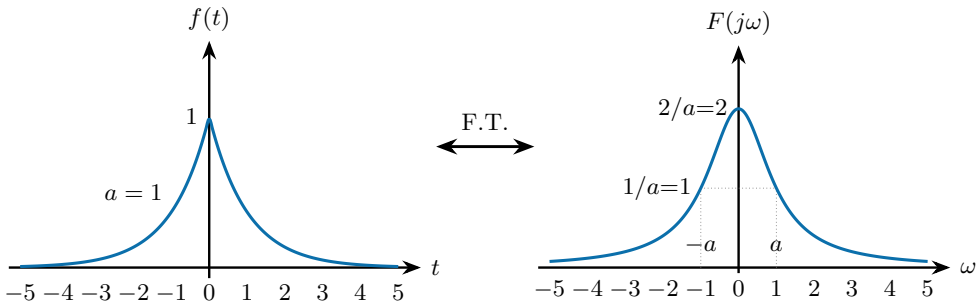
Primjer 6.6:

Koristeći osobinu vremenskog skaliranja datu relacijom (6.77) odrediti Fourierovu transformaciju signala $e^{at}u(-t)$ i $e^{-a|t|}$, ako za $a > 0$ važi:

$$e^{-at}u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a + j\omega}$$

Rješenje:
Na osnovu relacije (6.77), uzimajući da je $k = -1$, dobija se:

$$f(-t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(-j\omega) \tag{6.78}$$



Slika 6.11: Signal $e^{-a|t|}$ i njegov spektar (primjer 6.6).

tako da je:

$$e^{at}u(-t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a-j\omega}$$

Kako je:

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Fourierova transformacija signala $e^{-a|t|}$ je:

$$e^{-a|t|} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Signal $f(t) = e^{-a|t|}$ i njegov spektar $F(j\omega) = F(\omega) = 2a/\left(a^2+\omega^2\right)$ prikazani su na slici 6.11 za $a = 1$.

6.4.8 Vremenski pomak

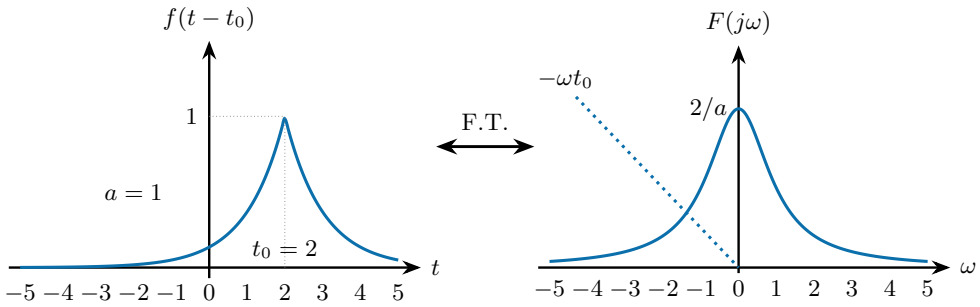
Vremenski pomak ostvaruje se zamjenom promjenljive t sa $t - t_0$ u funkciji $f(t)$, čime se vremenska funkcija pomjera duž apscise za t_0 :

$$f\left(t-t_0\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-t_0\right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega(t_0+u)} du = F(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (6.79)$$

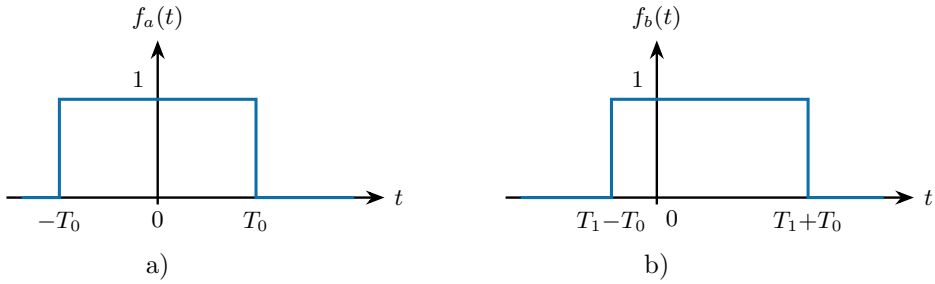
$$f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega) \quad (6.80)$$

$$f\left(t-t_0\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

Iz izraza (6.80) vidi se da vremenski pomak signala $f(t)$ za t_0 ne mijenja njegov amplitudni spektar. Fazni spektar će se promijeniti za $-\omega t_0$. To se može ilustrirati na primjeru funkcije $f(t) = e^{-a|t|}$ čiji će amplitudni spektar $F(\omega) = 2a/\left(a^2+\omega^2\right)$ ostati nepromijenjen pri vremenskom pomjeranju signala (jer je $\left|e^{-j\omega t_0}\right| = 1$). Fazni spektar (slika 6.12.) signala $f(t) = e^{-a|t|}$ jednak je nuli, a njegovim vremenskim pomakom dobija se linearna faza $-\omega t_0$.



Slika 6.12: Efekat vremenskog pomaka na amplitudni i fazni spektar signala.



Slika 6.13: a) Pravougaoni signal, b) vremenski pomaknuti pravougaoni signal (primjer 6.7).

Primjer 6.7:

Koristeći Fourierovu transformaciju pravougaonog signala prikazanog na slici 6.13.a, odrediti Fourierovu transformaciju pravougaonog signala prikazanog na slici 6.13.b.

Rješenje:
Signal $f_b(t)$ prikazan na slici 6.13.b je vremenski pomaknuti signal $f_a(t)$, odnosno $f_b(t) = f_a(t - T_1)$. Prema relaciji (6.79) Fourierova transformacija vremenski pomaknutog signala je:

$$f_a(t - T_1) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_a(j\omega)e^{-j\omega T_1} = F_b(j\omega)$$

Fourierova transformacija pravougaonog signala, na osnovu relacije (6.60) je:

$$F_a(j\omega) = 2T_0 Sa(\omega T_0) \tag{6.81}$$

tako da je Fourierova transformacija pomaknutog pravougaonog signala:

$$F_b(j\omega) = F_a(j\omega)e^{-j\omega T_1} = 2T_0 Sa(\omega T_0)\, e^{-j\omega T_1} \tag{6.82}$$

6.4.9 Teorema o modulaciji

Poseban postupak modifikacije signala predstavlja množenje funkcije $f(t)$ funkcijom oblika $e^{j\omega_0 t}$. Taj umnožak ima Fourierovu transformaciju:

$$F\left\{f(t)e^{j\omega_0 t}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt = F\left(j\omega - j\omega_0\right)$$

$$f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F\left(j\omega \mp j\omega_0\right) \tag{6.83}$$

Iz izraza (6.83) vidi se na taj način spektar $F(j\omega)$ pomjera duž ω ose za ω_0. Ovaj postupak se naziva amplitudna modulacija harmonijskim nosiocem. Važno je napomenuti da nosilac $e^{j\omega_0 t}$ u relaciji (6.83) nije realna funkcija.

6.4.10 Fourierova transformacija kompleksne harmonijske funkcije

Kompleksna harmonijska funkcija može se napisati u obliku:

$$e^{\pm j\omega_0 t} = 1 \cdot e^{\pm j\omega_0 t}$$

Primjenom teoreme o modulaciji (6.83) i Fourierove transformacije konstante jedan (6.66) Fourierova transformacija kompleksne harmonijske funkcije je:

$$F\left\{1 \cdot e^{\pm j\omega_0 t}\right\} = 2\pi\delta\left(\omega \mp \omega_0\right) \tag{6.84}$$

6.4.11 Fourierova transformacija kosinusne funkcije

Koristeći Eulerovu formulu funkcija $\cos\omega_0 t$ može se napisati u obliku:

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Iz relacije (6.84) slijedi:

$$\cos\omega_0 t \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} \pi\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right) + \delta\left(\omega + \omega_0\right)\right] \tag{6.85}$$

Funkcija $\cos\omega_0 t$ i njen realni spektar prikazani su na slici 6.18.a. Spektar se sastoji od dva delta impulsa površine π, na učestanostima $\pm\omega_0$.

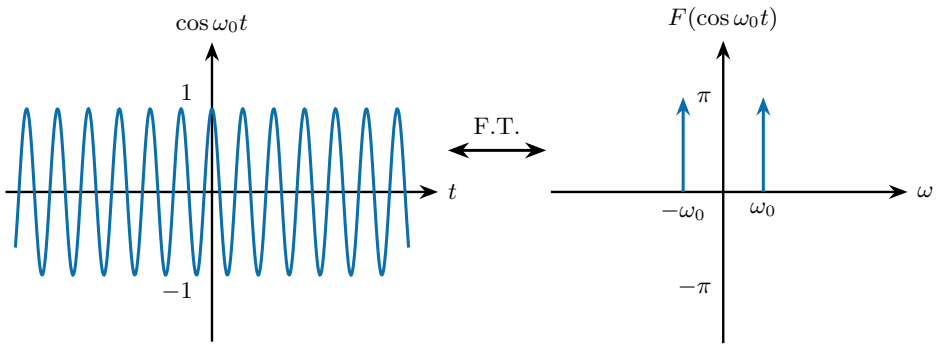
6.4.12 Fourierova transformacija sinusne funkcije

Koristeći Eulerovu formulu funkcija $\sin\omega_0 t$ može se napisati u obliku:

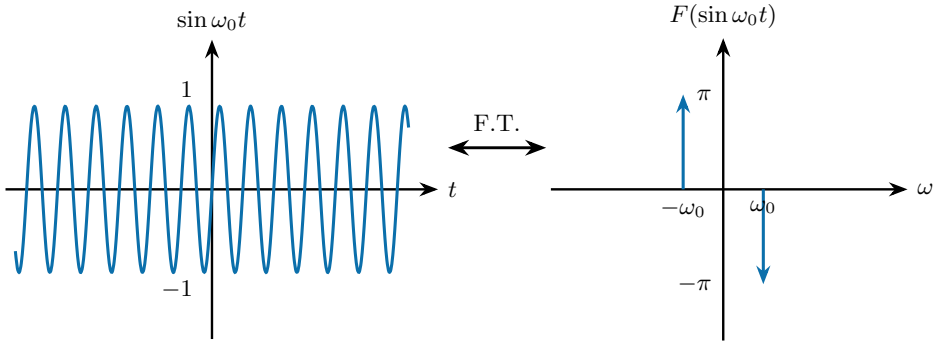
$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Koristeći ovu relaciju i (6.84), dobije se:

$$\sin\omega_0 t \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} j\pi \cdot \left[\delta\left(\omega + \omega_0\right) - \delta\left(\omega - \omega_0\right)\right] \tag{6.86}$$



a)



b)

Slika 6.14: a) Kosinusna funkcija i njen realni spektar, b) sinusna funkcija i njen imaginarni spektar.

Funkcija $\sin \omega_0 t$ i njen imaginarni spektar prikazani su na slici 6.14.b. Imaginarni spektar se sastoji od dva delta impulsa površine $\pm\pi$, na $\mp\omega_0$.

6.4.13 Fourierova transformacija periodičke funkcije

Formalno gledajući, periodičke funkcije ne zadovoljavaju Dirichleov uslov apsolutne integrabilnosti, pa ne bi mogle imati ni Fourierovu transformaciju. Međutim, periodička funkcija može se napisati u obliku Fourierovog reda:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{+jk\omega_0 t}$$

Primjenom relacija (6.67) i (6.84) dobija se:

$$f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi C_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right) \tag{6.87}$$

Fourierova transformacija periodičke funkcije perioda T, sa koeficijentima Fourierovog reda $\{C_k\}$, je linearna kombinacija impulsnih funkcija u tačkama $k\omega_0 = 2\pi k/T$, površine $2\pi C_k$.

6.4.14 Fourierova transformacija niza (povorke) impulsa

Niz impulsa (slika 6.15.) je periodički signal perioda T definiran relacijom:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \tag{6.88}$$

Fourierova transformacija niza impulsa može se dobiti primjenom osobine linearnosti i teoreme o kašnjenju (6.38):

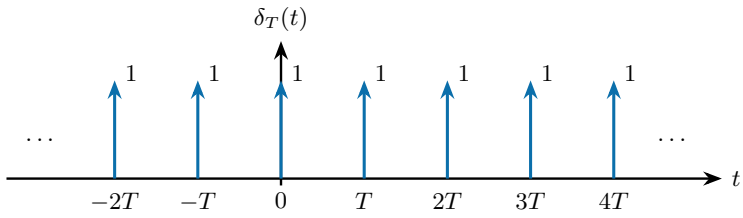
$$\delta_T(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\omega T} \tag{6.89}$$

Fourierova transformacija niza impulsa može se dobiti i kada se niz impulsa prvo predstavi Fourierovim redom, a zatim se nađe Fourierova transformacija tog reda. Fourierov red niza impulsa definiran je koeficijentima C_k :

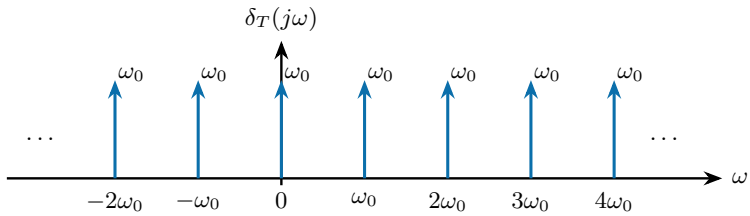
$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \tag{6.90}$$

tako da je Fourierov red niza impulsa:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} \tag{6.91}$$



Slika 6.15: Niz (povorka) jediničnih impulsa.



Slika 6.16: Fourierova transformacija niza impulsa dobijena iz Fourierovog reda.

Fourierova transformacija Fourierovog reda niza impulsa (slika 6.16.) dobije se primjenom relacije (6.67) i teoreme o modulaciji (6.83):

$$\delta_T(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) \tag{6.92}$$

$$\delta_T(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) \tag{6.93}$$

Dakle, Fourierova transformacija niza impulsa perioda T, također je periodički niz impulsa u frekventnom domenu, perioda $\omega_0 = 2\pi/T$. Ovdje je ponovo ilustriran inverzni odnos vremenskog i frekventnog domena. Što je rastojanje između impulsa u vremenskom domenu veće, to je rastojanje između impulsa u frekventnom domenu manje i obrnuto.

6.4.15 Konjugovanje i konjugovana simetrija

Ako je Fourierov transformacioni par $f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega)$, onda je i Fourierov transformacioni par:

$$f^*(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F^*(-j\omega) \tag{6.94}$$

Osobina data relacijom (6.94) pokazuje se konjugovanjem obje strane relacije (6.8):

$$F^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{j\omega t}dt \tag{6.95}$$

Zamjenom promjenljive ω promjenljivom $-\omega$, prethodna relacija postaje:

$$F^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.96}$$

čime je direktno pokazano da vrijedi osobina data relacijom (6.94).
Ako je $f(t)$ realan signal, onda je $f^*(t) = f(t)$, i važi osobina konjugovane simetrije.

$$F(-j\omega) = F^*(j\omega) \tag{6.97}$$

Zamjenom $f^*(t)$ sa $f(t)$ u relaciji (6.96), dobija se:

$$F^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt = F(j\omega)$$

a relacija (6.97) se dobije zamjenom promjenljive ω promjenljivom $-\omega$.

Spektar $F(j\omega)$ se može rastaviti na realni i imaginarni dio:

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\{F(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$$

pa ako je $f(t)$ isključivo realan signal, onda vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} &= \mathrm{Re}\{F(-j\omega)\}\\ \mathrm{Im}\{F(j\omega)\} &= -\,\mathrm{Im}\{F(-j\omega)\}\end{aligned}$$

Dakle, ako je $f(t)$ realan signal, onda je realni dio Fourierove transformacije parna funkcija, dok je imaginarni dio neparna funkcija kružne frekvencije ω.

Ekvivalentne osobine se pokazuju za slučaj da je $f(t)$ čisto imaginarna funkcija. Prvo vrijedi da je $f^*(t) = -f(t)$. Zamjenom $f^*(t)$ sa $-f(t)$ u relaciji (6.96), dobije se:

$$\begin{aligned}F^*(j\omega) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt\\ F^*(j\omega) &= -F(-j\omega)\end{aligned} \tag{6.98}$$

Ispitujući realni i imaginarni dio ove relacije, dobijaju se zavisnosti:

$$\mathrm{Re}\{F(j\omega)\} = -\,\mathrm{Re}\{F(-j\omega)\} \quad \text{i} \quad \mathrm{Im}\{F(j\omega)\} = \mathrm{Im}\{F(-j\omega)\}.$$

Dakle, ako je $f(t)$ imaginaran signal, tada je realni dio Fourierove transformacije neparna funkcija a imaginarni parna funkcija kružne frekvencije ω.

6.4.16 Konjugovanje: parni i neparni signali

Neka je $f(t)$ realna i parna funkcija. Tada je: $f^*(t) = f(t) = f(-t)$. Zamjenjujući $f^*(t)$ sa $f(-t)$ u relaciji (6.95), dobije se:

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t)e^{-j\omega(-t)}dt$$

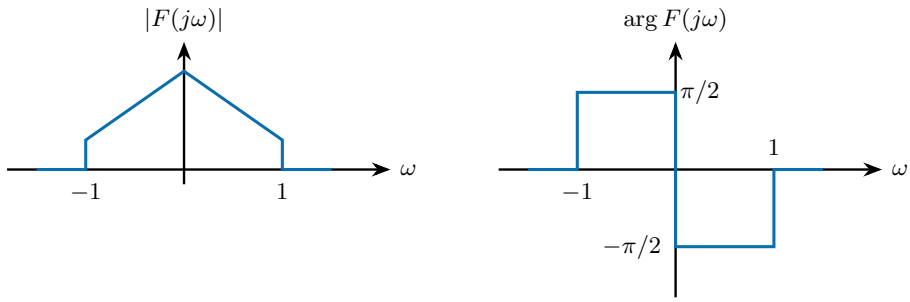
Ako se u prethodnoj relaciji napravi smjena $\tau = -t$, dobije se:

$$\begin{aligned}F^*(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = F(j\omega)\\ F^*(j\omega) &= F(j\omega) = R(\omega)\end{aligned} \tag{6.99}$$

Da bi relacija (6.99) bila zadovoljena, imaginarni dio Fourierove transformacije mora biti jednak nuli. Dakle, ako je $f(t)$ realna i parna funkcija, onda je $F(j\omega)$ realna funkcija, odnosno $F(j\omega) = R(\omega)$.

Slično se može pokazati da ako je $f(t)$ realna i neparna funkcija, onda je $F(j\omega)$ imaginarna funkcija, pa vrijedi relacija:

$$F^*(j\omega) = -F(j\omega) \tag{6.100}$$



Slika 6.17: Amplitudni i fazni spektri signala $f(t)$ (primjer 6.8).

Primjer 6.8:

Odrediti kakav vremenski signal odgovara signalima u frekventnom domenu, odnosno odrediti da li su vremenski signali realni ili kompleksni, i parni ili neparni.
a) $F(j\omega) = \omega^{-2} + j\omega^{-3}$,
b) amplitudni i fazni spektar su prikazani na slici 6.17.

Rješenje:
a) Kako Fourierova transformacija $F(j\omega) = \omega^{-2} + j\omega^{-3}$ ima realni dio ω^{-2} koji je parna funkcija frekvencije i imaginarni dio ω^{-3} koji je neparna funkcija frekvencije, to je signal $f(t)$ realan, te ima i parni i neparni dio.
b) Kako je amplitudni spektar parna funkcija učestanosti ω (slika 6.17.), a fazni neparna funkcija učestanosti, to je signal $f(t)$, na osnovu relacija (6.24) i (6.25) realan signal. Kako je:

$$\operatorname{arctg} \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ odnosno } \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \pm\infty,$$

može se zaključiti da je $R(\omega) = 0$. Kako je, za realan signal $f(t)$, Fourierova transformacija isključivo imaginarna funkcija, slijedi da $f_R(t)$ mora biti neparan signal. Dakle, $f(t)$ je realan i neparan vremenski signal.

6.4.17 Izvod i integral originala

Operacije diferenciranja i integriranja mogu kod nekih signala opisanih matematičkim funkcijama značajno uprostiti njihov analitički izraz i time pojednostaviti naknadna izračunavanja. Ako je signal $f(t)$ aperiodički i ako $f(t)$ ima izvode do n-tog, onda je inverzna Fourierova transformacija:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Diferenciranjem obje strane ove relacije po promjenljivoj t dobije se:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega \tag{6.101}$$

Iz ovoga izraza se vidi da prvi izvod $f(t)$ ima Fourierovu transformaciju:

$$\frac{df(t)}{dt} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} j\omega F(j\omega) \tag{6.102}$$

Za n-ti izvod dobije se veza:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} (j\omega)^n F(j\omega) \tag{6.103}$$

što znači da n-tom izvodu signala u vremenskom domenu odgovara množenje Fourierove transformacije sa $(j\omega)^n$ u frekventnom domenu.

Važno je primijetiti da diferenciranje uklanja istosmjernu (DC) komponentu signala $f(t)$.

Izvod signala koji se kontinualno mijenja, ne unosi nikakve principijelne poteškoće pri primjeni osobine date relacijom (6.103). Međutim, kod signala koji imaju skokove, izvod u tim tačkama može imati beskonačno veliku vrijednost. Ekvivalentno zaključku o diferenciranju signala, moglo bi se zaključiti da integriranju u vremenskom domenu odgovara dijeljenje sa $j\omega$ u frekventnom domenu. Međutim, to je samo jedan dio izraza. Potpuna relacija je:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{j\omega}F(j\omega) + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{6.104}$$

pri čemu se od $f(t)$ zahtijeva da bude kauzalan signal, ili barem da bude jednak nuli za $t < t_0$ ($t_0 \in \mathbb{R}$). Impulsni član sa desne strane relacije (6.104) je posljedica istosmjerne (DC) komponente ili srednje vrijednosti signala. Relacija (6.104) će biti dokazana nakon nalaženja Fourierove transformacije konvolucije dva signala (6.115).

Primjer 6.9:

Signal $f(t) = e^{-at}u(t)$ ima Fourierovu transformaciju $F(j\omega) = 1/(a + j\omega)$. Primjenom osobine izvoda originala (6.102) i Fourierove transformacije izvoda, dobije se:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}u(t)\right] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{j\omega}{a + j\omega} \tag{6.105}$$

Ovaj rezultat potvrditi diferenciranjem $f(t)$, a zatim nalaženjem Fourierove transformacije dobijenog rezultata.

Rješenje:

Izvod signala $f(t)$ je:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}u(t)\right] = -a\cdot e^{-at}u(t) + \underbrace{e^{-at}\delta(t)}_{\delta(t)} = -a\cdot e^{-at}u(t) + \delta(t)$$

Fourierova transformacija ovog izvoda je:

$$F\left\{\frac{d}{dt}\left[e^{-at}u(t)\right]\right\} = F\left[-a\cdot e^{-at}u(t) + \delta(t)\right] = \frac{-a}{a+j\omega} + 1 = \frac{j\omega}{a+j\omega}$$

čime je potvrđen rezultat dobijen u relaciji (6.105).

Primjer 6.10:

Koristeći osobinu izvoda originala, provjeriti relaciju (6.74) datu u obliku:

$$u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Rješenje:
Kako je:

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

tako je:

$$\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

Nalazeći Fourierovu transformaciju obje strane ove relacije, uz primjenu relacija (6.103) i (6.64) dobija se:

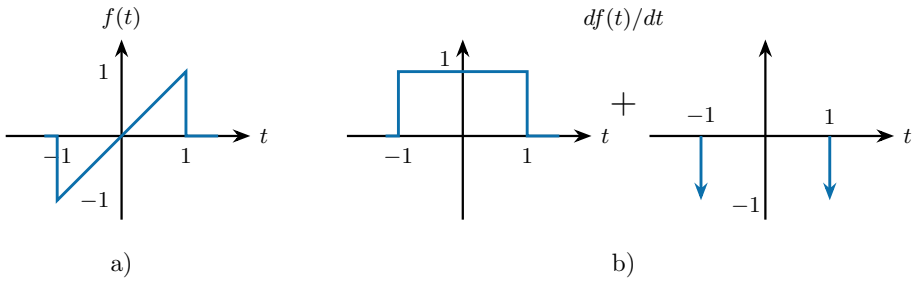
$$F\left\{\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t)\right\} = F\{2\delta(t)\} \Rightarrow j\omega F\{\operatorname{sgn}(t)\} = 2 \Rightarrow$$
$$F\{\operatorname{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

Fourierova transformacija jedinične funkcije $u(t)$ je suma Fourierove transformacije konstante 1/2 i Fourierove transformacije signala $\operatorname{sgn}(t)/2$.

$$F\{u(t)\} = F\left\{\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sgn}(t)}{2}\right\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Primjer 6.11:

Odrediti Fourierovu transformaciju $F(j\omega)$ za signal $f(t)$ prikazan na slici 6.18.a.



a) b)

Slika 6.18: a) Signal $f(t)$, b) prvi izvod signala (primjer 6.11).

Rješenje:
Za nalaženje Fourierove transformacije signala $f(t)$ biće korištena osobina data relacijom (6.103). Signal $f(t)$ ima dva diskontinuiteta, dakle konačne promjene koje se (teoretski) dešavaju u beskonačno kratkom vremenu. U tim trenucima brzina promjene signala (izvod) je beskonačno velika. Između diskontinuiteta signal se mijenja po linearnom zakonu, pa će izvod toga dijela signala $f(t)$ biti konstantan. Kompletan izvod signala $f(t)$ sastoji se od pravougaonog signala i dva delta impulsa (slika 6.18.b):

$$\frac{df(t)}{dt} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} j\omega F(j\omega) \quad \Longrightarrow \quad \frac{df(t)}{dt} = p\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)$$

Fourierova transformacija ovog izraza, koristeći prethodno dobijene rezultate je:

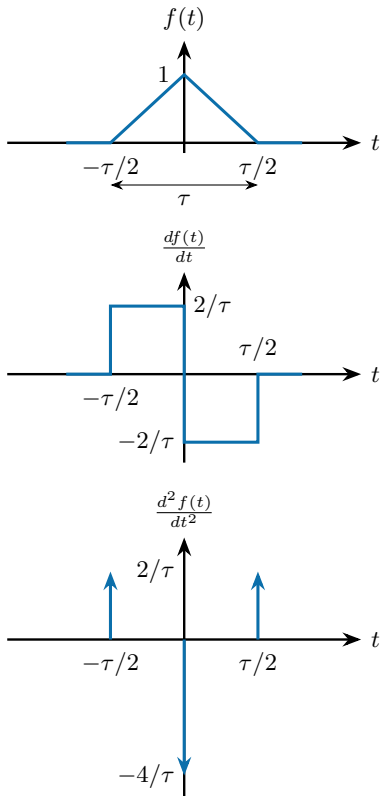
$$F\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = F\left\{p\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)\right\} = \frac{2\sin\omega}{\omega} - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

Za određivanje Fourierove transformacije početnog signala $f(t)$, prethodni izraz, prema relaciji (6.102) treba podijeliti sa $j\omega$, tako da je:

$$F\{f(t)\} = \frac{1}{j\omega} F\left\{p\left(\frac{t}{2}\right) - \delta(t+1) - \delta(t-1)\right\} = \frac{1}{j\omega}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} - e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) =$$
$$= \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

Relacija za $F(j\omega)$ ima samo imaginarni dio i on je neparna funkcija promjenljive ω, jer je $f(t)$ realan i neparan signal promjenljive t.

Metod prikazan u prethodnom primjeru je primjenljiv samo za signale koji se diferenciranjem mogu svesti na $\delta(t)$ impulse, pri čemu se operacija diferenciranja može ponavljati onoliko puta koliko je potrebno da se početni signal svede na $\delta(t)$ impulse. Razlog za to je jednostavnost izraza za Fourierovu transformaciju n-tog izvoda signala $f(t)$. Dakle, ako je signal analitički opisan konstantom (ili se može aproksimirati konstantom), linearnim segmentom ili polinomom po t, za određivanje Fourierove transformacije signala može se



Slika 6.19: Trougaoni signal, prvi izvod signala i drugi izvod signala (primjer 6.12).

koristiti prethodno opisani postupak.

Primjer 6.12:

Odrediti Fourierovu transformaciju trougaonog signala $f(t) = q(t/\tau)$ prikazanog na slici 6.19.

Rješenje:
Na osnovu grafičkog nalaženja prvog i drugog izvoda (slika 6.19) zadatog signala dobija se:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = \frac{2}{\tau}\left[\delta\left(t+\frac{\tau}{2}\right) - 2\delta(t) + \delta\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

Prema teoremi o izvodu originala (6.103) drugi izvod ima Fourierovu transformaciju:

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} (j\omega)^2F(j\omega) = -\omega^2F(j\omega)$$

odnosno:

$$-\omega^2 F(j\omega) = \frac{2}{\tau}\left(e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - 2 + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\right) = \frac{4}{\tau}\left(\cos\frac{\omega\tau}{2} - 1\right) = -\frac{8}{\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

tako da je Fourierova transformacija zadanog trougaonog signala:

$$F(j\omega) = \frac{8}{\omega^2\tau}\sin^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) = \frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$
$$q\left(\frac{t}{\tau}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) \tag{6.106}$$

Primjenjujući na izraz (6.106) teoremu o simetriji (6.59) dobija se inverzna Fourierova transformacija trougaonog signala zadatog u frekventnom domenu:

$$2\pi q\left(\frac{-\omega}{\tau}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{t\tau}{4}\right)$$
$$q\left(\frac{\omega}{\tau}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\tau}{4\pi}Sa^2\left(\frac{t\tau}{4}\right)$$

Ako je $\tau = 2\omega_c$, onda je:

$$q\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\omega_c}{2\pi}Sa^2\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) \tag{6.107}$$

6.4.18 Izvod lika

Iz izraza za direktnu Fourierovu transformaciju:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

diferenciranjem obje strane n puta po promjenljivoj ω dobija se:

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-jt)^n e^{-j\omega t}dt \tag{6.108}$$

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} (-jt)^n f(t) \tag{6.109}$$

Izraz (6.109) vrijedi samo ako postoji Fourierova transformacija izraza $(-jt)^n f(t)$, tako da n-tom izvodu Fourierove transformacije odgovara množenje signala $f(t)$ članom $(-jt)^n$.

Primjer 6.13:

Odrediti Fourierovu transformaciju signala $t \cdot e^{-at}u(t)$ koristeći osobinu datu relacijom (6.109).

Rješenje:
Kako je Fourierova transformacija signala:

$$e^{-at}u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a+j\omega}$$

to se na osnovu relacije (6.109) dobija:

$$(-jt)e^{-at}u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{dF(j\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{1}{a+j\omega}\right] = \frac{-j}{(a+j\omega)^2}$$

tako da je Fourierova transformacija traženog signala:

$$te^{-at}u(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(a+j\omega)^2} \tag{6.110}$$

6.4.19 Konvolucija originala

Konvolucija dva aperiodička signala je:

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \tag{6.111}$$

Fourierova transformacija izraza (6.111) je:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_l(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt \tag{6.112}$$

Ako se podintegralna funkcija pomnoži sa $1 = e^{-j\omega\tau}\cdot e^{j\omega\tau}$ i promijeni redoslijed integriranja, dobit će se proizvod dva integrala koji predstavljaju Fourierovu transformaciju aperiodičkih signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$:

$$\begin{aligned} f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} & \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau)e^{-j\omega(t-\tau)}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)e^{-j\omega x}dx \\ &= F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega) \end{aligned}$$

odnosno:

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega) \tag{6.113}$$

Dakle, složena operacija konvolucije u vremenskom domenu (6.111) zamjenjuje se jednostavnom operacijom množenja u frekventnom domenu, tako da se relacija (6.113) može napisati u obliku:

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega)\cdot F_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.114}$$

Ako se na primjer posmatra prolazak nekog signala kroz LTI sistem, odziv LTI sistema u t-domenu će biti konvolucija ulaznog signala i impulsnog odziva koji odražava svojstva sistema, odnosno $g(t) = f(t) * h(t)$. Talasni oblik izlaznog signala je integralni izraz svih komponenti zajedno. Konvolucioni integral podrazumijeva pomjeranje jednog od signala u vremenu, uz uslov da se trenutne vrijednosti koje su "prošle" više ne uzimaju u obzir. Jedan od signala mora biti okrenut, jer to znači da jedan signal "prolazi" kroz drugi. Cjelovitost signala se obezbjeđuje integriranjem, po jednom za svaku vrijednost pomjeraja. U ω-domenu prolazak signala kroz LTI sistem je shatljiviji, jer spektar ulaznog signala "prolazi" kroz spektar sistema s frekventnom funkcijom $H(j\omega)$, čime se dobije spektar izlaznog signala $G(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega)$. On predstavlja sistemom modifikovani ulazni spektar, pri čemu je modifikacija ostvarena za svaku učestanost.

Primjer 6.14:

Odrediti Fourierovu transformaciju konvolucije dva pravougaona signala ako je Fourierova transformacija pravougaonog signala širine $2a$:

$$p\left(\frac{t}{2a}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin(a\omega)}{\omega} = 2a\,\mathrm{Sa}(a\omega)$$

Rješenje:
Fourierova transformacija konvolucije dva pravougaona signala oblika $p(t/2a)$ može se dobiti primjenom osobine date relacijom (6.113), tako da se dobije:

$$p\left(\frac{t}{2a}\right) * p\left(\frac{t}{2a}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 4a^2 Sa^2(a\omega) = \frac{4\sin^2(a\omega)}{\omega^2}$$

Primjer 6.15:

Ako je $f(t) = (1/\pi t)\sin(\pi t)$ ulaz u linearni i vremenski invarijantni sistem s impulsnim odzivom $h(t) = (1/\pi t)\sin(2\pi t)$, odrediti odziv sistema.

Rješenje:
Ovaj problem je težak ako se rješava pomoću konvolucionog integrala u vremenskom domenu. Međutim, ako se iskoristi rješenje dato relacijom (6.62), onda su Fourierove transformacije ulaznog signala i impulsnog odziva:

$$f(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega) = p\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} H(j\omega) = p\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 2\pi \\ 0, & |\omega| > 2\pi \end{cases}$$

i primjeni relacija (6.113) na odziv sistema:

$$g(t) = f(t) * h(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} G(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

dobija se:

$$G(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi \\ 0, & |\omega| > \pi \end{cases} = p\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

iz čega se, na osnovu relacije (6.62), zaključuje da je:

$$g(t) = (1/\pi t)\sin(\pi t) = Sa(\pi t)$$

Primjer 6.16:

Koristeći osobinu konvolucije originala i Fourierovu transformaciju funkcije $u(t)$, pokazati da vrijedi veza:

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{6.115}$$

Rješenje:
Kako je:

$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \tau < t \\ 0, & \tau > t \end{cases}$$

onda slijedi da je:

$$f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

Koristeći osobinu datu relacijom (6.113) i (6.74) dobije se:

$$f(t) * u(t) = f(t) * \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(j\omega)\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$
$$= \frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Primjer 6.17:

Koristeći Fourierovu transformaciju odrediti impulsni odziv $h(t)$ dva kaskadno vezana LTI sistema, čiji su impulsni odzivi:

$$h_1(t) = p(t) \text{ i } h_2(t) = \cos(\pi t)$$

Rješenje:
Kako kaskadno vezani LTI sistemi imaju impulsni odziv jednak konvoluciji impulsnih odziva, to koristeći osobinu (6.113) dobije se:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) = F^{-1}\left\{H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)\right\}$$

Fourierove transformacije datih impulsnih odziva su:

$$h_1(t) = p(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$$

$$h_2(t) = \cos(\pi t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega+\pi) + \pi\delta(\omega-\pi)$$

tako da je:

$$\begin{aligned}
h(t) &= F^{-1}\left\{H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)\right\} \\
&= F^{-1}\left\{\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\cdot\left[\pi\delta(\omega+\pi)+\pi\delta(\omega-\pi)\right]\right\} \\
&= F^{-1}\left\{\pi\delta(\omega+\pi)\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}+\pi\delta(\omega-\pi)\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right\} \\
&= F^{-1}\left\{\pi\delta(\omega+\pi)\frac{\sin(-\pi/2)}{-\pi/2}+\pi\delta(\omega-\pi)\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2}\right\} \\
&= F^{-1}\left\{\frac{2}{\pi}\pi\delta(\omega+\pi)+\frac{2}{\pi}\pi\delta(\omega-\pi)\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\cos(\pi t)
\end{aligned}$$

U ovom primjeru korištene su osobine selektivnosti $\delta(\omega)$ impulsa: $F(j\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$ i $F(j\omega)\delta(\omega-\omega_0) = F(j\omega_0)\,\delta(\omega-\omega_0)$, koje su ekvivalentne osobinama $\delta(t)$ impulsa u vremenskom domenu.

6.4.20 Korelaciona funkcija aperiodičkih signala

Ako se od dva realna aperiodička signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$ formira izraz:

$$\rho_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t+\tau) d\tau \tag{6.116}$$

gdje t predstavlja kontinualni pomjeraj u vremenu τ, onda dati izraz predstavlja korelacionu funkciju aperiodičkih signala $f_1(t)$ i $f_2(t)$. Korelaciona funkcija predstavlja indikator stepena bliskosti dva signala. Iz oblika ove funkcije izvode se zaključci o odnosu između njihovih talasnih oblika. Izraz (6.116) podrazumijeva pomjeranje jednog signala u odnosu na drugi, množenje takvih signala i integriranje kao mjeru stepena preklapanja dva signala. Kako aperiodički signali mogu imati proizvoljno trajanje i položaj na vremenskoj osi, pri traženju korelacije dva signala mora se obezbijediti siguran interval u kome će doći do "susreta" signala. Zbog toga se pomjeraj u vremenu t mora nalaziti u granicama $(-\infty, \infty)$. Ako signali $f_1(t)$ i $f_2(t)$ imaju Fourierove transformacije $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$, tada, ako se u izrazu (6.116) signal $f_2(t+\tau)$ zamijeni njegovom inverznom Fourierovom transformacijom, dobija se:

$$\rho_{12}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(j\omega)e^{j\omega(t+\tau)}d\omega\right]d\tau$$

Zamjenom redoslijeda integriranja, dobija se:

$$\rho_{12}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(j\omega)e^{j\omega t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)e^{j\omega\tau}d\tau\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(j\omega)F_1(-j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Kako za realan signal važi relacija (6.98), to je:

$$\rho_{12}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.117}$$

Proizvod $F_1^*(j\omega)\cdot F_2(j\omega)$ predstavlja Fourierovu transformaciju korelacije aperiodičkih signala $\rho_{12}(t)$, tako da je:

$$F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\rho_{12}(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.118}$$

$$\rho_{12}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_1^*(j\omega)F_2(j\omega) \tag{6.119}$$

Prema tome, $\rho_{12}(t)$ i proizvod $F_1^*(j\omega)F_2(j\omega)$ predstavljaju Fourierov transformacioni par. Ovaj odnos (6.119) naziva se *Teorema o korelaciji aperiodičkih signala.*

U specijalnom slučaju kada se korelacija posmatra za isti realni i aperiodički signal, tj. za $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, onda je:

$$\rho_{11}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau \tag{6.120}$$

Izraz (6.120) se naziva *autokorelaciona funkcija* aperiodičkog signala $f(t)$ ("po vremenu"). Iako se čini da dovođenje u korelaciju signala sa samim sobom nema smisla, njen značaj je izražen u analizi slučajnih signala. Za slučaj determinističkih signala, ova relacija je značajna jer se iz nje dolazi do spektra snage i Parsevalove teoreme. Fourierova transformacija autokorelacione funkcije dobije se na slijedeći način:

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega)F(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 e^{j\omega t}d\omega\end{aligned} \tag{6.121}$$

odnosno:

$$\rho_{11}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} |F(j\omega)|^2 \tag{6.122}$$

Funkcija $|F(j\omega)|^2$ se naziva *spektar snage*, i označava se sa:

$$S_{11}(\omega) = |F(j\omega)|^2 \tag{6.123}$$

tako da je:

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{11}(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{6.124}$$

$$S_{11}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{11}(t) e^{-j\omega t} dt \tag{6.125}$$

Kako je $f(t)$ realna funkcija, onda vrijedi:

$$\rho_{11}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F(-j\omega)F(j\omega) = F^2(\omega) \tag{6.126}$$

$$\rho_{11}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F^2(\omega) = S_{11}(\omega) \tag{6.127}$$

Dakle, spektar snage se računa direktno iz autokorelacione funkcije. Iz relacija (6.122) i (6.127) se vidi da je fazni spektar jednak nuli, što je logično, jer se autokorelaciona funkcija dobija pomjeranjem signala u odnosu na samog sebe, što nije vezano za koordinatni početak, odnosno vremensko pomjeranje.

6.4.21 Parsevalova teorema i teorema o energiji

Ukupna energija aperiodičkog vremenskog signala $f(t)$ definirana je relacijom:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \tag{6.128}$$

U ovoj relaciji je pretpostavljeno da $f(t)$, u općem slučaju, može imati i kompleksnu vrijednost. Ako se obje strane relacije (6.9), za inverznu Fourierovu transformaciju, konjuguju, onda je:

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Zamjenjujući $f^*(t)$ u relaciju (6.128) dobija se:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

Mijenjajući redoslijed integriranja, slijedi:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

Integral u srednjoj zagradi je Fourierova transformacija funkcije $f(t)$, pa je:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \tag{6.129}$$

Relacija (6.129) se naziva Parsevalova teorema. Kako je lijeva strana relacije (6.129) normalizirani energetski sadržaj signala $f(t)$ (označen sa E), Parsevalova teorema kaže da se energetski sadržaj signala $f(t)$ može izračunati i integriranjem $|F(j\omega)|^2$ po svim frekvencijama ω i normiranjem faktorom 2π. Zbog toga se izraz $(1/2\pi)|F(j\omega)|^2$ naziva *spektralna gustina energije* ili *spektar energije* signala $f(t)$.

Za realnu funkciju $f(t)$, spektri $F(j\omega)$ i $F(-j\omega)$ su konjugovano kompleksni par, $|F(j\omega)|^2$ je parna funkcija promjenljive ω, tako da je:

$$|F(j\omega)|^2 = F(j\omega)F^*(j\omega) = F(j\omega)F(-j\omega)$$

pa se relacija (6.129) može napisati u obliku:

$$E = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \tag{6.130}$$

Relacija (6.130) pretpostavlja da $F(j\omega)$ ne sadrži impuls na $\omega = 0$. U slučaju da takav impuls postoji, integral njegovog kvadrata treba naći posebno i pomnožiti ga faktorom $1/(2\pi)$, a ne faktorom $1/\pi$. Dakle, energija E signala, predstavlja površinu ispod $|F(j\omega)|^2$, pomnoženu faktorom $1/\pi$, za frekventni opseg $0 < \omega < \infty$. Kako izraz sa lijeve strane relacije (6.129) predstavlja ukupnu energiju koju nosi signal $f(t)$, to i izraz sa desne strane relacije (6.129) predstavlja ukupnu energiju koju nosi signal. Na osnovu talasnog oblika signala može se odrediti samo ukupna energija, dok spektralna gustina energije, koja pokazuje kako je ukupna energija signala raspoređena po učestanostima, omogućava da se odredi koliki dio od ukupne energije signala nosi posmatrani interval učestanosti. Za frekventni opseg $\omega_1 \div \omega_2$, energija je:

$$\Delta E = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_l}^{\omega_2} |F(j\omega)|^2 d\omega \tag{6.131}$$

Primjer 6.18:

Odrediti energiju signala $f(t) = Sa(at)$.

Rješenje:
Na osnovu relacije (6.129) dobije se ukupna energija zadanog signala:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} Sa^2(at)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi^2}{a^2} p^2\left(\frac{\omega}{2a}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}\int_{-a}^{+a} 1\cdot d\omega = \frac{\pi}{a}$$

Primjer 6.19:

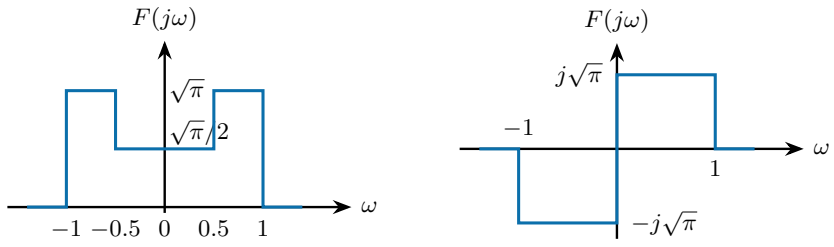
Odrediti energiju signala $f(t) = e^{-at}u(t)$ za parametar $a > 0$. Odrediti frekvenciju ω_M[rad/s] takvu da opseg $\omega = 0$ do $\omega = \omega_M$ sadrži 95% ukupne energije signala.

Rješenje:
Prema definiciji (6.129) je:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}$$

Ovaj rezultat se može potvrditi primjenom Parsevalove teoreme. Za signal $f(t)$ Fourierova transformacija je:

$$F(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$



Slika 6.20: Fourierove transformacije signala (primjer 6.20).

pa je prema relaciji (6.130) energija:

$$E = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi a}\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Da bi opseg $\omega = 0$ do $\omega = \omega_M$ sadržavao 95% ukupne energije, onda je, prema relaciji (6.131):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_M} \frac{1}{a^2+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega}{a}\Big|_0^{\omega_M} = \frac{1}{\pi a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega_M}{a} = 0,95\cdot\frac{1}{2a}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{\omega_M}{a} = 0.95\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega_M = a\cdot 12.706[\text{rad/s}]$$

Ovaj rezultat znači da spektralne komponente signala $f(t)$, u opsegu od 0 (DC) do $\omega_M = a\cdot 12.706$[rad/s] ili $a\cdot 2.02$[Hz], sadrže 95% ukupne energije signala, dok sve ostale komponente (u opsegu $a\cdot 12.706$[rad/s] do ∞) sadrže samo 5% energije signala.

Primjer 6.20:

Za signale čije su Fourierove transformacije prikazane na slikama 6.20.a i 6.20.b
a) odrediti energiju $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$
b) odrediti vrijednost signala $f_1(t)$ u trenutku $t = 0$, ako je $f_1(t) = \frac{d}{dt} f(t)$

Rješenje:

a) Energija signala sa slike 6.20.a je:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_{0.5}^{1} (\sqrt{\pi})^2 d\omega + 2 \int_{0}^{0.5} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^2 d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(2\pi \cdot 0.5 + 2 \frac{\pi}{4} \cdot 0.5 \right) \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Energija signala sa slike 6.20.b je:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \int_{0}^{1} |j\sqrt{\pi}|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \pi = 1$$

b) Iz relacije $f_1(t) = \frac{df(t)}{dt} \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} j\omega F(j\omega) = F_1(j\omega)$ se dobije:

$$f_1(0) = \left. \frac{d}{dt} f(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right|_{t=0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega) d\omega$$

Za signal na slici 6.20.a je:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega F(j\omega) d\omega = \frac{j}{2\pi} \sqrt{\pi} \left(\left. \frac{\omega^2}{2} \right|_{-1}^{-0.5} + \left. \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{2} \right|_{-0.5}^{0} + \left. \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{2} \right|_{0}^{0.5} + \left. \frac{\omega^2}{2} \right|_{0.5}^{1} \right) = \\ &= \frac{j}{2\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(0.5^2 - 1^2 + \frac{1}{2} \left(-0.5^2 \right) + \frac{1}{2} 0.5^2 + 1^2 - 0.5^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Za signal na slici 6.20.b je:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega(-j\sqrt{\pi}) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega(j\sqrt{\pi}) d\omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} \left(\left. \frac{\omega^2}{2} \right|_{-1}^{0} - \left. \frac{\omega^2}{2} \right|_{0}^{l} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\pi} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

6.4.22 Frekventna konvolucija

Ako je $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$ i ako su $F(j\omega)$, $F_1(j\omega)$ i $F_2(j\omega)$ Fourierove transformacije signala $f(t), f_1(t)$ i $f_2(t)$ respektivno, tada je:

$$\begin{aligned} F\{f(t)\} = F(j\omega) &= F\left\{ f_1(t) \cdot f_2(t) \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] f_2(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Da bi redoslijed integriranja ostao ispravan, treba, u izrazu u zagradi, promjenljivu ω zamijeniti novom promjenljivom v :

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= F\{f_1(t)\cdot f_2(t)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(jv)e^{jvt}dv f_2(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(jv)e^{jvt}f_2(t)e^{-j\omega t}dvdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(jv)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(t)e^{-j(\omega-v)t}dt\right]dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(jv)F_2[j(\omega-v)]dv = \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega) \end{aligned} \tag{6.132}$$

Konačno:

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}F_1(j\omega)*F_2(j\omega) \tag{6.133}$$

Dakle, Fourierova transformacija proizvoda dvije funkcije (modulacija) jednaka je konvoluciji njihovih Fourierovih transformacija pomnoženoj faktorom $1/(2\pi)$.

6.5 Distorzija signala pri prenosu kroz LTI sistem

Neka je pobudni signal LTI sistema $f(t)$, a odziv $g(t)$. Ako je spektar ulaznog signala $F(j\omega)$, frekventna funkcija sistema $H(j\omega)$, a spektar izlaznog signala $G(j\omega)$, može se napisati:

$$G(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \tag{6.134}$$

Relacija (6.134) jasno pokazuje prirodu promjene ulaznog signala, odnosno ukazuje na modifikaciju ulaznog signala pri prenosu kroz sistem. Relacija (6.134) se može napisati u polarnim koordinatama:

$$|G(j\omega)|e^{j\arg\{G(j\omega)\}} = |F(j\omega)||H(j\omega)|e^{j[\arg\{F(j\omega)\}+\arg\{H(j\omega)\}]} \tag{6.135}$$

odakle je:

$$|G(j\omega)| = |F(j\omega)||H(j\omega)| \tag{6.136}$$

$$\arg\{G(j\omega)\} = \arg\{F(j\omega)\} + \arg\{H(j\omega)\} \tag{6.137}$$

Pri prenosu signala kroz LTI sistem amplitudni spektar pobudnog signala $|F(j\omega)|$ mijenja se u spektar $|F(j\omega)||H(j\omega)|$, gdje je $|H(j\omega)|$ amplitudni spektar impulsnog odziva $h(t)$ sistema.
Slično, fazni spektar pobudnog signala $\arg\{F(j\omega)\}$ mijenja se na način $\arg\{F(j\omega)\} + \arg\{H(j\omega)\}$, gdje je $\arg\{H(j\omega)\}$ fazni spektar impulsnog odziva sistema. Dakle, spektar pobudnog signala mijenja se (množi) s faktorom $|H(j\omega)|$, a faza se pomjera (sabire) za ugao $\arg\{H(j\omega)\}$.

Neke frekventne komponente mogu biti pojačane, dok druge mogu biti prigušene. Faze pojedinih komponenata, takođe se mijenjaju. Uopće, može se reći da će talasni oblik odziva biti drugačiji od talasnog oblika pobudnog signala. U mnogim primjenama ta

razlika je prihvatljiva, dok u nekim, kao što je pojačavanje signala ili prenos signala poruke komunikacionim kanalom, propuštena komponenta signala mora da bude tačna replika ulaznog, pobudnog signala. U takvim slučajevima treba minimizirati distorziju koju unosi pojačavač ili komunikacioni kanal u propusnom opsegu. Karakteristike sistema trebaju biti takve da signal kroz sistem prolazi bez distorzije (engl. *distortionless transmission*).

Prenos signala će biti bez distorzije ako pobudni signal i odziv imaju iste talasne oblike, s odgovarajućom multiplikativnom konstantom. Prenos pri kome je, uz kašnjenje odziva, zadržan talasni oblik pobude, može se smatrati prenosom bez distorzije. Pri prenosu bez distorzije, pobudni signal $f(t)$ i odziv $g(t)$ zadovoljavaju uslove:

$$g(t) = kf\,(t - t_d) \tag{6.138}$$

gdje je t_d kašnjenje odziva za pobudom. Fourierova transformacija relacije (6.138) je:

$$G(j\omega) = kF(j\omega)e^{-j\omega t_d}$$

Kako je:

$$G(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega)$$

to je:

$$H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

Ovo je frekventna funkcija sistema za prenos bez distorzije, iz koje slijedi:

$$|H(j\omega)| = k \tag{6.139}$$

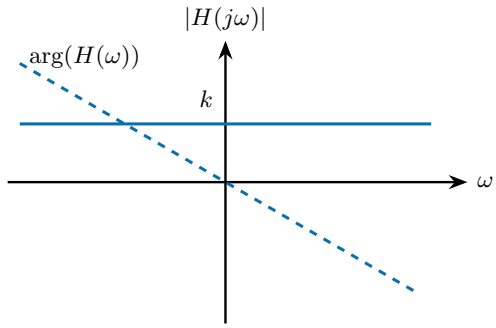
$$\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_d \tag{6.140}$$

Relacije (6.139) i (6.140) pokazuju da amplitudni spektar frekventne funkcije sistema $|H(j\omega)|$ mora biti konstantan a fazni $\arg\{H(j\omega)\}$ linearna funkcija frekvencije ω, s nagibom $-t_d$ (slika 6.21.).

U mnogim praktičnim primjenama neophodno je obezbjediti da projektovani sistem nema faznu distorziju u propusnom opsegu. To bi značilo da frekventni odziv sistema mora biti realan, iz čega slijedi da mora imati nultu faznu karakteristiku. Kako je taj uslov nemoguće ispuniti, dizajnira se frekventna funkcija sistema s linearnom fazom u propusnom opsegu, tj. $\arg\{H(j\omega)\} = -\omega t_d + \beta$ je linearna funkcija kružne učestanosti ω u propusnom opsegu. Sistem sa takvim frekventnim odzivom naziva se *sistem sa generaliziranom linearnom fazom*, gde su t_d i β realne konstante. Konstanta t_d naziva se grupno kašnjenje. Za sistem koji predstavlja idealni niskopropusni filter je $\beta = 0$.

Primjer 6.21:

Koristeći osobine Fourierove transformacije odrediti Fourierovu transformaciju slijedećih signala:
a) $x(-t)$,
b) $tx(t)$,
c) $x(t+1)$,
d) $x(-2t+4)$
e) $(t-1)x(t+1)$,
f) $dx(t)/dt$,
g) $t \cdot dx(t)/dt$



Slika 6.21: Željeni frekventni odziv za prenos signala kroz LTI sistem bez distorzije.

h) $x(2t-1)e^{-j2t}$,
i) $x(t)e^{-j2t}$,
j) $tx(t)e^{-j2t}$
k) $(t-1)x(t-1)e^{-j2t}$,
l) $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ ako je: $X(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega-1}{2}\right) = p\left(\frac{\omega-1}{2}\right)$.

Rješenje:

a) $x(t) \overset{\text{F.T.}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) \implies x(-t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X(-j\omega) = p\left(\frac{-\omega-1}{2}\right)$

b) $F\{tx(t)\} = j\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = j[\delta(\omega) - \delta(\omega-2)]$

c) $F\{x(t+1)\} = X(j\omega)e^{j\omega} = e^{j\omega}p\left(\frac{\omega-1}{2}\right)$

d) $F\{x(-2t+4)\} = F\{x[-2(t-2)]\} = \frac{1}{|-2|}e^{-j2\omega}X\left(j\frac{\omega}{-2}\right)$

$$= \frac{1}{2}e^{-j2\omega}p\left(\frac{\frac{\omega}{-2}-1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-j2\omega}p\left(\frac{\omega+2}{4}\right)$$

e) $F\{(t-1)x(t+1)\} = F\{(t+1)x(t+1) - 2x(t+1)\}$

$$= je^{j\omega}\frac{dX(j\omega)}{d\omega} - 2e^{j\omega}X(j\omega)$$
$$= je^{j\omega}\delta(\omega) - je^{j\omega}\delta(\omega-2) - 2e^{j\omega}p\left(\frac{\omega-1}{2}\right)$$
$$= j\delta(\omega) - je^{j\omega}\delta(\omega-2) - 2e^{j\omega}p\left(\frac{\omega-1}{2}\right)$$

f) $F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega) = j\omega p\left(\frac{\omega-1}{2}\right)$

g) $F\left\{t\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j\frac{d}{d\omega}[j\omega X(j\omega)] = -X(j\omega) - \omega\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = -p\left(\frac{\omega-1}{2}\right) + 2\delta(\omega-2)$

h) $F\{x(2t-1)\} = F\left\{x\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right\} = F\{x(2t)\}e^{-j\frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega}{2}}p\left(\frac{\omega-2}{4}\right)$

$$\Longrightarrow F\left\{x(2t-1)e^{-j2t}\right\} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\omega+2}{2}}p\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

i) $F\left\{x(t)e^{-j2t}\right\} = X(j\omega+2) = p\left(\frac{\omega+1}{2}\right)$

j) $F\left\{tx(t)e^{-j2t}\right\} = j\frac{dF\left\{x(t)e^{-j2t}\right\}}{d\omega} = j\frac{d}{d\omega}p\left(\frac{\omega+1}{2}\right) = j[\delta(\omega+2) - \delta(\omega)]$

k) $F\left[(t-1)x(t-1)e^{-j2t}\right] = F\left\{(t-1)x(t-1)e^{-j2(t-1)}e^{-j2}\right\}$

$$= e^{-j2}e^{-j\omega}j[\delta(\omega+2) - \delta(\omega)]$$

l) $F\left\{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega) = \frac{1}{j\omega}p\left(\frac{\omega-1}{2}\right) + \pi X(0)\delta(\omega)$

6.6 Modulacija signala

Najjednostavniji prenos signala je u osnovnom, prirodnom ili fizičkom opsegu učestanosti. Međutim, savremene metode prenosa signala zahtijevaju prethodnu obradu originalnih signala. Suština ovih metoda je slijedeća: jednom pomoćnom periodičkom signalu (determinističkom) modificiraju se neki od njegovih osnovnih parametara u funkciji karakterističnih veličina nekog drugog, bilo kakvog signala. Ovaj postupak se naziva *modulacija*. Signal, originalni nosilac poruke, naziva se *modulišući* signal, pomoćni periodički signal je *nosilac*, a nosilac modificiran modulišućim signalom, *modulirani* signal. Primljeni modulirani signal nije direktno upotrebljiv pa se iz moduliranog signala treba izvući originalan signal. Postupak obrade moduliranog signala naziva se *demodulacija*, a dobijeni originalni signal *demodulirani* signal.

Postupak modulacije vezan je za *predajnik*, a postupak demodulacije za *prijemnik*. Sklop u kome se obavlja modulacija naziva se *modulator*, a sklop u kome se obavlja demodulacija *demodulator*. Ukoliko se radi o digitalnom prenosu signala modulator i demodulator nazivaju se *modem*.

Modulacijom raznih nosilaca, tako da svaki nezavisni modulišući signal modulira svoj nosilac (nosioci se međusobno razlikuju po nekim karakterističnim parametrima) otvara se mogućnost istovremenog prenosa nezavisnih poruka.

Postoji više postupaka za moduliranje nosioca, a oni se mogu podijeliti prema talasnom obliku moduliranog signala u dvije osnovne grupe. U prvu grupu spadaju postupci u kojima je modulirani signal kontinualan (engl. *continuous-wave CW*), a u drugu oni kod kojih je modulirani signal impulsnog talasnog oblika (engl. *pulse amplitude modulation PAM*).

U prvoj grupi kao nosilac se uglavnom koristi signal čiji je talasni oblik sinusni, pa je rezultat modulacije kontinualni signal. Sinusni signal ima tri karakteristična parametra:

amplitudu, učestanost i fazu. Tako je:

$$f_0(t) = f_{0\,\max} \cos\left[\omega_0 t + \phi\right] \tag{6.141}$$

gdje je $f_{0\ \max}$ maksimalna amplituda, ω_0 učestanost, a ϕ faza. Na svaki od ovih parametara može se uticati tako da se izabrani parametar mijenja direktno proporcionalno modulišućem signalu. Tako, u zavisnosti od zakona koga diktira modulišući signal, mijenja se amplituda, učestanost ili faza nosioca. Rezultat kontinualne modulacije može biti:

- amplitudno modulirani signal - AM,
- frekventno modulirani signal - FM,
- fazno modulirani signal - ΦM.

Kod postupaka modulacije kod kojih je modulirani signal impulsnog talasnog oblika, kao nosilac se obično koristi povorka impulsa. S obzirom na talasni oblik moduliranog signala, koji je diskretni, sve vrste modulacije koje spadaju u ovu grupu zasnivaju se na principu formuliranom teoremom o uzimanju uzoraka. Tako impulsna modulacija može biti:

- amplitudno impulsna modulacija - AIM,
- impulsna modulacija po trajanju impulsa ili širinsko impulsna modulacija - ITM (PWM),
- impulsna položajna modulacija - IPM,
- impulsna kodna modulacija - IKM i dr.

Kontinualnoj i impulsnoj modulaciji može se dodati kombinovani sistem modulacije. Tako, npr. moguće je formirati signal koji je amplitudno impulsno moduliran, pa sa njim frekventno modulirati drugi nosilac (IAM/FM).

6.6.1 Amplitudna modulacija harmonijskim nosiocem

Amplitudne modulacije spadaju u grupu linearnih sistema pa će u nastavku knjige biti detaljnije obrađene. Modulacija se kod linearnih sistema obavlja translacijom spektra modulišućeg signala za vrijednost ω_0. To znači da će se željena poruka prenositi moduliranim signalom u jednom drugom, višem opsegu učestanosti, čiji je položaj diktiran izborom vrijednosti ω_0. Signal dobijen u procesu modulacije ima takav spektar u kome nema nijedna komponenta koja nije nastala translacijom njoj odgovarajuće komponente iz spektra modulišućeg signala. Proces demodulacije takođe je linearan, a sastoji se u translaciji spektra iz domena viših učestanosti u domen nižih učestanosti.

Kao nosilac može se koristiti signal sinusnog talasnog oblika (slika 6.22.) dat izrazom:

$$f_0(t) = f_{0\,\max} \cos \omega_0 t \tag{6.142}$$

gdje je $f_{0\ \max}$ maksimalna amplituda nosioca, a $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0$ njegova kružna učestanost. Signal koji predstavlja poruku opisan je funkcijom $f_m(t)$, a naziva se modulišući signal. Neka realni modulišući signal $f_m(t)$ ima slijedeće osobine:

- srednja vrijednost (istosmjerna komponenta) signala $f_m(t)$ jednaka je nuli;
- signal $f_m(t)$ ima spektar ograničen učestanošću ω_M, te se naziva spektralno ograničen signal, i za njega vrijedi:

$$f_m(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_m(j\omega), \quad (F_m(j\omega) = 0 \quad \text{za} \quad |\omega| > \omega_M) \tag{6.143}$$

Kako je pretpostavljen realni modulišući signal, njegov amplitudni spektar je parna funkcija kružne učestanosti ω, dok je fazni spektar neparna funkcija kružne učestanosti ω. Amplitudna modulacija zasniva se na principu modifikacije amplitude nosioca, tako da ona u procesu modulacije postaje direktno srazmjerna modulišućem signalu. Prema tome, izraz za amplitudno modulirani signal (AM) je:

$$f(t) = [A + kf_m(t)] \cos \omega_0 t \tag{6.144}$$

gdje A i k predstavljaju konstante, a $f_m(t)$ je modulišući signal. Za $A = 0$ modulirani signal je $f(t) = kf_m(t) \cos \omega_0 t$, za koga je:

$$f(t) = kf_m(t) \cos \omega_0 t = \begin{cases} kf_m(t), \text{ kada je } \cos \omega_0 t = 1 \\ -kf_m(t), \text{ kada je } \cos \omega_0 t = -1 \end{cases}$$

Funkcija $kf_m(t) \cos \omega_0 t$ dodiruje funkciju $kf_m(t)$ kada funkcija $\cos \omega_0 t$ ima maksimalnu vrijednost, a funkciju $-kf_m(t)$ kada $\cos \omega_0 t$ ima minimalnu vrijednost. To znači da su funkcije $kf_m(t)$ i $-kf_m(t)$ anvelope ili obvojnice signala $kf_m(t) \cos \omega_0 t$ (slika 6.22.). Na taj način poruka, koja predstavlja modulišući signal $f_m(t)$, postaje "utisnuta" u signal nosilac $f_0(t)$ u vidu njegove promjenljive amplitude. Spektri nosioca, modulišućeg i moduliranog signala su Fourierove transformacije signala $f_0(t), f_m(t)$ i $f(t)$:

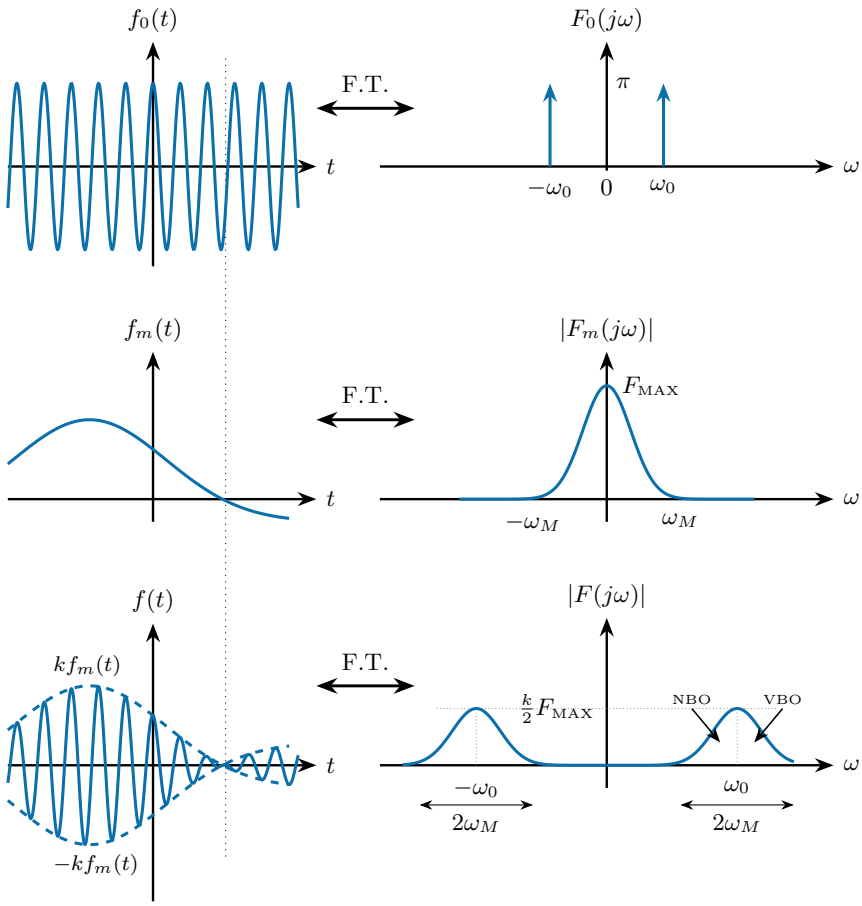
$$F\{f_m(t)\} = F_m(j\omega) \quad \text{i} \quad F\{f(t)\} = F(j\omega)$$

pa slijedi:

$$F(j\omega) = F\{kf_m(t) \cos \omega_0 t\} = F\left\{kf_m(t) \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} =$$
$$= \frac{k}{2} F_m[j(\omega - \omega_0)] + \frac{k}{2} F_m[j(\omega + \omega_0)]$$

Na osnovu izraza (6.145) zaključuje se da je množenje signala $kf_m(t)$ signalom $\cos \omega_0 t$ u vremenskom domenu, rezultiralo dvjema translacijama spektra $F_m(j\omega)$ u frekventnom domenu (za $\pm\omega_0$). Pri tome je spektralna gustina amplituda $F_m(j\omega)$ pomnožena faktorom $k/2$. Dobijeni spektar $F_m(j\omega)$ je također ograničen. Ovdje su uzete u obzir i negativne učestanosti. Stvarni spektar signala $f_m(t)$ je u opsegu učestanosti $0 \div \omega_M$. Dakle, množenje signala $kf_m(t)$ i $\cos \omega_0 t$ rezultiralo je, ne samo translacijom spektra za veličinu ω_0, nego i pojavom njemu simetričnog spektra na frekvenciji $\omega = -\omega_0$, odnosno spektar se dva puta proširio.

Dio spektra koji se nalazi u opsegu učestanosti $\omega_0 \div (\omega_0 + \omega_M)$ naziva se *viši bočni opseg (VBO)*, a njemu simetričan dio spektra, koji se nalazi u opsegu učestanosti $(\omega_0 - \omega_M) \div \omega_0$, naziva se *niži bočni opseg (NBO)*. Oblik i jednog i drugog bočnog opsega, uz faktor $k/2$, ostao je isti kao i oblik spektra modulišućeg signala (slika 6.22).



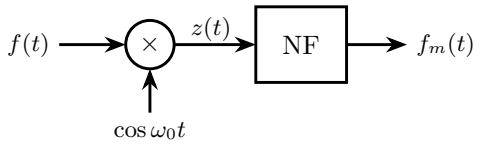
Slika 6.22: Nosilac, modulišući i modulirani signal i njihove Fourierove transformacije.

Ovim je iskazana činjenica da modulirani signal u sebi vjerno nosi prenošenu poruku. Translacijom spektra modulišućeg signala, za vrijednost ω_0, željena poruka će moći da se prenosi moduliranim signalom u jednom drugom, višem opsegu učestanosti, čiji je položaj diktiran izborom vrijednosti ω_0.

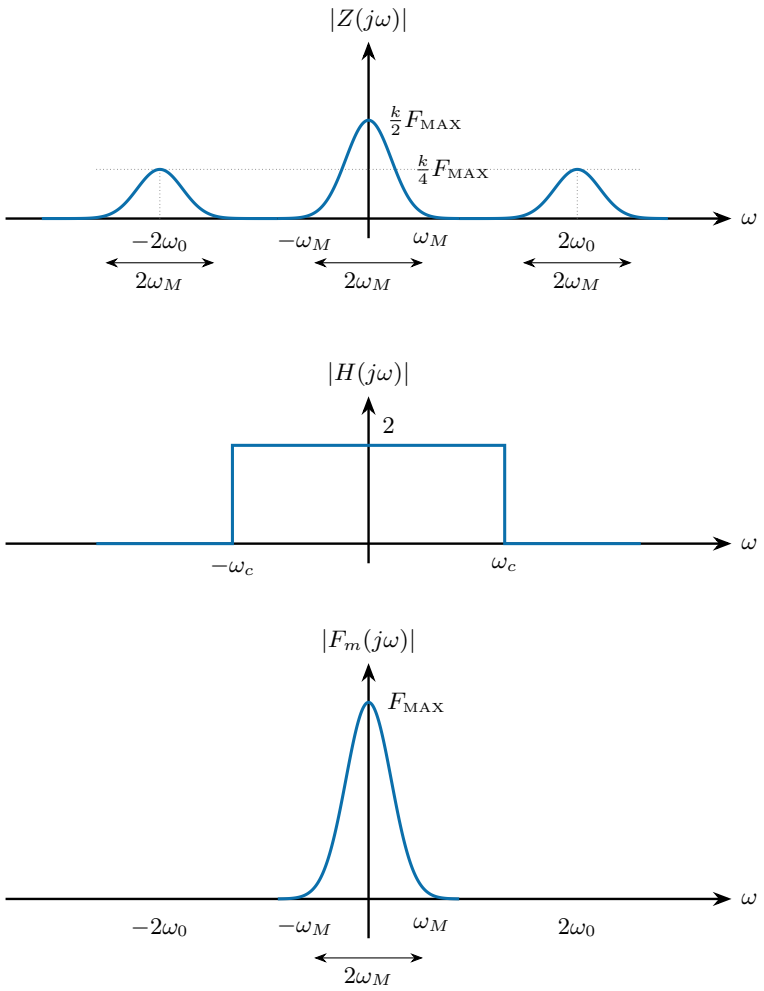
6.6.2 Demodulacija

Demodulacija je postupak dobivanja originalnog (modulišućeg) signala iz moduliranog, a dobijeni originalni signal naziva se demodulirani signal. U procesu demodulacije spektar modulišućeg signala se vraća na početnu nisku frekvenciju. Sinhroni demodulator sadrži množač signala (slika 6.23.a), čiji su ulazi modulirani signal $f(t) = kf_m(t)cos(\omega_0 t)$ i signal $\cos\omega_0 t$. Izlaz iz množača je:

$$z(t) = f(t)\cos\omega_0 t \tag{6.145}$$



a)



b)

Slika 6.23: a) Množač signala, b) spektar signala $z(t)$, c) NF filter, d) spektar rezultujećeg (originalnog) signala.

a njegova Fourierova transformacija (slika 6.23.b) je:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{2}F\left[j\left(\omega-\omega_0\right)\right] + \frac{1}{2}F\left[j\left(\omega+\omega_0\right)\right] = \\ = \frac{k}{2}F_m(j\omega) + \frac{k}{4}F_m\left[j\left(\omega-2\omega_0\right)\right] + \frac{k}{4}F_m\left[j\left(\omega+2\omega_0\right)\right] \tag{6.146}$$

Da bi se dobio originalni signal $f_m(t)$ iz signala $z(t)$, signal $z(t)$ treba propustiti kroz sistem sa frekventnom funkcijom $H(j\omega)$ prikazanom na slici 6.23.c. Takav sistem predstavlja niskopropusni filter (NF), za koga je $H(j\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_c$, gdje je ω_c granična frekvencija filtra. Ako je amplitudni spektar filtra takav da je $|H(j\omega)| = 2$ za $|\omega| < \omega_c$, onda neće biti gubitaka pri prenosu signala. Rezultat je prikazan na slici 6.23.d, na kojoj se vidi da je spektar originalnog signala zadržao početnu amplitudu.

6.6.3 Frekventno multipleksiranje

Često korištena tehnika za istovremeni prenos više signala istim kanalom je frekventno multipleksiranje, što podrazumijeva dodjelu odgovarajućeg frekventnog opsega svakom od signala (engl. *Frequency-division multipleksing FDM*). Multipleksiranje je veoma slično amplitudnoj modulaciji.

Npr. za tri realna modulišuća signala $f_{mi}(t)$ $(i \in \{1,2,3\})$ sa spektrima ograničenim učestanostima ω_{Mi}, i prikazanim na slici 6.24.a vrijedi:

$$f_{mi}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_{mi}(j\omega), \quad F_{mi}(j\omega) = 0 \quad \text{za} \quad |\omega| > \omega_{Mi} \tag{6.147}$$

Neka je svaki od signala $f_{mi}(t)$ moduliran svojim nosiocem $\cos\omega_i t$, tako da je modulirani signal:

$$f(t) = f_{m1}(t)\cos\omega_1 t + f_{m2}(t)\cos\omega_2 t + f_{m3}(t)\cos\omega_3 t$$

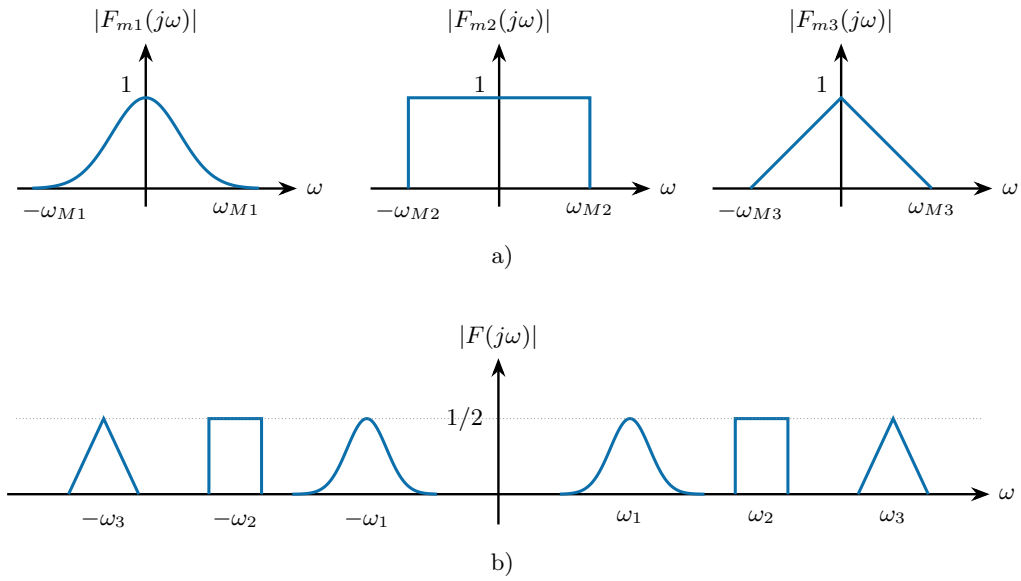
Spektar moduliranog signala je:

$$F(j\omega) = \frac{1}{2}\left\{F_{m1}\left[j\left(\omega-\omega_1\right)\right] + F_{m1}\left[j\left(\omega+\omega_1\right)\right]\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{F_{m2}\left[j\left(\omega-\omega_2\right)\right] + F_{m2}\left[j\left(\omega+\omega_2\right)\right]\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{F_{m3}\left[j\left(\omega-\omega_3\right)\right] + F_{m3}\left[j\left(\omega+\omega_3\right)\right]\right\}$$

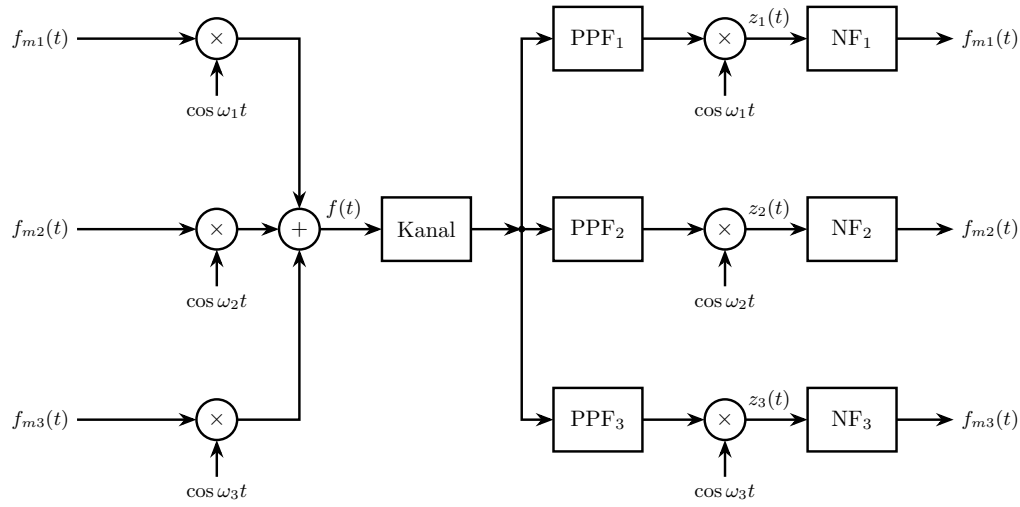
i prikazan je na slici 6.24.b. U procesu multipleksiranja veoma je bitno obezbjediti da ne dođe do preklapanja spektara, tako da mora biti zadovoljen uslov:

$$\omega_1 + \omega_{M1} < \omega_2 - \omega_{M2} \quad \text{i} \quad \omega_2 + \omega_{M2} < \omega_3 - \omega_{M3}$$

Kompletan sistem modulacije, multipleksiranja, prenosa, demultipleksiranja i demodulacije ilustriran je na slici 6.25.



Slika 6.24: a) Amplitudni spektri signala $f_{\mathrm{m}i}(t)$ FDM sistema, b) amplitudni spektar signala $f(t)$.



Slika 6.25: Sistem za frekventno multipleksiranje (FDM) - (PPF-pojasnopropusni filter, NF- niskopropusni filter).

6.7 Hilbertova transformacija

Hilbertova transformacija neke vremenske funkcije $f(t)$, za razliku od Fourierove transformacije, je vremenska funkcija i definira se na slijedeći način:

$$\hat{f}(t) = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{|t-\tau|\geq\delta}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau = \frac{1}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{t-\tau>\delta}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau + \int_{t-\tau<-\delta}\frac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau\right] \quad (6.148)$$

gdje je pod integralom izraza (6.148) τ promjenljiva, a t je fiksna veličina (konstanta). Hilbertova transformacija zapravo predstavlja konvoluciju vremenske funkcije $f(t)$ i funkcije $1/\pi t$, a obilježava se na slijedeći način:

$$H\{f(t)\} = \hat{f}(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} \quad (6.149)$$

Na osnovu izraza (6.149) može se odrediti Fourierova transformacija Hilbertove transformacije:

$$F\{\hat{f}(t)\} = \hat{F}(j\omega) = F(j\omega)\cdot F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} \quad (6.150)$$

gdje je $F(j\omega)$ Fourierova transformacija funkcije $f(t)$.
Fourierova transformacija funkcije $1/\pi t$ može se odrediti primjenom teoreme o simetriji (6.59) na funkciju $\operatorname{sgn}(t)$:

$$\operatorname{sgn}(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2}{j\omega} \implies 2\pi\operatorname{sgn}(-\omega) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2}{jt}$$

Kako je $\operatorname{sgn}\omega$ neparna funkcija promjenljive ω, to je $\operatorname{sgn}(-\omega) = -\operatorname{sgn}(\omega)$, odnosno:

$$\frac{1}{\pi t} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} -j\operatorname{sgn}(\omega) \quad (6.151)$$

Ova relacija (6.151) mogla se dobiti i primjenom relacije (6.8) za direktnu Fourierovu transformaciju:

$$F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi t}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi t}(\cos\omega t - j\sin\omega t)dt =$$
$$= -j\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi t}\sin\omega t dt = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ +j, & \omega < 0 \end{cases} = -j\operatorname{sgn}(\omega)$$

Na osnovu relacija (6.150) i (6.151) Fourierova transformacija Hilbertove transformacije funkcije $f(t)$ dobija se:

$$F\{H\{f(t)\}\} = F\{\hat{f}(t)\} = \hat{F}(j\omega) = -j\operatorname{sgn}(\omega)\cdot F(j\omega) \quad (6.152)$$

Ako se realni i imaginarni spektar funkcije $\hat{F}(j\omega)$ obilježe sa $\hat{R}(\omega)$ i $\hat{I}(\omega)$, odnosno:

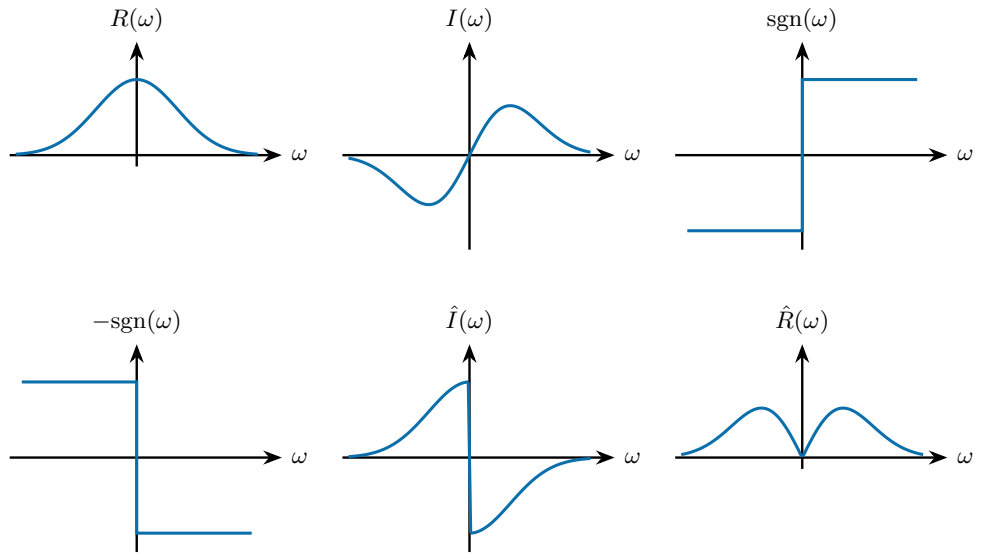
$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}(\omega) + j\hat{I}(\omega) \quad (6.153)$$

razdvajanjem realnog i imaginarnog dijela relacije (6.152) dobija se:

$$\hat{R}(\omega) = I(\omega)\cdot\operatorname{sgn}(\omega) \quad (6.154)$$

$$\hat{I}(\omega) = -R(\omega)\cdot\operatorname{sgn}(\omega) \quad (6.155)$$

Npr. ako su realni $R(\omega)$ i imaginarni $I(\omega)$ spektar funkcije $f(t)$ dati grafički, onda se iz njih mogu dobiti $\hat{R}(\omega)$ i $\hat{I}(\omega)$ (slika 6.26.). Vidi se da je za realne signale $f(t)$ spektar $\hat{I}(\omega)$ neparna funkcija promjenljive ω, a $\hat{R}(\omega)$ parna funkcija promjenljive ω.



Slika 6.26: Realni i imaginarni dio Fourierove transformacije i realni i imaginarni dio Fourierove transformacije Hilbertove transformacije funkcije $f(t)$.

6.7.1 Hilbertova transformacija harmonijskih funkcija

Hilbertova transformacija funkcije $\cos\omega_0 t$ određuje se polazeći od Fourierove transformacije te funkcije:

$$\cos\omega_0 t \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)=R(\omega) \tag{6.156}$$

Na osnovu relacija (6.154) i (6.156), za realni i imaginarni dio Fourierove transformacije Hilbertove transformacije funkcije $\cos\omega_0 t$ dobije se:

$$\hat{R}(\omega)=0, \quad \hat{I}(\omega)=\begin{cases} -R(\omega), & \omega>0 \\ +R(\omega), & \omega<0 \end{cases} \quad (\omega_0>0) \tag{6.157}$$

$R(\omega)$ iz relacije (6.156) treba pomnožiti sa $-\mathrm{sgn}(\omega)$ prema relaciji (6.155), da bi se dobio imaginarni dio Fourierove transformacije Hilbertove transformacije.

Na slici 6.27. prikazana je Fourierova transformacija funkcije $\cos\omega_0 t$, kao i imaginarni dio Fourierove transformacije Hilbertove transformacije te iste funkcije, dok je realni dio jednak nuli. Fourierova transformacija Hilbertove transformacije funkcije $\cos\omega_0 t$ je:

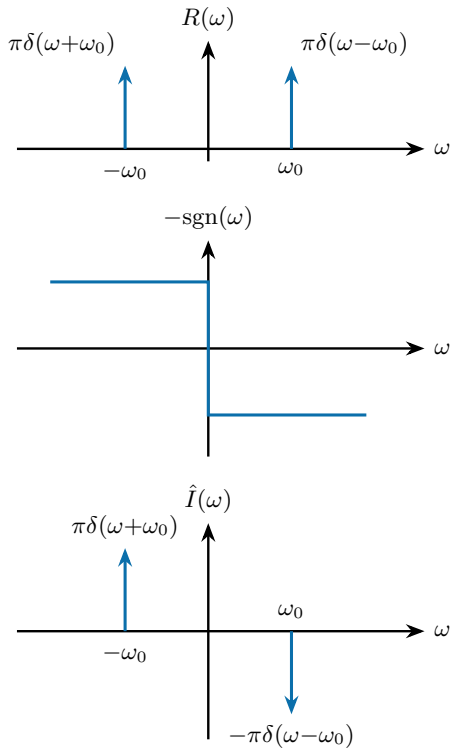
$$\hat{F}(j\omega)=j\hat{I}(\omega)=-j\pi\delta(\omega-\omega_0)+j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

ili drugačije zapisano:

$$\hat{F}(j\omega)=\frac{\pi\delta(\omega-\omega_0)-\pi\delta(\omega+\omega_0)}{j} \tag{6.158}$$

Kako je Fourierova transformacija funkcije $\sin\omega_0 t$, prema relaciji (6.86), dobiva se:

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}\cdot 1-\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}\cdot 1 \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{j}\delta(\omega+\omega_0) \tag{6.159}$$



Slika 6.27: Dobivanje Fourierove transformacije Hilbertove transformacije funkcije $\cos\omega_0 t$.

Na osnovu relacija (6.158) i (6.159) Fourierova transformacija Hilbertove transformacije funkcije $\cos\omega_0 t$ je Fourierova transformacija funkcije $\sin\omega_0 t$:

$$F\left\{H\left\{\cos\omega_0 t\right\}\right\} = F\left\{\sin\omega_0 t\right\} \tag{6.160}$$

odnosno, Hilbertova transformacija vremenske funkcije $\cos\omega_0 t$ je ponovo vremenska funkcija $\sin\omega_0 t$.

$$H\left\{\cos\omega_0 t\right\} = \sin\omega_0 t \tag{6.161}$$

Slično se izvodi Hilbertova transformacija funkcije $\sin\omega_0 t$:

$$\sin\omega_0 t \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} j \implies I(\omega) \quad I(\omega) = -\left[\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right) - \pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right] \tag{6.162}$$

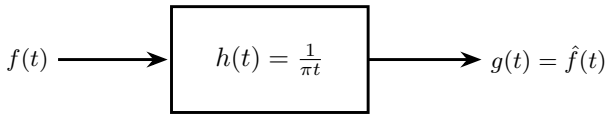
$$\hat{I}(\omega) = 0, \quad \hat{R}(\omega) = \begin{cases} +I(\omega), & \omega > 0 \\ -I(\omega), & \omega < 0 \end{cases}, \quad \omega_0 > 0$$

$$\hat{R}(\omega) = I(\omega)\,\mathrm{sgn}\,\omega = -\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right) - \pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)$$

odakle slijedi:

$$\hat{F}(j\omega) = \hat{R}(\omega) = -\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right) - \pi\delta\left(\omega+\omega_0\right) = F\left\{-\cos\omega_0 t\right\} \tag{6.163}$$

$$F\left\{-\cos\omega_0 t\right\} = F\left\{H\left\{\sin\omega_0 t\right\}\right\}$$



Slika 6.28: Hilbertov filter (kvadrantni/kvadraturni transformator).

pa se zaključuje sljedeće:

$$H\{\sin\omega_0 t\} = -\cos\omega_0 t \tag{6.164}$$

Koristeći rezultate data relacijama (6.161) i (6.164), može se odrediti Hilbertova transformacija eksponencijalne funkcije:

$$\begin{aligned} H\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} &= H\{\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t\} = \sin\omega_0 t - j\cos\omega_0 t = -je^{j\omega_0 t} \\ H\left\{e^{j\omega_0 t}\right\} &= -je^{j\omega_0 t} \end{aligned} \tag{6.165}$$

U vezi s Hilbertovom transformacijom izvodi se i definira sistem nazvan Hilbertov filter (slika 6.28). Naime, ako je impulsni odziv linearnog i vremenski invarijantnog sistema $h(t) = 1/\pi t$, tada je odziv sistema Hilbertova transformacija pobudnog signala $\hat{f}(t)$:

$$f(t) * h(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{f}(t) = g(t) \tag{6.166}$$

Frekventna funkcija sistema je Fourierova transformacija impulsnog odziva, a na osnovu relacije (6.151) je:

$$H(j\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega) \tag{6.167}$$

odnosno, iz (6.166) Fourierova transformacija odziva $g(t)$ je:

$$G(j\omega) = -j\,\mathrm{sgn}(\omega)\cdot F(j\omega) \tag{6.168}$$

Ako je pobudni signal $f(t) = \cos\omega_0 t$, odziv je:

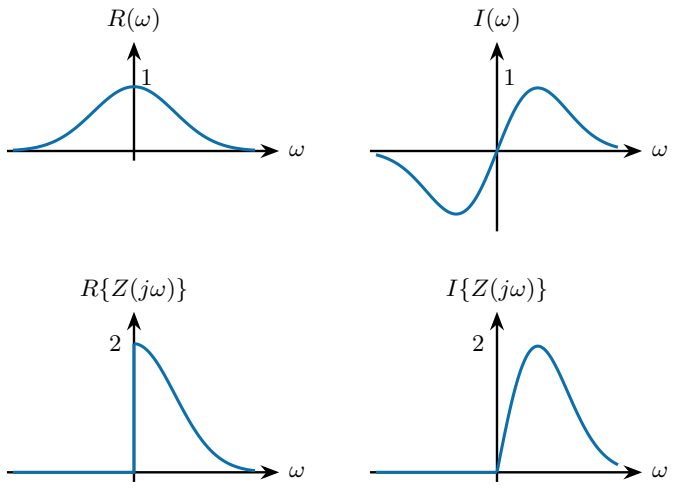
$$g(t) = H\{\cos\omega_0 t\} = \sin\omega_0 t = \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{6.169}$$

Ovaj sistem, znači, mijenja fazu harmonijskog signala za $\pi/2$. Kako impulsni odziv $h(t) = 1/\pi t$ nije kauzalna funkcija, to ni Hilbertov filter nije kauzalan sistem, odnosno nije fizički ostvariv. Međutim, aproksimacija Hilbertovog filtera sa elementom kašnjenja i uz ograničavanje amplitude uvođenje kauzalnosti signala je kauzalna i dosta dobro aproksimira originalni nekauzalni Hilbertov filter.

6.7.2 Analitička funkcija

Analitička funkcija neke funkcije $f(t)$ je uvijek kompleksna funkcija i definira se kao:

$$z(t) = f(t) + j\hat{f}(t) \tag{6.170}$$



Slika 6.29: Realni i imaginarni dio spektra analitičke funkcije.

Fourierova transformacija analitičke funkcije je:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= F(j\omega) + j\hat{F}(j\omega) \\ &= F(j\omega) + j(-j\,\mathrm{sgn}(\omega))F(j\omega) \\ &= F(j\omega) + \mathrm{sgn}(\omega)F(j\omega) \\ &= (1 + \mathrm{sgn}(\omega))F(j\omega) \\ &= 2F(j\omega)U(\omega) \end{aligned} \tag{6.171}$$

jer je: $1 + \mathrm{sgn}(\omega) = 2U(\omega)$. Iz relacije (6.171) vidi se da je Fourierova transformacija analitičke funkcije jednaka dvostrukoj vrijednosti Fourierove transformacije funkcije $f(t)$ pomnoženoj sa $U(\omega)$. Fourierova transformacija analitičke funkcije ima realni i imaginarni dio (slika 6.29.), pri čemu su oba dijela "kauzalne" funkcije u frekventnom domenu:

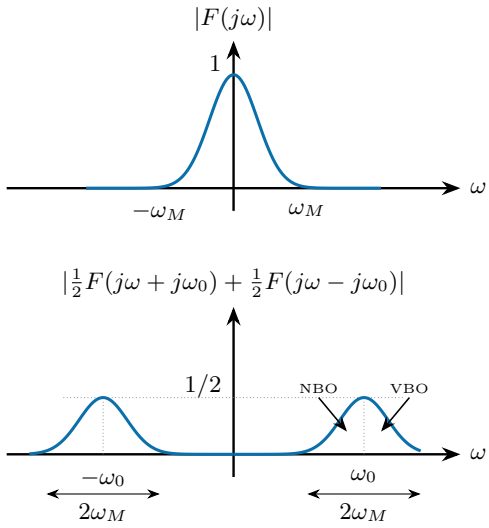
$$Z(j\omega) = 2U(\omega)R(\omega) + j2U(\omega)I(\omega) = R\{Z(j\omega)\} + jI\{Z(j\omega)\} \tag{6.172}$$

Ovdje je bitno da se koncept kauzalnosti shvati kao egzistencija spektra na nenegativnom dijelu frekventne ose, a ne kao "fizička ostvarivost". Naime, poznato je da mnogi realni, fizički ostvarivi signali imaju spektralni sadržaj i na negativnoj frekventnoj osi ($\omega < 0$). Pomoću Hilbertove transformacije i analitičke funkcije definira se modulacija s jednim bočnim opsegom (SSB).

6.7.3 Modulacija s jednim bočnim opsegom (SSB)

Modulacija definirana množenjem funkcije $f(t)$ harmonijskom funkcijom $e^{j\omega_0 t}$, ima Fourierovu transformaciju:

$$F\left\{f(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\right\} = F\left(j\omega - j\omega_0\right) \tag{6.173}$$



Slika 6.30: Modulacija signala $f(t)$ sa dva bočna opsega (AM-2BO).

Ako se $f(t)$ pomnoži funkcijom $\cos\omega_0 t$, onda je Fourierova transformacija toga proizvoda:

$$F\left\{f(t)\cdot\cos\omega_0 t\right\} = \frac{1}{2}F\left(j\omega - j\omega_0\right) + \frac{1}{2}F\left(j\omega + j\omega_0\right) \tag{6.174}$$

Dakle, množenje funkcije $f(t)$ funkcijom $\cos\omega_0 t$, u vremenskom domenu, rezultiralo je dvjema translacijama spektra u frekventnom domenu: za $+\omega_0$ i $-\omega_0$, pri čemu je opseg učestanosti rezultirajućih spektara jednak dvostrukoj vrijednosti maksimalne učestanosti u spektru ($2\omega_M$). Pošto modulirani signal ima dva bočna opsega, ovaj tip amplitudne-modulacije signala naziva se *amplitudna modulacija sa dva bočna opsega (AM-2BO)*.

Sa slike 6.30. je jasno da i viši (VBO) i niži bočni opseg (NBO) imaju oblik spektra modulišućeg signala. Odatle ideja da je za prenos poruke dovoljno prenositi samo jedan od bočnih opsega. Takav AM signal naziva se *AM signal s jednim bočnim opsegom (AM-1BO)*. Modulacija s jednim bočnim opsegom naziva se SSB (engl. *Single Side Band*) modulacija.

Kod množenja neke funkcije funkcijom $e^{j\omega_0 t}$, njen spektar se translira za ω_0 udesno. Za dobijanje modulacije s jednim bočnim opsegom definira se funkcija $f_{\text{SSB}}(t)$, koja ima analitičku funkciju:

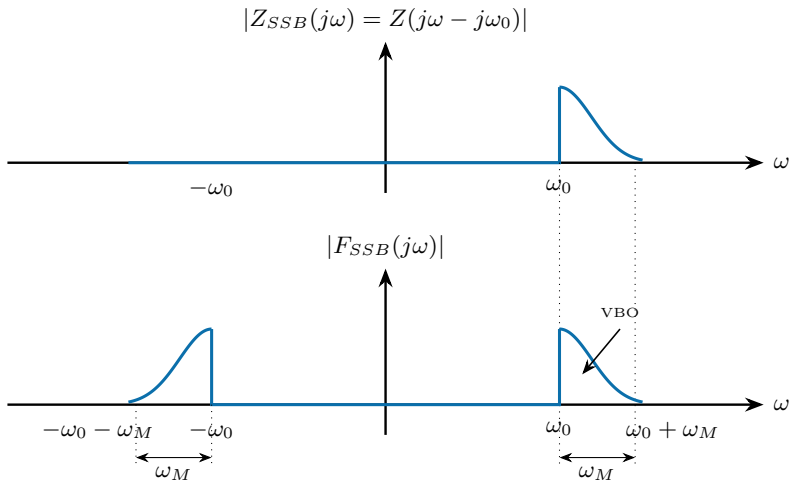
$$z_{SSB}(t) = f_{SSB}(t) + j\hat{f}_{SSB}(t) \tag{6.175}$$

Kako se želi modulacija s jednim bočnim opsegom, analitička funkcija treba da ima oblik:

$$z_{SSB}(t) = z(t)\cdot e^{j\omega_0 t} \tag{6.176}$$

Fourierova transformacija funkcije $z_{SSB}(t)$ je:

$$Z_{SSB}(j\omega) = Z\left(j\omega - j\omega_0\right) \tag{6.177}$$



Slika 6.31: a) Amplitudni spektar analitičke funkcije modulirane kompleksnom eksponencijalnom funkcijom, b) spektar signala $f(t)$ moduliranog jednim bočnim opsegom (AM-1BO).

Ako se izraz (6.175) izjednači sa izrazom (6.176), dobija se:

$$f_{SSB}(t) + j\hat{f}_{SSB}(t) = (f(t) + j\hat{f}(t))\,(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t) \tag{6.178}$$

Zbog prirode signala, dovoljno je uporediti samo realni dio relacije (6.178):

$$f_{SSB}(t) = f(t)\cos\omega_0 t - \hat{f}(t)\sin\omega_0 t \tag{6.179}$$

Ovako moduliran signal ima spektar $F_{SSB}(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
F_{SSB}(j\omega) =& F\left\{f(t)\cdot\cos\omega_0 t\right\} - F\left\{\hat{f}(t)\cdot\sin\omega_0 t\right\} \\
=& F\left\{f(t)\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} - F\left\{\hat{f}(t)\cdot\frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} \\
=& \frac{1}{2}F\left(j\omega - j\omega_0\right) + \frac{1}{2}F\left(j\omega + j\omega_0\right) - \frac{1}{2j}\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(\omega-\omega_0\right)F\left(j\omega - j\omega_0\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{2j}\left[-j\,\mathrm{sgn}\left(\omega+\omega_0\right)F\left(j\omega + j\omega_0\right)\right] \\
=& \frac{1}{2}F\left(j\omega - j\omega_0\right)\left[1+\mathrm{sgn}\left(\omega-\omega_0\right)\right] + \frac{1}{2}F\left(j\omega + j\omega_0\right)\left[1-\mathrm{sgn}\left(\omega+\omega_0\right)\right]
\end{aligned}$$

Kako je:

$$\mathrm{sgn}\left(\omega-\omega_0\right) = \begin{cases} 1, & \omega > \omega_0 \\ 0, & \omega = \omega_0 \\ -1, & \omega < \omega_0 \end{cases} \quad \text{i} \quad \mathrm{sgn}\left(\omega+\omega_0\right) = \begin{cases} 1, & \omega > -\omega_0 \\ 0, & \omega = -\omega_0 \\ -1, & \omega < -\omega_0 \end{cases}$$

to je:

$$F_{SSB}(j\omega) = \begin{cases} F\left(j\omega - j\omega_0\right), & \omega > \omega_0 \\ 0, & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ F\left(j\omega + j\omega_0\right), & \omega < -\omega_0 \end{cases} \tag{6.180}$$

Na slici 6.31.a prikazan je amplitudni spektar analitičke funkcije $z(t)$ modulirane kompleksnom eksponencijalnom funkcijom oblika $e^{j\omega_0 t}$, na osnovu relacije (6.177), a na slici 6.31.b prikazan je spektar $|F_{SSB}(j\omega)|$ dobijen na osnovu relacije (6.180). Na osnovu te relacije zaključuje se da je spektar sastavljen iz dva dijela. Desni dio je nastao pomakom desne strane spektra $F(j\omega)$ (desni ili viši bočni opseg) za ω_0 udesno, a lijevi je nastao pomakom lijeve strane spektra $F(j\omega)$ za ω_0 ulijevo (lijevi ili niži bočni opseg).

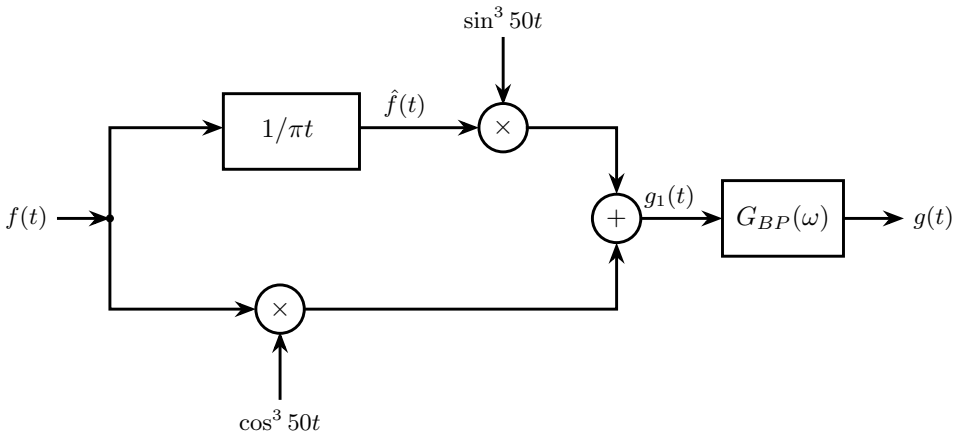
Prednost SSB modulacije je što modulirani signal ne zauzima pojas dvostruke maksimalne učestanosti primarnog signala. Nedostatak je što zahtijeva komplikovanije uređaje za modulaciju i demodulaciju.

Primjer 6.22:

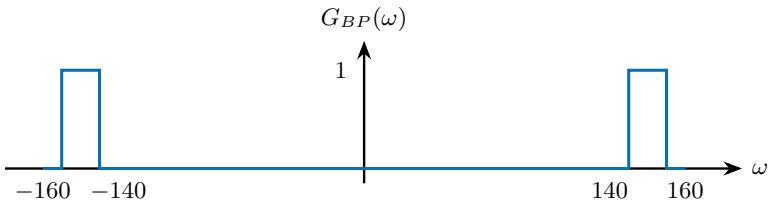
Signal $f(t) = Sa^2(\pi t) + Sa(2\pi t)$ ulazi u LTI sistem prikazan blok dijagramom na slici 6.32. $G_{BP}(\omega)$ je idealni pojasno propusni filter (engl. *Bandpass filter BP*) čija je frekventna karakteristika prikazana na slici 6.33. Odrediti energiju ulaznog E_{ul} i izlaznog E_{izl} signala. Koju funkciju obavlja ovaj sistem?

Rješenje:
Fourierova transformacija ulaznog signala (slika 6.34.) je:

$$f(t) = Sa^2(\pi t) + Sa(2\pi t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} q\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) + \frac{1}{2}p\left(\frac{\omega}{4\pi}\right) = F(j\omega)$$



Slika 6.32: LTI sistem (primjer 6.22).



Slika 6.33: Frekventna karakteristika pojasno propusnog filtera (primjer 6.22).

Na osnovu relacije (6.129) energija ulaznog signala je:

$$E_{ul} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

Zbog parnosti Fourierove transformacije ulaznog signala energija je:

$$E_{ul} = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\omega}{2\pi}+\frac{3}{2}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\omega^2}{4\pi^2}-\frac{3\omega}{2\pi}+\frac{9}{4}\right)d\omega$$

$$E_{ul} = \left(\frac{\omega^3}{12\pi^2}-\frac{3\omega^2}{4\pi}+\frac{9\omega}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{13}{6}$$

Na osnovu blok dijagrama prikazanog na slici 6.32. je:

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \hat{f}(t)\sin^3 50t + f(t)\cos^3 50t \\ &= \frac{\hat{f}(t)}{4}(3\sin 50t - \sin 150t) + \frac{f(t)}{4}(3\cos 50t + \cos 150t) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{f(t)}{2}\cos 150t - \frac{\hat{f}(t)}{2}\sin 150t\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{f(t)}{2}\cos 50t + \frac{\hat{f}(t)}{2}\sin 50t\right) \\ &= \frac{1}{2}f_1(t) + \frac{3}{2}f_2(t) \end{aligned}$$

Fourierova transformacija signala:

$$f_1(t) = \frac{f(t)}{2}\cos 150t - \frac{\hat{f}(t)}{2}\sin 150t$$

je:

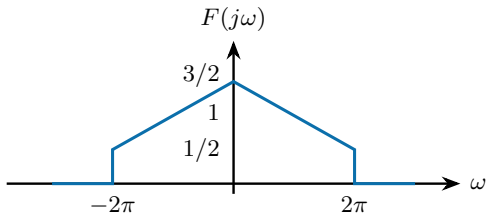
$$F_1(j\omega) = \frac{1}{4\pi}F(j\omega) * F\{\cos 150t\} - \frac{1}{4\pi}\hat{F}(j\omega) * F\{\sin 150t\}$$

Kako je:

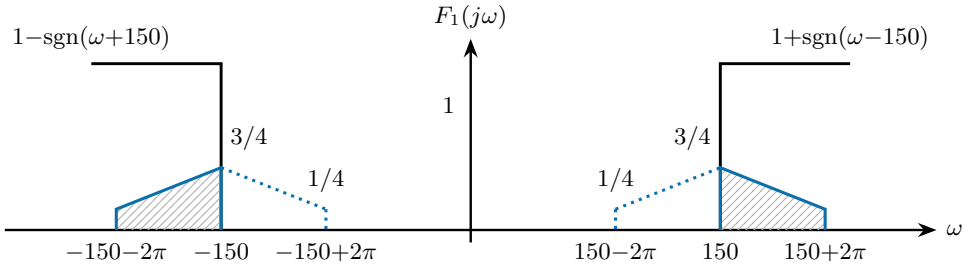
$$\hat{F}(j\omega) = -j\,\mathrm{sgn}\,\omega \cdot F(j\omega)$$

to je:

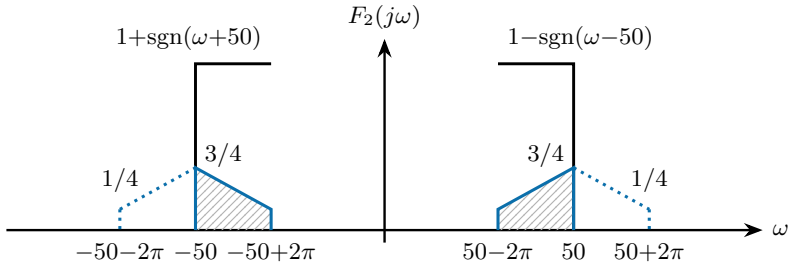
$$F_1(j\omega) = \frac{1}{4}[1-\mathrm{sgn}(\omega+150)]\cdot F(j(\omega+150)) + \frac{1}{4}[1+\mathrm{sgn}(\omega-150)]\cdot F(j(\omega-150))$$



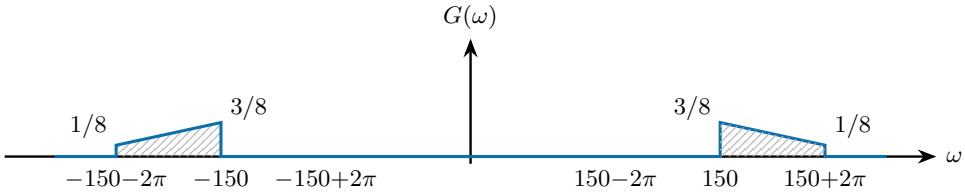
Slika 6.34: Fourierova transformacija ulaznog signala (primjer 6.22).



Slika 6.35: Fourierova transformacija signala $f_1(t)$ (primjer 6.22).



Slika 6.36: Fourierova transformacija signala $f_2(t)$ (primjer 6.22).



Slika 6.37: Izlazni spektar (primjer 6.22).

Fourierova transformacija signala $f_1(t)$ prikazana je na slici 6.35.

Analogno se traži Fourierova transformacija signala $f_2(t)$ (slika 6.36) opisanog sa:

$$f_2(t) = \frac{f(t)}{2}\cos 50t + \frac{\hat{f}(t)}{2}\sin 50t$$

pa se dobiva:

$$F_2(j\omega) = \frac{1}{4\pi}F(j\omega) * F\{\cos 50t\} + \frac{1}{4\pi}\hat{F}(j\omega) * F\{\sin 50t\}$$
$$F_2(j\omega) = \frac{1}{4}[1+\mathrm{sgn}(\omega+50)]\cdot F(j(\omega+50)) + \frac{1}{4}[1-\mathrm{sgn}(\omega-50)]\cdot F(j(\omega-50))$$

Pojasno propusni filter $G_{BP}(\omega)$ će, zbog svoje frekventne karakteristike, propustiti samo dio spektra $G_1(j\omega) = (1/2)F_1(j\omega) + (3/2)F_2(j\omega)$ koji se odnosi na $F_1(j\omega)$, pa će spektar izlaznog signala (slika 6.37) biti $G(j\omega) = (1/2)F_1(j\omega)$.

Spektar izlaznog signala po obliku je jednak spektru ulaznog signala, ali je $A_{izl} = A_{ul}/4 = 3/8$, pa je energija izlaznog signala: $E_{izl} = E_{ul}/16 = 13/96$.

Primjer 6.23:

Odrediti frekventni spektar i maksimalni dozvoljeni period uzorkovanja izlaznog signala dobijenog kao odziv LTI sistema prikazanog na slici 6.38.

Rješenje:
Sistem na slici 6.38. prvo realizira množenje dva signala, zatim rezultujući signal $f(t)$ prolazi kroz Hilbertov filter $H_1(j\omega)$ i ulazi u podsistem s impulsnim odzivom $h_2(t) = Sa(t/2)$. Na kraju se vrši uzorkovanje izlaznog signala. Ulazni i izlazni signali iz pojedinih blokova označeni su kao na slici 6.39.
Signal na izlazu iz množača je:

$$f(t) = \frac{1-\cos(2t)}{\pi^2 t^2} = \frac{2\sin^2 t}{\pi^2 t^2} = \frac{2}{\pi^2}Sa^2(t)$$

Na osnovu relacije (6.107), Fourierova transformacija signala $f(t)$ (slika 6.40.a) je:

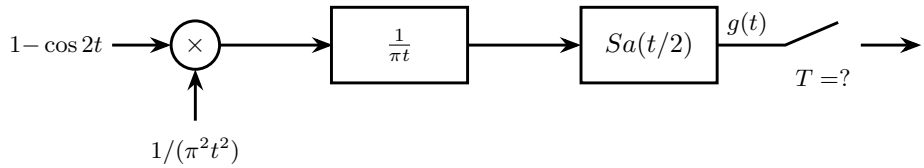
$$F(j\omega) = F\left\{\frac{2}{\pi^2}Sa^2(t)\right\} = \frac{2}{\pi}q\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Na izlazu iz Hilbertovog filtra je signal $\hat{f}(t)$. Kako je Fourierova transformacija signala $f(t)$ realna, onda Fourierova transformacija Hilbertove transformacije, na osnovu relacije (6.152) ima samo imaginarni dio (slika 6.40.b):

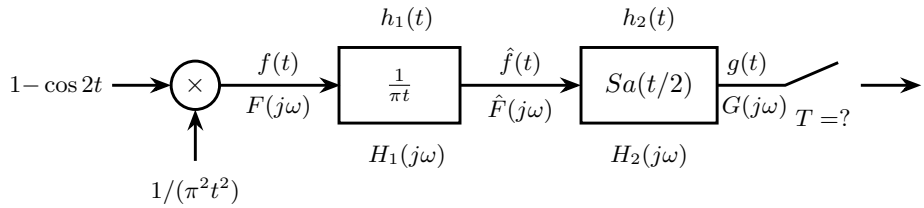
$$\hat{I}(\omega) = -R(\omega)\cdot\mathrm{sgn}(\omega)$$

Impulsni odziv $h_2(t) = Sa(t/2)$ ima Fourierovu transformaciju (slika 6.40.c):

$$H_2(j\omega) = 2\pi p(\omega)$$



Slika 6.38: LTI sistem (primjer 6.23).



Slika 6.39: Ulazni i izlazni signali u pojedine blokove LTI sistema (primjer 6.23).

Izlazni spektar $G(j\omega)$ će biti jednak proizvodu spektra ulaza $\hat{F}(j\omega)$ i spektra impulsnog odziva $H_2(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= H_2(j\omega) \cdot \hat{F}(j\omega) \\ G(j\omega) &= 2\pi p(\omega) \left(-j \operatorname{sgn}\omega \cdot \frac{2}{\pi} q\left(\frac{\omega}{4}\right) \right) \\ &= -4j \operatorname{sgn}\omega \cdot q\left(\frac{\omega}{4}\right) p(\omega) \\ &= \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} \end{aligned}$$

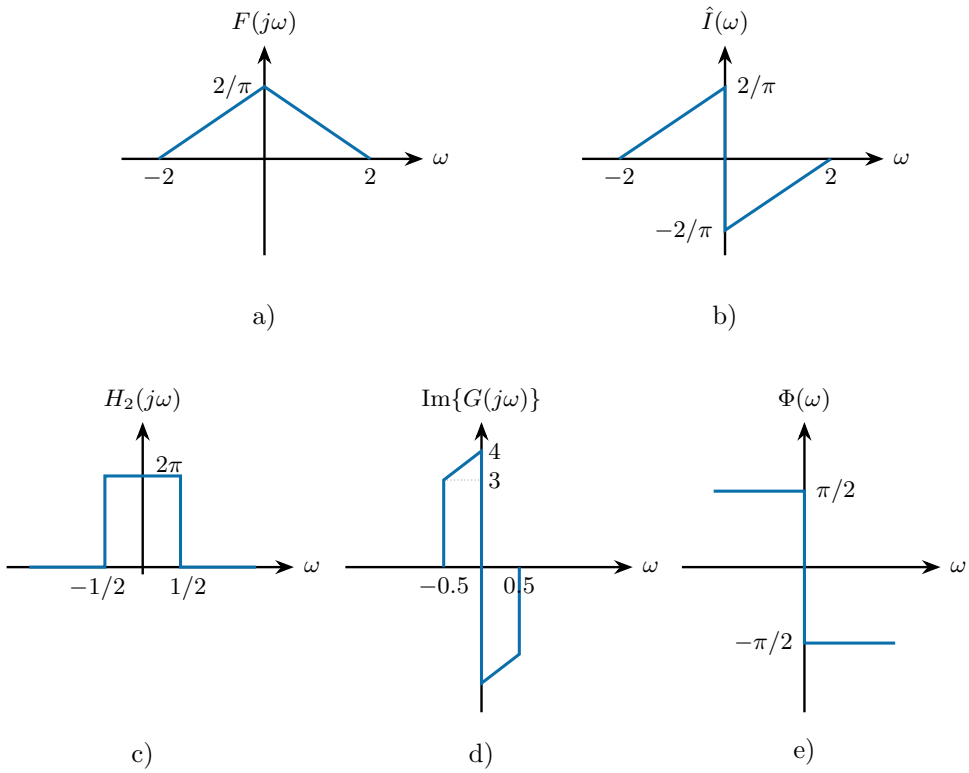
tako da je:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0, \quad \operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = -4 \operatorname{sgn}\omega \cdot q\left(\frac{\omega}{4}\right) \cdot p(\omega)$$

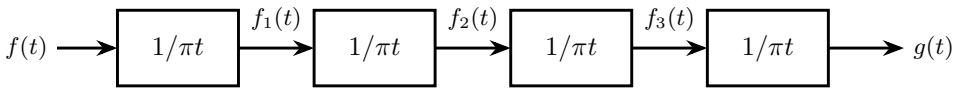
Fazni spektar izlaznog signala je:

$$\Phi(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\operatorname{Re}\{G(j\omega)\}} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{G(j\omega)\}}{\epsilon \to 0} = \mp \frac{\pi}{2}$$

Imaginarni dio spektra izlaza prikazan je na slici 6.40.d, a fazni na slici 6.40.e. Minimalna učestanost uzimanja uzoraka za izlazni signal je $\omega_{0\,\min} = 2\omega_c = 1$, pa je maksimalni period uzorkovanja $T = 2\pi$.



Slika 6.40: Spektri signala iz primjera 6.23.



Slika 6.41: LTI sistem (primjer 6.24)

Primjer 6.24:

Na slici 6.41. prikazan je LTI sistem na čijem je ulazu signal:

$$f(t) = \cos(100\pi t) \cdot [u(t+1) - u(t-1)]$$

a) Odrediti i nacrtati spektar ulaznog signala.
b) Odrediti vremenski oblik i spektar izlaznog signala $g(t)$.
c) Odrediti energiju ulaznog i izlaznog signala.

Rješenje:
a) Ulazni signal se može posmatrati kao proizvod dva signala, pravougaonog signala širine $\tau = 2$, odnosno $[u(t+1) - u(t-1)] = p(t/2)$, koji se naziva modulišući signal, i signala $\cos(100\pi t)$, koji predstavlja nosilac (slika 6.42.a).
Fourierove transformacije modulišućeg signala i nosioca su:

$$p\left(\frac{t}{2}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\,\mathrm{Sa}(\omega)$$
$$\cos(100\pi t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega + 100\pi) + \delta(\omega - 100\pi)]$$

Fourierova transformacija, odnosno spektar (slika 6.42.b) ulaznog (moduliranog) signala nalazi se na osnovu relacije:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F\left\{p\left(\frac{t}{2}\right)\right\} * F\{\cos(100\pi t)\} \\ &= \frac{1}{2\pi}[2\,\mathrm{Sa}(\omega) * \pi(\delta(\omega + 100\pi) + \pi\delta(\omega - 100\pi))] \\ &= \mathrm{Sa}(\omega + 100\pi) + \mathrm{Sa}(\omega - 100\pi) \end{aligned}$$

b) Spektar izlaznog signala određuje se na slijedeći način:

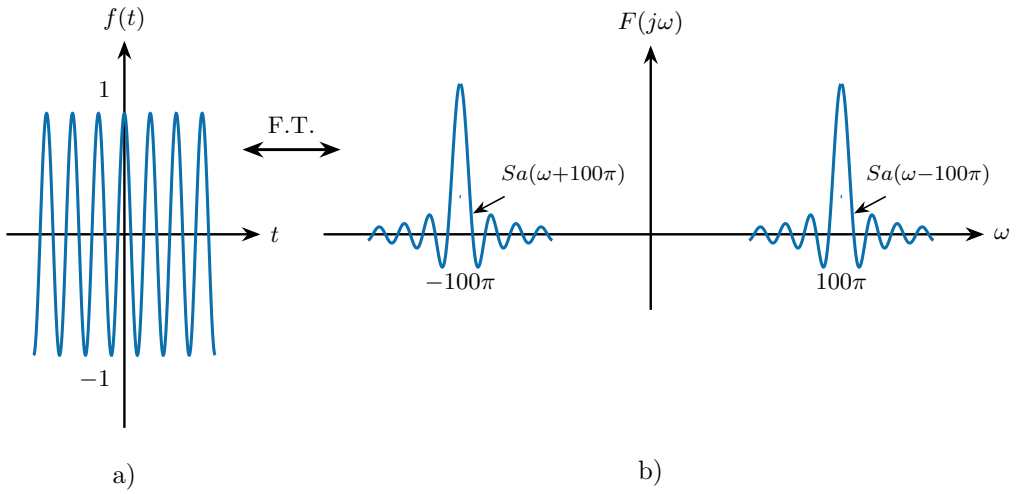
$$\begin{aligned} f_1(t) = f(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{f}(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_1(j\omega) = \hat{F}(j\omega) = F(j\omega) \cdot (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) \\ f_2(t) = f_1(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{f}_1(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_2(j\omega) = \hat{F}_1(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) \\ &= -F(j\omega) \\ f_3(t) = f_2(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{f}_2(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_3(j\omega) = \hat{F}_2(j\omega) = F_2(j\omega) \cdot (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) \\ &= -F(j\omega)(-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) \end{aligned}$$

$$g(t) = f_3(t) * \frac{1}{\pi t} = \hat{f}_3(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} G(j\omega) = \hat{F}_3(j\omega) = F_3(j\omega) \cdot (-j\,\mathrm{sgn}\,\omega) = F(j\omega)$$

Kako je $G(j\omega) = F(j\omega)$, to je i $g(t) = f(t)$, odnosno izlazni signal je jednak ulaznom.

c) Kako su ulazni i izlazni signal jednaki i imaju iste spektre, to su i energije ulaznog i izlaznog signala jednake:

$$E_f = E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$
$$E_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(100\pi t) p^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_{-1}^{1} \cos^2(100\pi t) dt = 1$$



Slika 6.42: a) Ulazni signal, b) Fourierova transformacija ulaznog signala (primjer 6.24)

6.8 Računanje Fourierove transformacije u Pythonu

Za razliku od računanja koeficijenata Fourierovih redova, gdje su granice sume i određenih integrala bile konačne (6.2), kod Fourierove transformacije radi se o beskonačnim granicama (6.8). Granice integrala se mogu postaviti proizvoljno velike, ali to unosi grešku u izračunavanju. U dosta slučajeva, kada se radi o funkcijama čija je vrijednost približno jednaka nuli za $|t| > gr$, zamjena beskonačnih granica integrala konačnim (od $-gr$ do $+gr$) je regularna i ne unosi značajnu grešku. Za funkcije koje su na čitavom vremenskom intervalu različite od nule, ova aproksimacija unosi određene greške, tako da će postavljene granice biti kompromis između željene tačnosti i mogućnosti računanja.

Važno je napomenuti da će postupak u nastavku demonstrirati metodologiju računanja Fourierove transformacije numeričkom aproksimacijom, iako je, kao što će biti pokazano u narednim poglavljima, Diskretna Fourierova transformacije alat izbora pri spektralnoj analizi diskretnih odnosno diskretiziranih signala. Numerička aproksimacija direktne i inverzne Fourierove transformacije (6.8, 6.9) dobija se zamjenom integrala sumom:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \cong T_{\min} \sum_n f(t_n)\, e^{-j\omega t_n} \tag{6.181}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \cong \frac{\omega_s}{2\pi} \sum_n F(j\omega_n)\, e^{j\omega_n t} \tag{6.182}$$

gdje su $T_{\min}$ i ω_s vremenski i frekventni korak diskretizacije. Ove dvije formule implementirane su kao pomoćne funkcije koje se koriste u svim narednim primjerima.

Za računanje Fourierove transformacije (aproksimacije) koristi se odgovarajući i pogodno odabrani vremenski i frekventni korak.

Pomoćna funkcija za numeričko računanje FT i IFT

Budući da je postupak numeričkog računanja Fourierove transformacije identičan za sve primjere u ovom poglavlju, implementiran je kao Python funkcija `FT`. Analogno, inverzna Fourierova transformacija implementirana je kao funkcija `IFT`.

Programski kod 6.1

```
# FT i IFT (numericka aproksimacija Fourierove transformacije)
# se nalaze u sis modulu -> sis.FT, sis.IFT (koriste se od Kod 6.2).

def FT(x, t, w, ts):
    """Numericka aproksimacija Fourierove transformacije."""
    c = np.zeros(len(w), dtype=complex)
    for k, wk in enumerate(w):
        c[k] = ts * np.sum(x * np.exp(-1j * wk * t))
    return c


def IFT(F, w, t, ws):
    """Numericka aproksimacija inverzne Fourierove transformacije."""
    f = np.zeros(len(t), dtype=complex)
    for k, tk in enumerate(t):
        f[k] = ws / (2 * np.pi) * np.sum(F * np.exp(1j * w * tk))
    return f
```

Fourierova transformacija delta funkcije u Pythonu

Delta funkcija $\delta(t)$ je centrirana u $t = 0$. Kako je površina ispod impulsa jednaka jedinici, a širina impulsa jednaka $T_{\min}$, visina impulsa mora biti $1/T_{\min}$. Indeks tačke $t = 0$ u vremenskom nizu određuje se iz parametara simulacije.

Programski kod 6.2

```
ts  = 0.1
ws  = 0.1
gra = 10
t = np.arange(-gra, gra + ts, ts)
w = np.arange(-gra, gra + ws, ws)

# delta funkcija: visina = 1/ts, centrirana u t=0
x = np.zeros(len(t))
idx0 = int((0 - (-gra)) / ts)
x[idx0] = 1/ts

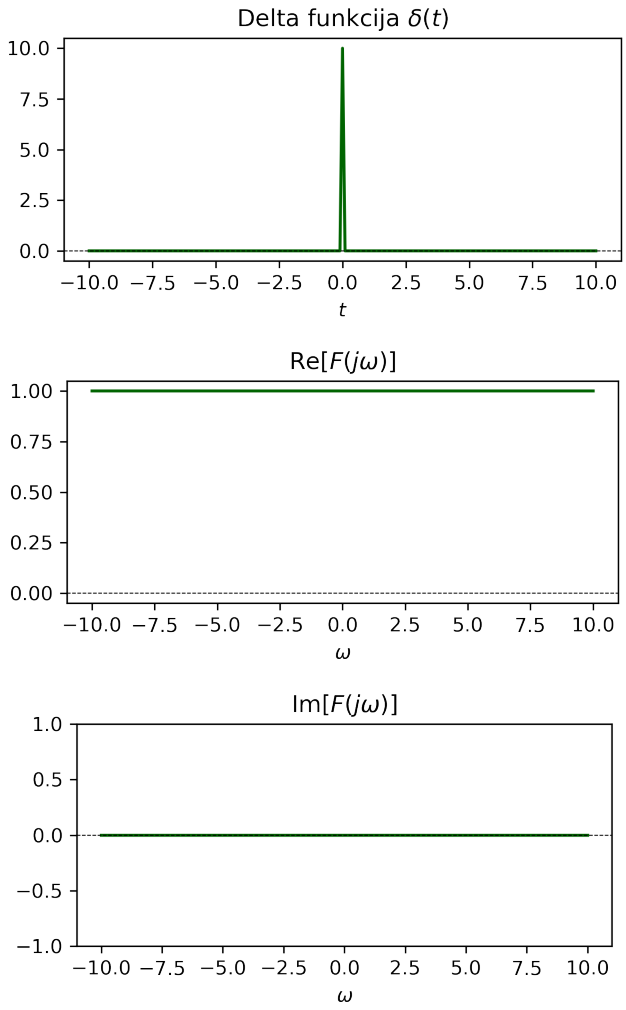
C = sis.FT(x, t, w, ts)

sis.dijagram(t, x,
             naslov=r'Delta funkcija $\delta(t)$'),

sis.dijagram(t, np.real(C),
             x_labela=r'$\omega$',
             naslov=r'$\mathrm{Re}[F(j\omega)]$')

sis.dijagram(w, np.imag(C),
             x_labela=r'$\omega$',
```

```
ylim=[-1,1], naslov=r'$\mathrm{Im}[F(j\omega)]$')
```



Rezultati su ilustrirani programskim kodom 6.2. Realni dio Fourierove transformacije jednak je jedinici, a imaginarni dio je jednak nuli, što je u skladu sa relacijom $\delta(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 1$.

Fourierova transformacija funkcije $\mathrm{Sa}(at)$ u Pythonu

Funkciji $\mathrm{Sa}(at)$ odgovara funkcija $\mathrm{sinc}(at/\pi)$ koja postoji u numpy biblioteci kao `np.sinc`. Ova funkcija prolazi kroz nulu za $at = k\pi$, odnosno u tačkama $t = k\pi/a$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Program za generiranje ove funkcije, za $a = 2$, i za računanje odgovarajuće Fourierove transformacije je data programskim kodom 6.3.

Programski kod 6.3

```
ts  = 0.1
ws  = 0.1
gra = 10

a   = 2
t = np.arange(-gra, gra + ts, ts)
w = np.arange(-gra, gra + ws, ws)

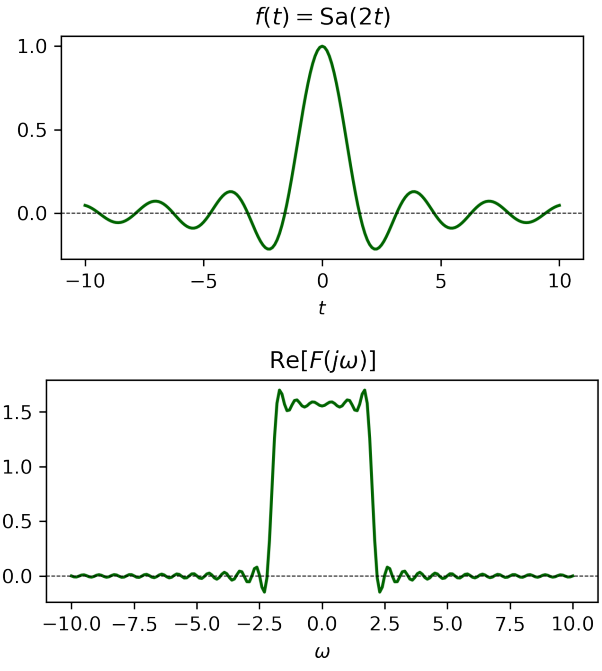
# Sa(at) = sinc(at/pi) u numpy konvenciji
x = np.sinc(a * t / np.pi)

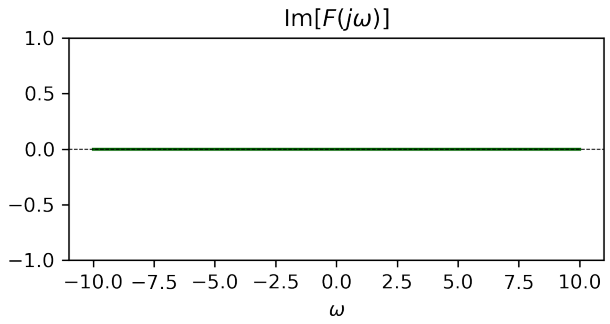
C = sis.FT(x, t, w, ts)


sis.dijagram(t, x,
             naslov=r'$f(t)=\mathrm{Sa}(2t)$'),

sis.dijagram(t, np.real(C),
             x_labela=r'$\omega$',
             naslov=r'$\mathrm{Re}[F(j\omega)]$')

sis.dijagram(w, np.imag(C),
             x_labela=r'$\omega$',
             ylim=[-1,1], naslov=r'$\mathrm{Im}[F(j\omega)]$')
```





Iz tabele Fourierovih transformacija vidi se da Fourierova transformacija funkcije $\mathrm{Sa}(at)$ ima samo realni dio. Sa generiranog dijagrama se vidi i da je imaginarni dio Fourierove transformacije funkcije $\mathrm{Sa}(2t)$ zanemariv (reda 10^{-16}), što je u skladu sa relacijom:

$$\mathrm{Sa}(at) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{a}\, p\left(\frac{\omega}{2a}\right)$$

Fourierova transformacija funkcije $p(t/a)$ u Pythonu

Funkcija $p(t/a)$ ima Fourierovu transformaciju:

$$p(t/a) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} a \cdot \frac{\sin(a\omega/2)}{a\omega/2}$$

Za $a = 4$, pravougaoni impuls se formira iz parametara simulacije – početni i krajnji indeks određuju se iz $t = 0$ i širine impulsa a.

Programski kod 6.4

```
ts  = 0.1
ws  = 0.1
gra = 10

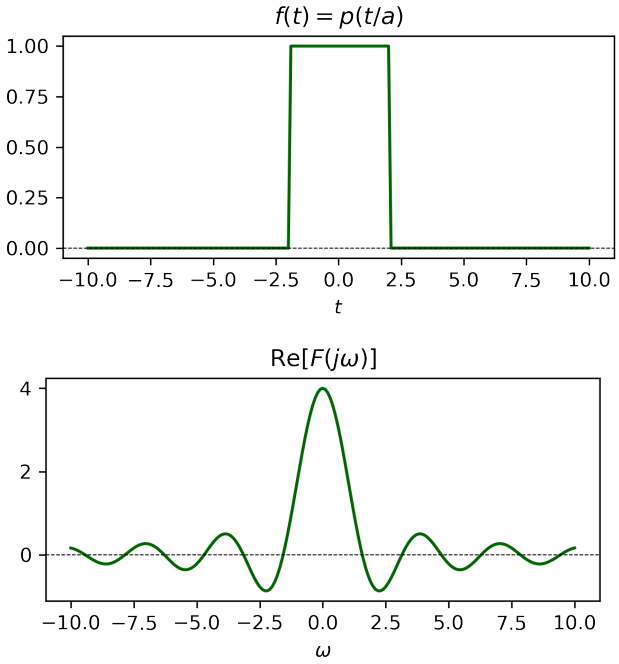
a   = 4
t = np.arange(-gra, gra + ts, ts)
w = np.arange(-gra, gra + ws, ws)

# p(t/a): pravougaoni impuls sirine a, centriran u t=0
x = np.zeros(len(t))
x[(t>=-a/2) & (t<=a/2)] = 1

C = sis.FT(x, t, w, ts)

sis.dijagram(t, x,
             naslov=r'$f(t)=p(t/a)$'),

sis.dijagram(t, np.real(C),
              x_labela=r'$\omega$',
              naslov=r'$\mathrm{Re}[F(j\omega)]$')
```



I u ovom slučaju imaginarni dio Fourierove transformacije je jednak nuli, tako da je na dijagramu prikazan samo realni dio.

Inverzna Fourierova transformacija u Pythonu

Za funkcije $f_1(t)$ i $f_2(t)$ i njihove Fourierove transformacije važe slijedeće relacije:

$$f_1(t) * f_2(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$$
$$f_1(t) \cdot f_2(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$$

Konvolucija dva ista kontinualna signala $p(t/2)$, čija je Fourierova transformacija data sa $p(t/2) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\sin(\omega)/\omega$, određuje se nalaženjem proizvoda Fourierovih transformacija, a zatim inverznom Fourierovom transformacijom tog proizvoda. Funkciji $2\sin(\omega)/\omega$ u Pythonu odgovara oblik `2 * np.sinc(w / np.pi)`.

Programski kod 6.5

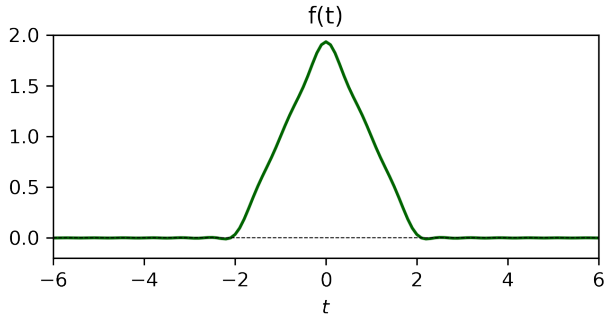
```
ts  = 0.1
ws  = 0.1
gra = 10
t = np.arange(-gra, gra + ts, ts)
w = np.arange(-gra, gra + ws, ws)

X = 2 * np.sinc(w / np.pi)
Y = 2 * np.sinc(w / np.pi)
```

```
Z = X * Y    # konvolucija u vremenu = mnozenje u frekventnom domenu

f = sis.IFT(Z, w, t, ws)

sis.dijagram(t, np.real(f), naslov='f(t)', ylim=(-.2, 2), xlim=(-6, 6))
```



Kao rezultat se dobija trougaoni signal širine 4 i visine 2, što odgovara rezultatima dobijenim računskim putem (vidi primjer 2.16).

6.9 Tabele osobina Fourierove transformacije i Fourierovih transformacionih parova

U ovom poglavlju i kroz riješene primjere pokazane su neke od osobina Fourierove transformacije i nađene Fourierove transformacije signala koji se najčešće koriste u teoriji signala. U tabeli 6.1 date su osobine Fourierove transformacije, a u tabeli 6.2 neki Fourierovi transformacioni parovi.

Tabela 6.1: Osobine Fourierove transformacije.

	Osobina	$\boldsymbol{f(t)}$	$\boldsymbol{F(j\omega)}$
1.	Linearnost	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F(j\omega) + a_2 F(j\omega)$
2.	Skaliranje po amplitudi	$kf(t)$	$kF(j\omega)$
3.	Vremensko skaliranje	$f(kt)$	$\frac{1}{\lvert k\rvert} F\left(j\frac{\omega}{k}\right)$
4.	Vremenski pomak	$f\left(t - t_0\right)$	$F(j\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
5.	Simetrija	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
6.	Modulacija (frekventni pomak)	$f(t) \cdot e^{\pm j\omega_0 t}$	$F\left(j\omega \mp j\omega_0\right)$
7.	Konjugovanje	$f(t)_{\text{realna}}$	$F^*(j\omega) = F(-j\omega)$
		$f(t)_{\text{imaginarna}}$	$F^*(j\omega) = -F(-j\omega)$
		$f(t)_{\text{realna i parna}}$	$F^*(j\omega) = F(j\omega)$ $R(\omega)$
		$f(t)_{\text{realna i neparna}}$	$F^*(j\omega) = -F(j\omega)$ $I(\omega)$
8.	Izvod originala	$\frac{df(t)}{dt}, \quad \frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$j\omega F(j\omega), \quad (j\omega)^n F(j\omega)$
9.	Izvod lika	$(-jt)f(t), \quad (-jt)^n f(t)$	$\frac{dF(j\omega)}{d\omega}, \quad \frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n}$
10.	Integriranje originala	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(j\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
11.	Konvolucija originala	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$
12.	Proizvod originala (frekventna konvolucija)	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega)$
13.	Korelaciona funkcija	$\rho_{12}(t)$	$F_1^*(j\omega) F_2(j\omega)$
14.	Autokorelaciona funkcija	$\rho_{11}(t)$	$\lvert F(j\omega)\rvert^2 = S_{11}$
14.	Teorema o energiji	$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt$	$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert F(j\omega)\rvert^2 d\omega$

Tabela 6.2: Fourierovi transformacioni parovi.

	Vremenski domen $f(t)$	**Frekventni domen $F(j\omega)$**
	$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$	$\boldsymbol{F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$
1.	$e^{-at}u(t)$	$1/(a+j\omega), \quad a>0$
2.	$e^{at}u(-t)$	$1/(a-j\omega), \quad a>0$
3.	$e^{-a\lvert t\rvert}$	$2a/\left(a^2+\omega^2\right), \quad a>0$
4.	$te^{-at}u(t)$	$1/(a+j\omega)^2, \quad a>0$
5.	$t^n e^{-at}u(t)$	$n!/(a+j\omega)^{n+1}, \quad a>0$
6.	$\delta(t)$	1
7.	$1; \quad k$	$2\pi k\cdot\delta(\omega); \quad 2\pi k\cdot\delta(\omega)$
8.	$p\left(\frac{t}{\tau}\right) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau\cdot Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
9.	$\frac{\omega_c}{\pi}Sa\left(\omega_c t\right)$	$p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$
10.	$\frac{k\omega_c}{\pi}Sa\omega_c\left(t-t_0\right)$	$k\cdot e^{-j\omega t_0} rect\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$
11.	$\frac{\omega_c}{2\pi}Sa^2\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$	$q\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$
12.	$q\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2}Sa^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$
13.	sgnt	$2/(\ j\omega\ )$
14.	$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/(j\omega)$
15.	$1/(\pi t)$	$-j\,\text{sgn}\,\omega$
16.	$e^{+j\omega_0 t}$	$2\pi\cdot\delta\left(\omega-\omega_0\right)$
17.	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\pi\delta\left(\omega+\omega_0\right)$
18.	$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}\delta\left(\omega-\omega_0\right)-\frac{\pi}{j}\delta\left(\omega+\omega_0\right)$
19.	$\cos\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$
20.	$\sin\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)-\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$
21.	$e^{-at}\cos\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}, \quad a>0$
22.	$e^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}\,\frac{\omega_0}{(\text{a+j}\omega)^2+\omega_0^2}, \quad a>0$
23.	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{+jk\omega_0 t}$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}2\pi C_k\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$
24.	$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$	$\delta_T(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-jk\omega T}$
25.	$\delta_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_0 t}$	$\delta_T(j\omega)=\omega_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-k\omega_0\right)$
26.	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$

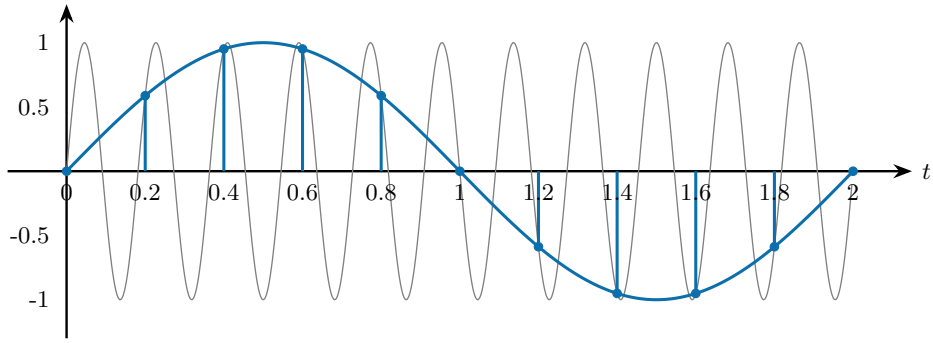
7. Amplitudno impulsna modulacija

Harmonijskom analizom funkcija koje predstavljaju kontinualne signale, došlo se do konstatacije da je moguće diskretizirati kontinualne signale, a da se pri tome ne okrnje njihove osobine koje imaju kao nosioci poruka. Kod amplitudno impulsne modulacije (AIM) signal, originalni nosilac poruke (modulišući signal), modulira se povorkom impulsa koja predstavlja nosilac, čiji se parametri mogu mijenjati u zavisnosti od originalnog signala. Dobiveni modulirani signal je impulsnog talasnog oblika.

Veoma važan parametar pri impulsnoj modulaciji je maksimalni dozvoljeni interval vremena između uzimanja uzoraka (interval diskretizacije), tako da se ne ugrozi informacija sadržana u samom signalu. Problem izbora intervala T između uzoraka rješava teorema o uzorkovanju (engl. *sampling theorem*). Dakle, realizacija digitalne obrade kontinualnog signala odvija se u tri koraka. Prvi je konverzija kontinualnog signala u niz uzoraka (uzorkovanje). Drugi je obrada tako dobijenog niza, a treći korak je rekonstrukcija kontinualnog signala iz uzoraka koristeći interpolaciju. Ovakva transformacija signala omogućava pretvaranje kontinualnih signala u diskretne odnosno digitalne, obradu digitalnih signala na digitalnim računarima (npr. u formi digitalnih filtera) ili prenos digitalnim komunikacionim kanalima, te rekonstrukciju obrađenih digitalnih signala ponovo u kontinualne.

7.1 Diskretizacija kontinualnog signala: teorema o uzorkovanju

Procesiranje kontinualnog signala, kao što je diskretizacija (uzorkovanje) periodičkog (sinusnog ili eksponencijalnog) ili aperiodičkog signala, može, na prvi pogled, izgledati kao jednostavan postupak, ali je u suštini vrlo složen. Uzorkovanje se može shvatiti kao proces modulacije koji kontinualni signal transformiše u niz impulsa, čija je površina jednaka amplitudi kontinualnog signala u odgovarajućim trenucima. Ukoliko se radi o periodičkom signalu on se uvijek može rastaviti na sumu sinusoida različitih frekvencija i faza. Spektar takvog signala je diskretan i daje raspodjelu amplituda i faza sinusnih komponenata na konačnom broju odgovarajućih frekvencija. S druge strane, aperiodički signal sadrži beskonačan broj frekventnih komponenti, pa se njegov spektar može prikazati kontinualnom krivom u frekventnom domenu. Modulacijom periodičkog ili aperiodičkog signala povorkom impulsa proširuje se spektar originalnog signala na frekventno područje $(-\infty \div \infty)$, odnosno pojavljuju se viskofrekventne komponente.



Slika 7.1: Ilustracija *aliasing* efekta u vremenskom domenu.

7.1.1 Aliasing efekat

Sinusni signal u kontinualnom vremenu $\sin(\omega t)$ diskretiziran svakih T sekundi ($t = kT$) daje sinusni signal $\sin(\omega kT)$ u diskretnom vremenu. Uzorci dvije ili više sinusoida u kontinualnom vremenu, različitih frekvencija, mogu generirati isti niz impulsa (slika 7.1.) u diskretnom vremenu, pa je nemoguće odrediti o kojoj se sinusoidi radi. Isto tako, ako se sinusoida diskretizira povorkom impulsa čiji je period jednak periodu sinusoide, dobit će se niz identičnih uzoraka, i bit će nemoguće odrediti da li je originalni signal konstantan ili sinusoidalan. Kako je opseg u kome se vremenski signal mijenja direktno povezan s maksimalnom frekvencijom signala, treba naći jednoznačnu vezu između Fourierove transformacije kontinualnog i diskretiziranog signala. Također, beskonačan broj kontinualnih signala može generirati isti niz impulsa. Ovaj fenomen poznat je kao *aliasing efekat*, jer implicira da bilo koji diskretni sinusni signal ima bezbroj kontinualnih identiteta.

Aliasing prouzrokuje zabunu u digitalnom procesiranju signala, te bitno otežava ili čini nemogućim rekonstrukciju originalnog signala iz uzoraka. Prema tome, aliasing je nepoželjan, a posljedica je nedovoljno visoke frekvencije uzimanja uzoraka kontinualnog signala. Da bi se izbjegao, signal se na određeni način mora frekventno ograničiti, tj. njegova Fourierova transformacija (spektar) mora biti jednaka nuli van konačnog opsega učestanosti ($\omega \geq \omega_M$). Također, učestanost uzimanja uzoraka ω_0 treba da zadovoljava uslov:

$$\omega_0 \geq 2\omega_M$$

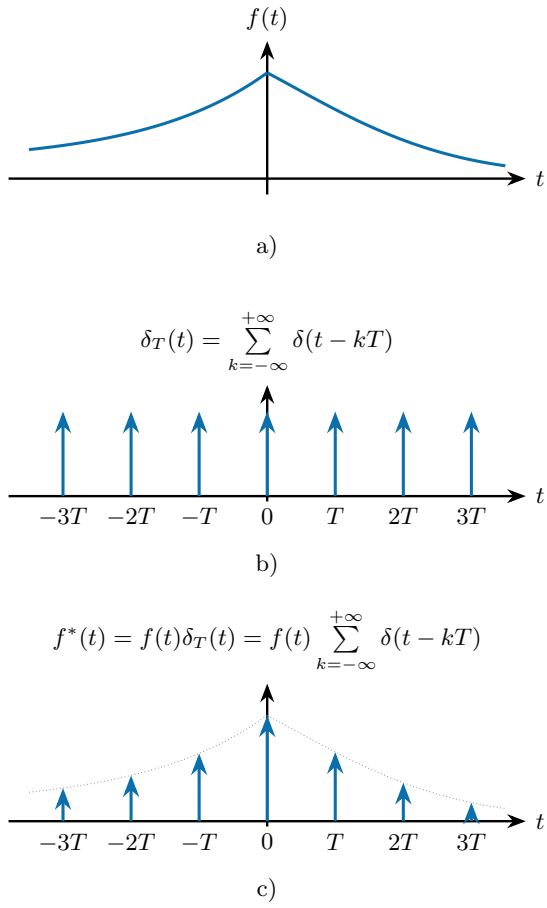
gdje je ω_M najviša učestanost u spektru signala. Uz ovaj uslov pitanje zabune ili aliasinga se ne pojavljuje, jer uzorci sa slike 7.1. tada jednoznačno specificiraju originalni signal i on se može rekonstruirati iz uzoraka. Uslov $\omega_0 \geq 2\omega_M$ je poznat kao *teorema o uzorkovanju* i izuzetno je važan u analizi signala i sistema. *Teorema o uzorkovanju daje dovoljan uslov za ispravno uzorkovanje signala - svaki signal se treba uzorkovati frekvencijom najmanje dva puta višom od maksimalne frekvencije u spektru tog signala.* Ukoliko teorema o uzorkovanju nije poštovana, ne samo da će često biti izgubljena informacija o signalu, nego će se dobiti i pogrešna informacija o signalu.

Za primjer sa slike 7.1. frekvencija diskretizacije ne smije biti manja od dvostruke frekvencije sinusoide, ili drugačije rečeno, diskretizirana sinusoida mora imati minimalno dva uzorka po periodu. Ako je frekvencija uzorkovanja (engl. *sampling rate*) ispod ovog

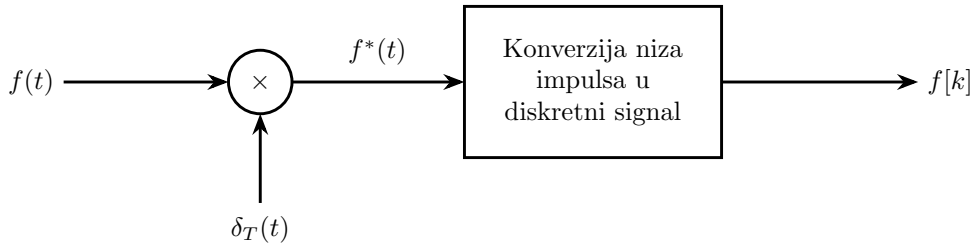
minimuma, spektar diskretiziranog signala će se sastojati od osnovnog i replika osnovnog spektra koji će biti preklopljeni, što znači da će se pojaviti pogrešan signal za sinusoidu na nižoj frekvenciji. Teorema o diskretizaciji će biti dokazana nakon izvođenja izraza za spektar zvjezdaste funkcije.

7.1.2 Zvjezdasta funkcija

Da bi se došlo do teoreme o uzorkovanju, treba pogledati kako se predstavljaju uzorci kontinualnog vremenskog signala u intervalima diskretizacije T. Neka je $f(t)$ kontinualni signal, a $f(kT)$ uzorci signala $f(t)$ u cjelobrojnim umnošcima intervala diskretizacije (uzorkovanja) T. Ako se sa $f^*(t)$ ili sa $f_\delta(t)$ označi proizvod originalnog kontinualnog signala (modulišućeg) $f(t)$ i periodičke funkcije (nosioca) $\delta_T(t)$, koja predstavlja povorku impulsa perioda T, dobije se idealni diskretizirani signal (modulirani signal) (slika 7.2).



Slika 7.2: a) Originalni signal, b) povorka jediničnih impulsa, c) idealni diskretizirani signal - zvjezdasta funkcija.



Slika 7.3: Razumijevanje procesa analogno-digitalne konverzije kao amplitudno impulsne modulacije.

Taj signal je funkcija kontinualne promjenljive i različit je od nule samo za $t = kT$:

$$f^*(t) = f_\delta(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = f(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) \tag{7.1}$$

Signal definiran relacijom (7.1) naziva se zvjezdasta funkcija i definira idealnu impulsnu modulaciju (engl. *impulse sampling*), koja se odvija u idealnom impulsnom modulatoru. Iako se ovakav proces uzorkovanja ne može praktično realizirati, on ima izuzetan teoretski značaj jer omogućava da se jednostavno sagledaju mnogi problemi prilikom pretvaranja vremenski kontinualnih signala u vremenski diskretne signale.

Kako se zvjezdasta funkcija $f^*(t)$ ne može nacrtati, koristi se konvencija da se ona predstavlja strelicama čije visine odgovaraju površinama funkcije u trenucima kT (slika 7.2.). Površina zvjezdaste funkcije koja se nalazi u trenutku kT jednaka je $f(kT)$, jer je $f(t) \cdot \delta(t - kT) = f(kT) \cdot \delta(t - kT)$. Kontinualni signal $f(t)$ se, pri pomenutoj konvenciji, pojavljuje kao anvelopa impulsnih funkcija površine $f(kT)$ u zvjezdastoj funkciji. Ovo opravdava da se uvede još jedan izraz za zvjezdastu funkciju:

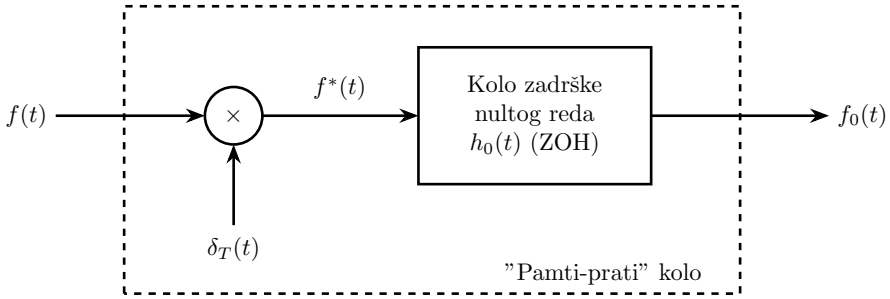
$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT) \tag{7.2}$$

U zvjezdastoj funkciji datoj izrazom (7.2) sadržane su samo informacije o vrijednostima funkcije $f(t)$ u trenucima $t = kT$, i te vrijednosti se nazivaju uzorci funkcije.

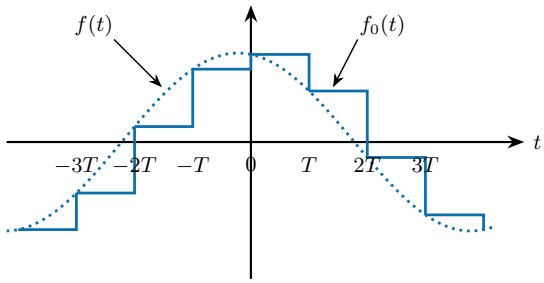
7.1.3 Kolo zadrške nultog reda

Na slici 7.3. prikazana je blok shema analogno-digitalne (A/D) konverzije kao procesa modulacije, gdje drugi dio sheme predstavlja konverziju niza impulsa u diskretni signal. Uzorci kontinualnog signala su predstavljeni brojevima $f[k]$, a ne površinama impulsa $f^*(t)$. Mada je ovakva predstava diskretizacije po vremenu u velikoj mjeri idealizirana, jer se delta (Diracovi) impulsi ne mogu fizički generirati, niti se njihova amplituda može mjeriti i konvertirati u brojeve, ona je veoma pogodna za matematičku analizu procesa diskretizacije.

Diracovi impulsi se u praksi formiraju impulsima trajanja $\tau \ll T$. Kada se u procesu uzorkovanja (ili rekonstrucije) umjesto Diracovih impulsa primijene impulsi konačne širine



a)



b)

Slika 7.4: a) Idealizirani pamti-prati proces, b) ulazni i izlazni signal "pamti-prati" kola.

i amplitude, mijenja se ukupni spektar povorke uzoraka i o tome treba voditi računa. Ako je pak τ veoma malo u poređenju sa periodom T povorke impulsa, odnosno ako je T dovoljno malo, ovaj efekat je zanemariv. U protivnom, da bi se kompenziralo izobličenje koje se na ovaj način unosi, u praksi se koriste i dodatni ekvilizacijski filteri.

Idealni analogno-digitalni (A/D) konvertor se ne može realizirati u praksi. Proces diskretizacije se zbog toga aproksimira tzv. pamti-prati kolom (engl. *sample and hold* S&H) i A/D konvertorom. Zadatak pamti-prati kola prilikom uzorkovanja je da obezbijedi konstantan ulazni signal $f_0(t)$ za A/D konvertor u periodima analogno-digitalne konverzije.

S druge strane, kada se pamti-prati kolo projektuje i koristi za pretvaranje povorke impulsa u kontinualni signal, na način da se u intervalu između dva uzorka funkcija $f(t)$ aproksimira polinomom nultog reda, tj. konstantom jednakoj vrijednosti funkcije na početku intervala, onda se ono naziva kolom zadrške nultog reda (engl. *Zero Order Hold - ZOH*). Izlazni signal $f_0(t)$ takvog kola je stepenastog talasnog oblika (slika 7.4.).

7.1.4 Zvjezdasta funkcija u Pythonu

Kako zvjezdasta funkcija predstavlja proizvod povorke impulsa $\delta_T(t)$ i originalnog signala $f(t)$, sve što je rečeno za zadavanje delta funkcije u drugom poglavlju vrijedi i za zvjezdastu funkciju. Važno je naglasiti da Python sve signale – pa i one koji se smatraju kontinualnim – predstavlja kao diskretne nizove. Zbog toga se u programu koriste dva različita koraka:

- $T_{\min}$ (`ts`) – korak diskretizacije kojim se aproksimira kontinualni signal. Što je $T_{\min}$ manji, to je aproksimacija tačnija.
- T – period uzorkovanja, tj. vremenski razmak između susjednih uzoraka zvjezdaste funkcije. Ovo je parametar koji se istražuje.

Odnos `korak_s = int(T/ts)` određuje koliko tačaka "kontinualnog" niza odgovara jednom periodu uzorkovanja T, i koristi se za formiranje povorke impulsa (odnosno decimiranja diskretnog signala). Na osnovu navedenog je sintetiziran programski kod 7.1, te je prikazan način dobijanja zvjezdaste funkcije od originalnog signala $f(t) = \sin(\pi t/4.8 - 0.765)$ i povorke impulsa sa periodom uzorkovanja $T = 1$.

Programski kod 7.1

```
ts = 0.01   # korak diskretizacije "kontinualnog" signala
T  = 1.0    # period uzorkovanja (interval izmedju impulsa)

t = np.arange(-5, 5 + ts, ts)

# originalni signal - predstavljen kao diskretan sa korakom ts
x = np.sin(t * (np.pi / 4.8) - 0.765)

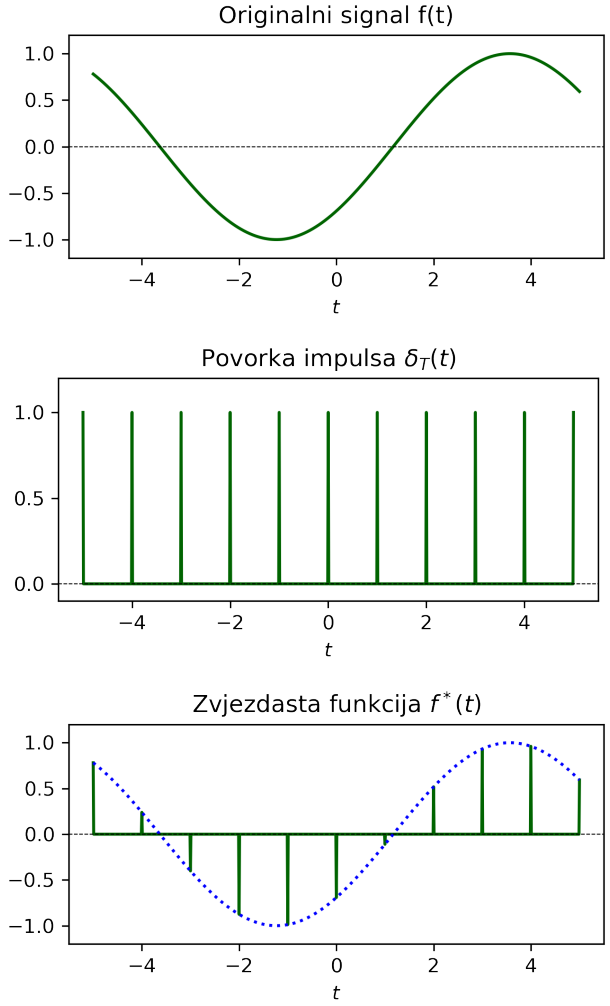
# povorka impulsa: jedinicni impulsi na svakih T sekundi
korak_s = int(T / ts)
y = np.zeros(len(t))
y[::korak_s] = 1

# zvjezdasta funkcija = proizvod signala i povorke impulsa
z = y * x

sis.dijagram(t, x,
             ylim=(-1.2, 1.2),
             naslov=r'Originalni signal f(t)'),

sis.dijagram(t, x=y,
             ylim=(-0.1, 1.2),
             naslov=r'Povorka impulsa $\delta_T(t)$'),

sis.dijagram(serije=[dict(t=t, x=z), dict(t=t, x=x, stil='b:')],
         ylim=(-1.2, 1.2), naslov=r'Zvjezdasta funkcija $f^*(t)$')
```



7.1.5 Spektar zvjezdaste funkcije

Veza između spektra originalnog signala $f(t)$ i spektra zvjezdaste funkcije $f^*(t)$, može se naći polazeći od pretpostavke da je spektar signala $f(t)$ frekventno ograničen na najvišu frekvenciju u spektru ω_M (na slici 7.5.a pretpostavljen je skoro ograničen spektar).

Spektar diskretiziranog signala (zvjezdaste funkcije) ima dva oblika. Prvi oblik spektra diskretiziranog signala dobije se iz definicije date relacijom (7.1), koristeći Fourierov red povorke impulsa $\delta_T(t)$:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \tag{7.3}$$

Koeficijenti C_k Fourierovog reda određuju se iz relacije:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T} \tag{7.4}$$

Na osnovu relacija (7.3) i (7.4) dobije se Fourierov red povorke impulsa:

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} \tag{7.5}$$

Ako se izraz (7.5) uvrsti u (7.1), koji definira zvjezdastu funkciju, dobije se:

$$f^*(t) = \frac{1}{T}f(t)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{jk\omega_0 t} \tag{7.6}$$

Primjenom teoreme o modulaciji na izraz $f(t)\cdot e^{jk\omega_0 t}$ relacije (7.6), dobija se spektar (Fourierova transformacija) zvjezdaste funkcije:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega - jk\omega_0\right) \tag{7.7}$$

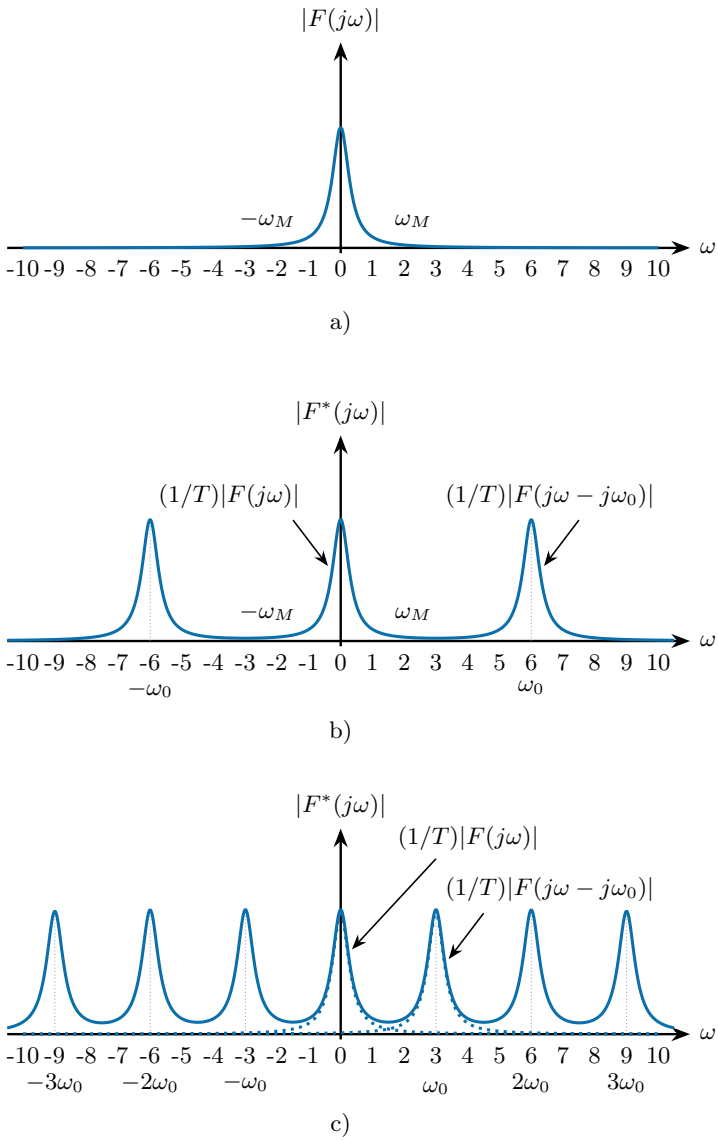
Do istog rezultata (7.7) moglo se doći koristeći osobinu (6.113): proizvod dvije funkcije u vremenskom domenu ima Fourierovu transformaciju jednaku konvoluciji Fourierovih transformacija tih funkcija, skaliran faktorom $1/2\pi$.

$$\begin{aligned} F^*(j\omega) &= F\left\{f(t)\cdot\delta_T(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}F\{f(t)\} * F\left\{\delta_T(t)\right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi}F(j\omega) * \omega_0\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega - k\omega_0\right) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega - jk\omega_0\right) \end{aligned} \tag{7.8}$$

Spektar zvjezdaste funkcije (7.8) sastoji se od beskonačne sume pomaknutih spektara originalnog signala, skalirane faktorom $1/T$. Iz ovog izraza se također može izvesti opći zaključak da aperiodički signal diskretiziran povorkom impulsa perioda T, ima periodički spektar po promjenljivoj ω, sa učestanošću ponavljanja $\omega_0 = 2\pi/T$. U općem slučaju pomaknuti spektri $F(j\omega)$ mogu se preklopiti sa drugim spektrima ako ω_0 nije dovoljno veliko u poređenju sa širinom $F(j\omega)$. Taj efekat ilustriran je na slici 7.5.b gdje su osnovna i ostale replike spektra preklopljene u opsegu učestanosti $\omega_0 - \omega_M \leq \omega \leq \omega_M$. U tom opsegu kompleksne vrijednosti spektara se sabiraju. Rezultantni spektar više ne predstavlja skalirani spektar kontinualnog signala, nego jedna frekventna komponenta poprima identitet drugih (odatle i naziv *alias*). Spektar originalnog signala proširio se na frekventno područje $(-\infty \div \infty)$, odnosno pojavile su se viskofrekventne komponente u diskretnom signalu, što je ekvivalentno djelovanju šuma. To ujedno znači da će ulazni signal imati određenu amplitudnu i faznu distorziju. Također, treba primjetiti da što je period T povorke impulsa $\delta_T(t)$ veći, to je ω_0 manje, i obrnuto.

Drugi oblik spektra zvjezdaste funkcije dobija se primjenom direktne Fourierove transformacije na izraz (7.2):

$$F^*(j\omega) = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\cdot\delta(t-kT)\right\} =$$



Slika 7.5: a) Spektar originalnog signala, b) spektar zvjezdaste funkcije kada je učestanost odabiranja dovoljno visoka ($\omega_0 \geq 2\omega_M$), c) spektar zvjezdaste funkcije kada dolazi do aliasinga (učestanost uzorkovanja je niža od dozvoljene ($\omega_0 < 2\omega_M$)).

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)F\{\delta(t-kT)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\cdot e^{-jk\omega T} \tag{7.9}$$

U postupku realne diskretizacije po vremenu, vremenski kontinualni signal $f(t)$ se konvertira u niz uzoraka $f[k]$. Može se pokazati da je spektar signala $f(t)$ dobijen impulsnom modulacijom odgovara spektru diskretnog signala $f[k]$. Ova veza je od izuzetne važnosti jer omogućava da se na jednostavan način povežu spektri kontinualnog signala i odgovarajućeg diskretnog signala, koristeći spektar signala dobijenog impulsnom modulacijom.

7.1.6 Spektar zvjezdaste funkcije u Pythonu

Ako je originalni signal oblika $f(t) = \mathrm{Sa}(at)$, njegov spektar je:

$$F(j\omega) = \frac{\pi}{a}\cdot p\Big(\frac{\omega}{2a}\Big)$$

Neka je vrijednost konstante a jednaka 2, a period uzorkovanja $T = 0.5$. I ovdje važi distinkcija između koraka diskretizacije $T_{\min}$(`ts`) i perioda uzorkovanja T - originalni signal $\mathrm{Sa}(at)$ diskretiziran je sa korakom $T_{\min} = 0.01$, dok uzorkovanje vrši povorka impulsa sa periodom $T = 0.5$, tj. svakih $T/T_{\min} = 50$ tačaka diskretiziranog niza.

Pri zadavanju povorke impulsa, visina svakog impulsa iznosi $1/T_{\min}$, čime je osigurano da površina svakog impulsa bude jednaka jedinici. Za računanje spektra koristi se funkcija `FT` definirana u poglavlju 6 (kod 6.1), koja se primjenjuje i na originalni signal i na zvjezdastu funkciju.

Programski kod 7.2

```
ts  = 0.01    # korak diskretizacije "kontinualnog" signala
ws  = 0.1     # korak diskretizacije frekventne ose
gra = 20
a   = 2.0
T   = 0.5     # period uzorkovanja

t = np.arange(-gra, gra + ts, ts)
w = np.arange(-gra, gra + ws, ws)

# originalni signal Sa(at) - predstavljen kao diskretan, korak ts
x = np.sinc(a * t / np.pi)

# povorka impulsa: visina 1/ts (povrsina = 1), period uzorkovanja T
korak_s = int(T / ts)
y = np.zeros(len(t))
y[::korak_s] = 1 / ts

# zvjezdasta funkcija
z = x * y

sis.dijagram(t, x,
             ylim=(-0.5, 1.5),
             y_labela='f(t)', naslov='Originalni signal f(t)')

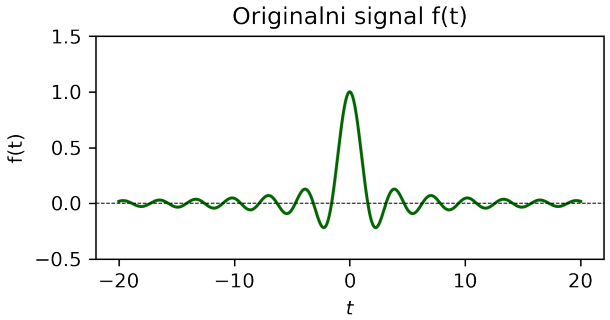
sis.dijagram(serije=[dict(t=t, x=z), dict(t=t, x=x/ts, stil='b:')],
             ylim=(-50, 150), naslov=r'Zvjezdasta funkcija $f^*(t)$')

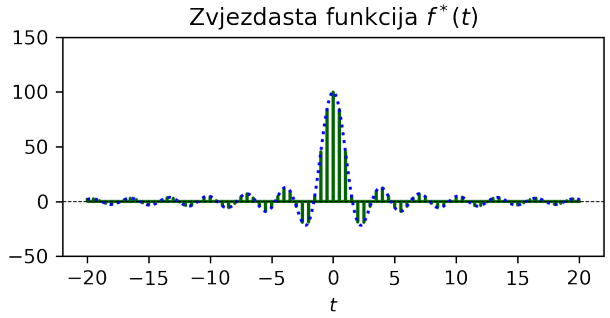
# racunanje spektra - FT se primjenjuje na "kontinualne" reprezentacije
```

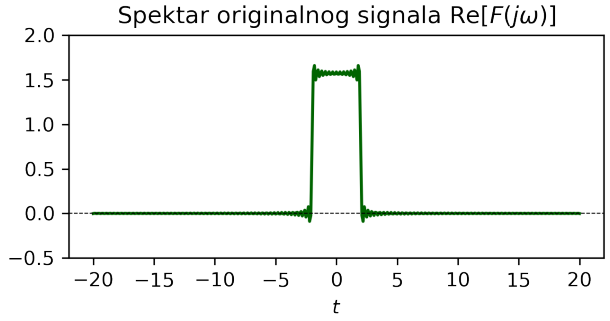
```
cx = sis.FT(x, t, w, ts)
cz = sis.FT(z, t, w, ts)

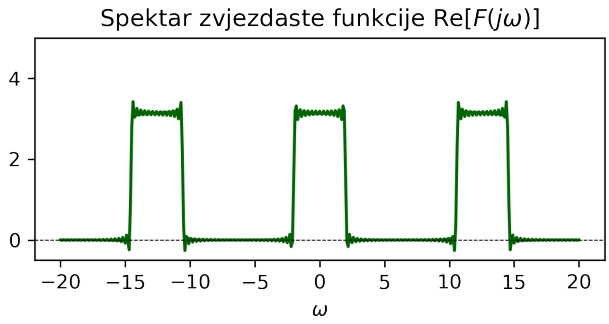
sis.dijagram(w, np.real(cx),
             ylim=(-0.5, 2),
             naslov='Spektar originalnog signala $\mathrm{Re}[F(j\omega)]$')

sis.dijagram(w, np.real(cz),
             ylim=(-0.5, 5),
             x_labela=r'$\omega$',
             naslov='Spektar zvjezdaste funkcije $\mathrm{Re}[F(j\omega)]$')
```









U okviru koda 7.2 prikazani su originalni signal i zvjezdasta funkcija, kao i njihovi spektri. U datom primjeru učestanost ω_0 iznosi:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.5} = 4\pi \approx 12.57$$

što odgovara vrijednosti dobijenoj u okviru ispisa programskog koda 7.2. Amplituda spektra zvjezdaste funkcije jednaka je amplitudi spektra originalne funkcije pomnoženoj faktorom $1/T$. Za $a = 2$ i $T = 0.5$ to iznosi $(\pi/2) \cdot (1/T) = \pi \approx 3.14$, što se slaže sa dobijenom slikom.

7.1.7 Rekonstrukcija uzoraka kontinualnog signala iz spektra zvjezdaste funkcije

Rekonstrukcija uzoraka vrši se polazeći od spektra zvjezdaste funkcije datog relacijom (7.9). Obje strane relacije (7.9) množe se eksponencijalnim članom $e^{jm\omega T}$ i integriraju u intervalu $(-\omega_0 \div +\omega_0)$:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F^*(j\omega) \cdot e^{jm\omega T} d\omega = \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{j(m-k)\omega T} \right] d\omega \tag{7.10}$$

Kako je, iz principa ortogonalnosti:

$$\int_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{j(m-k)\omega T} d\omega = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ 2\omega_0, & m = k \end{cases} \tag{7.11}$$

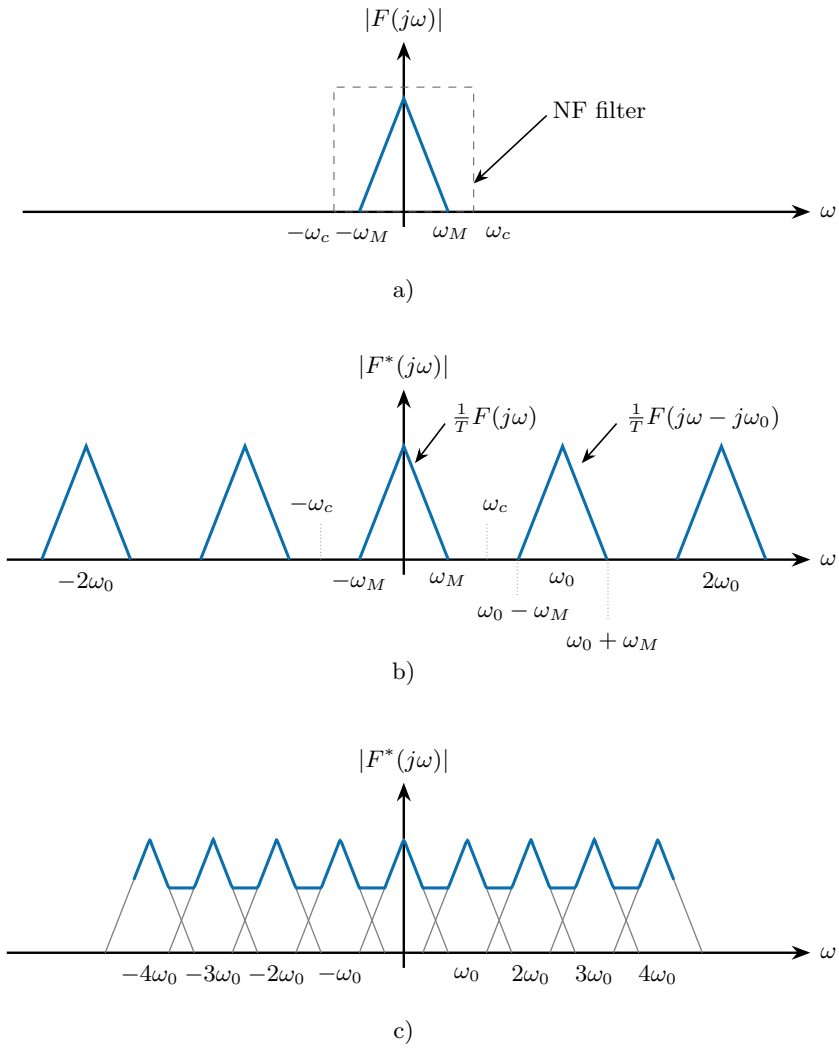
za $f(kT)$ se dobije:

$$f(kT) = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{+\omega_0} F^*(j\omega) \cdot e^{jk\omega T} d\omega \tag{7.12}$$

Dakle, iz spektra zvjezdaste funkcije $F^*(j\omega)$ dobijeni su uzorci kontinualnog signala $f(kT)$.

7.1.8 Teorema o uzorkovanju

Problem rekonstrukcije originalnog (kontinualnog) signala iz uzoraka pretpostavlja da ulaz u sistem predstavljaju uzorci kontinualnog signala, a izlaz iz sistema je kontinualni signal.



Slika 7.6: a) Spektar originalnog kontinualnog signala, b) spektar zvjezdaste funkcije spektralno ograničenog kontinualnog signala bez preklapanja spektara, c) spektar zvjezdaste funkcije spektralno ograničenog kontinualnog signala sa preklapanjem spektara.

Pitanje koje se u ovom slučaju postavlja je koliko često treba uzimati uzorke da bi sadržaj informacije koju nosi originalni kontinualni i uzorkovani signal bio ekvivalentan.

Neka je kontinualni signal $f(t)$ spektralno ograničen tj. neka ima spektar $F(j\omega)$ jednak nuli za $|\omega| > \omega_M$ (slika 7.6.a). Na osnovu relacije (7.7) za Fourierovu transformaciju zvjezdaste funkcije, učestanost uzimanja uzoraka ω_0 treba izabrati tako da nema preklapanja između dva susjedna spektra (slika 7.6.b), tj.

$$\omega_0 - \omega_M \geq \omega_M \quad \Rightarrow \quad \omega_0 \geq 2\omega_M \quad \text{ili} \quad f_0 \geq 2f_M \quad \text{ili} \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_M} = \frac{1}{2f_M} \tag{7.13}$$

Uslov (7.13) se naziva *Nyquistov uslov*. Njime je određeno maksimalno dozvoljeno vrijeme između uzimanja uzoraka ili minimalna frekvencija uzimanja uzoraka. Nejednačina $T \leq \pi/\omega_M$ naziva se *Teorema o uzorkovanju (Nyquistova teorema, Shannonova teorema* ili *teorema Koteljnikova)*. Dakle, ako je $\omega_0 \geq 2\omega_M$, gdje je $\omega_0 = 2\pi/T$, učestanost uzimanja uzoraka, onda se signal $f(t)$ može jednoznačno rekonstruirati iz uzoraka $f(kT)$, gdje je $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Učestanost $2\omega_M$ naziva se Nyquistov opseg diskretizacije (engl. *Nyquist sampling rate*). Učestanost ω_M, koja odgovara polovini Nyquistovog opsega naziva se Nyquistova učestanost.

7.1.9 Izbor učestanosti uzorkovanja

Učestanost uzorkovanja zavisi od svrhe za koju se uzorkovanje obavlja. Svrha uzorkovanja u obradi signala je digitalna obrada signala, a zatim rekonstrukcija originalnog signala iz uzoraka. U obradi signala, učestanost uzorkovanja zavisi i od osobina kontinualnog signala. Praktično, teorema o uzorkovanju može se shvatiti i ovako: ako se signal koji se uzorkuje sporo mijenja (npr. atmosferski pritisak ili temperatura zraka) tada nema potrebe uzorkovati signal malim periodom diskretizacije (npr. 1 sekunda), jer je vremenska konstanta promjene ovakvih signala reda par sati. Međutim, ako se mjeri brzina kretanja vozila, očigledno da će period uzorkovanja od 1 sekunde možda biti i predug. Dakle, ako se signal brzo mijenja uzorke treba uzimati dovoljno brzo, a ako se mijenja sporo tada period diskretizacije može biti i duži. Brzina promjene signala je zapravo vezana za više frekvencije u spektru tog signala - signal koji ima bogat spektar na višim frekvencijama ima i velike brzine promjene. Prema tome, signal se mora uzorkovati barem dva puta brže nego što se mijenja.

U nekim slučajevima uslov $\omega_0 \geq 2\omega_M$ je suviše strog, te predstavlja samo dovoljan ali ne i potreban uslov. Npr. za uskopojasni signal, koji ima nenulti spektar, a koji se često sreće u telekomunikacijama, minimalna učestanost uzorkovanja jednaka je dvostrukoj širini spektra kontinualnog signala, a ne dvostrukoj najvišoj učestanosti u spektru, odnosno: $\omega_0 \geq 2(\omega_2 - \omega_1)$. Kod ovakvog uzorkovanja treba obavezno provjeriti da ne dolazi do preklapanja spektara.

Kako su skoro svi signali koji se koriste u praksi, vremenski ograničeni, tj. imaju konačno trajanje, onda njihov spektar ne može biti frekventno ograničen (što je pokazano u primjeru 6.2). Isto tako, ako je signal frekventno ograničen, onda je tipično vremenski neograničen (primjer 6.3). Međutim, signal može biti istovremeno i vremenski i frekventno neograničen (npr. povorka impulsa perioda T ima za Fourierovu transformaciju povorku impulsa perioda $\omega_0 = 2\pi/T$).

Na slici 7.6.b nacrtan je spektar diskretiziranog signala $F^*(j\omega)$ pod uslovom $\omega_0 \geq 2\omega_M$, koji se sastoji od skaliranih replika spektra $F(j\omega)$, dok je na slici 7.6.c nacrtan spektar zvjezdaste funkcije spektralno ograničenog kontinualnog signala sa preklapanjem spektara, gdje je $\omega_0 < 2\omega_M$.

Primjer 7.1:

Odrediti maksimalni period diskretizacije T koji se može koristiti za diskretizaciju sinusoide frekvencije $50[kHz]$.

Rješenje:
Najviša frekvencija u ovom slučaju je $f_M = 50[kHz]$. Prema relaciji (7.13) je:

$$T \leq 1/\left(2f_M\right) = 10[\mu s]$$

Period diskretizacije mora biti manji od $10[\mu s]$. Minimalna frekvencija diskretizacije je:

$$f_0 = 1/T = 100[kHz].$$

Primjer 7.2:

Diskretni pojačavač koristi period uzorkovanja $T = 25[\mu s]$. Koju najvišu frekvenciju može imati signal koji se procesira tim diskretnim pojačavačem, a da ne dođe do preklapanja spektara.

Rješenje:
Prema relaciji (7.13) najviša frekvencija je: $f_M \leq 1/(2T) = 20[kHz]$.

Primjer 7.3:

Za signal $f(t) = \sin(10\pi t)/(\pi t)$ odrediti uslove koje treba da zadovoljava period diskretizacije T tako da signal $f(t)$ bude jednoznačno predstavljen diskretnim signalom $f_\delta(t)$.

Rješenje:
Koristeći teoremu o uzimanju uzoraka prvo treba odrediti maksimalnu frekvenciju ω_M signala $f(t)$ iz njegove Fourierove transformacije. Kako je:

$$f(t) = \frac{10\sin(10\pi t)}{10\pi t} = 10\,\mathrm{Sa}(10\pi t)$$

njegova Fourierova transformacija je:

$$F(j\omega) = 10 \cdot \frac{\pi}{10\pi} \cdot p\left(\frac{\omega}{20\pi}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 10\pi \\ 0 & |\omega| > 10\pi \end{cases}$$

Vidi se da je $\omega_M = 10\pi$. Prema relaciji (7.13) mora biti zadovoljeno:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_M} = \frac{\pi}{10\pi} = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ s}$$

Period diskretizacije mora zadovoljavati uslov $T \leq 0.1s$.

Primjer 7.4:

Odrediti spektre i minimalnu učestanost uzimanja uzoraka za signale:
a) $f_1(t) = Sa^2(60\pi t)$
b) $f_2(t) = \delta_{T_1}(t) * Sa^2(60\pi t)$ ako je $T_1 = 1/10$
c) $f_3(t) = t^2 Sa^2(60\pi t)$

Rješenje:
a) Na osnovu relacije:

$$Sa^2\left(\frac{t\tau}{4}\right) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{4\pi}{\tau} q\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

dobije se:

$$f_1(t) = Sa^2(60\pi t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{60} q\left(\frac{\omega}{240\pi}\right)$$

Odavde slijedi da je Nyquistova učestanost $\omega_M = 120\pi$, odnosno minimalna učestanost uzimanja uzoraka je $\omega_0 = 240\pi$ (slika 7.7.a).

b) Za signal $f_2(t) = \delta_{T_1}(t) * Sa^2(60\pi t)$ sa periodom povorke impulsa $T_1 = 1/10$, Fourierova transformacija je:

$$f_2(t) = \delta_{T_1}(t) * Sa^2(60\pi t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\omega_1}{60} q\left(\frac{\omega}{240\pi}\right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_l\right)$$

Kako je period povorke impulsa $T_1 = 1/10$, to je: $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1/10)} = 20\pi$. Signal:

$$\frac{\omega_1}{60} q\left(\frac{\omega}{240\pi}\right) = \frac{\pi}{3} q\left(\frac{\omega}{240\pi}\right)$$

je obvojnica povorke impulsa (slika 7.7.b):

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_1\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 20k\pi)$$

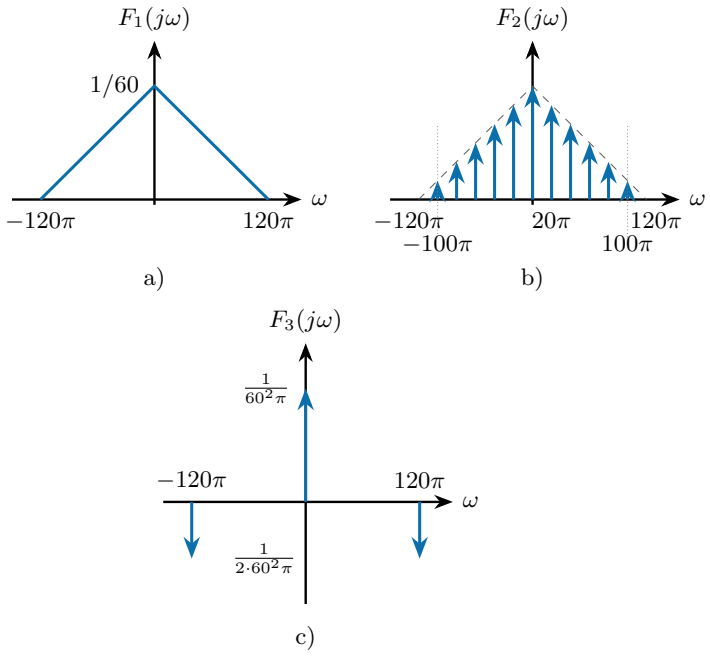
Sa slike 7.7.b slijedi da je: $\omega_M = 120\pi$, odnosno minimalna učestanost uzimanja uzoraka je $\omega_0 = 240\pi$. Kako je signal diskretan, do preklapanja spektara u Fourierovoj transformaciji zvjezdaste funkcije neće doći i ako se granična učestanost umanji za ω_1, tako da je u ovom slučaju za ω_M moguće uzeti $\omega_M = 100\pi$, a za minimalnu učestanost uzimanja uzoraka $\omega_0 = 200\pi$.

c) Signal $f_3(t)$ se može napisati na slijedeći način:

$$f_3(t) = t^2 \,\mathrm{Sa}^2(60\pi t) = t^2 \frac{\sin^2(60\pi t)}{(60\pi t)^2} = \frac{1}{(60\pi)^2} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 120\pi t)$$

Fourierova transformacija signala $f_3(t) je$:

$$F_3(j\omega) = \frac{1}{2 \cdot (60\pi)^2}\{2\pi\delta(\omega) - \pi[\delta(\omega + 120\pi) + \delta(\omega - 120\pi)]\} =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 60^2 \pi}[2\delta(\omega) - \delta(\omega + 120\pi) - \delta(\omega - 120\pi)]$$



Slika 7.7: Fourierove transformacije signala (primjer 7.4).

Fourierova transformacija signala $f_3(t)$ prikazana je na slici 7.7.c i sastoji se od tri delta impulsa na učestanostima $\omega = 0$, $\omega = -120\pi$ i $\omega = 120\pi$, tako da je $\omega_M = 120\pi$, dok je minimalna učestanost uzimanja uzoraka $\omega_0 = 240\pi$.

7.1.10 Rekonstrukcija kontinualnog signala iz uzoraka

Kako zvjezdasta funkcija, dobijena množenjem kontinualnog signala povorkom impulsa, nosi samo informaciju o vrijednostima funkcije u trenucima $t = kT$, dok se ostali podaci gube, pitanje je da li je ovaj gubitak informacije nenadoknadiv, tj. da li se mogu interpolirati vrijednosti funkcije u ostalim trenucima na osnovu vrijednosti u trenucima $t = kT$. Relacija (7.13) daje odgovor na to pitanje. Ako se ta relacija poštuje, gubitak informacije nije nenadoknadiv.

Najjednostavnija interpolacija (rekonstrukcija) originalnog signala iz uzoraka je linearna interpolacija, kod koje se pravim linijama spajaju vrhovi uzoraka. Komplikovanije interpolacije zahtijevaju spajanje vrhova uzoraka polinomima višeg reda ili drugim matematičkim funkcijama.

Rekonstrukcija originalnog signala iz uzoraka, koja koristi impulsni odziv niskopropusnog filtra, naziva se frekventno ograničena interpolacija. Da bi se došlo do relacije za rekonstrukciju originalnog signala iz uzoraka, koristeći frekventno ograničenu interpola-

ciju, polazi se od relacije za inverznu Fourierovu transformaciju:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{7.14}$$

Kako je signal spektralno ograničen, kao granice se mogu uzeti $-\omega_c$ i ω_c, pri čemu je $(\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_0 - \omega_M)$, što je ekvivalentno propuštanju signala kroz (idealni!) niskopropusni filter sa graničnim učestanostima $\pm\omega_c$ (slika 7.6.a), i frekventnom funkcijom:

$$H(j\omega) = p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \tag{7.15}$$

tako da je:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \tag{7.16}$$

Kako je $\omega_c \leq \omega_0 - \omega_M$, onda se $F(j\omega)$ u podintegralnom izrazu, u intervalu $[-\omega_c, +\omega_c]$, na osnovu relacije (7.7) može zamijeniti sa $TF^*(j\omega)$, pa je:

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} F^*(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_0 - \omega_M) \tag{7.17}$$

Iz ove relacije slijedi zaključak da se iz spektra zvjezdaste funkcije može rekonstruirati spektralno ograničeni signal ako je pri uzimanju uzoraka poštovan Nyquistov uslov:

$$\omega_0 - \omega_M \geq \omega_M \quad \text{ili} \quad \omega_M \leq \frac{\omega_0}{2} \quad \text{ili} \quad T \leq \frac{\pi}{\omega_M} = \frac{1}{2f_M}$$

$F^*(j\omega)$ se zamjenjuje izrazom za spektar po definiciji iz relacije (7.9):

$$f(t) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) e^{-jk\omega T} \right] \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{T\omega_c}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\, \mathrm{Sa}\, \omega_c(t - kT) \tag{7.18}$$

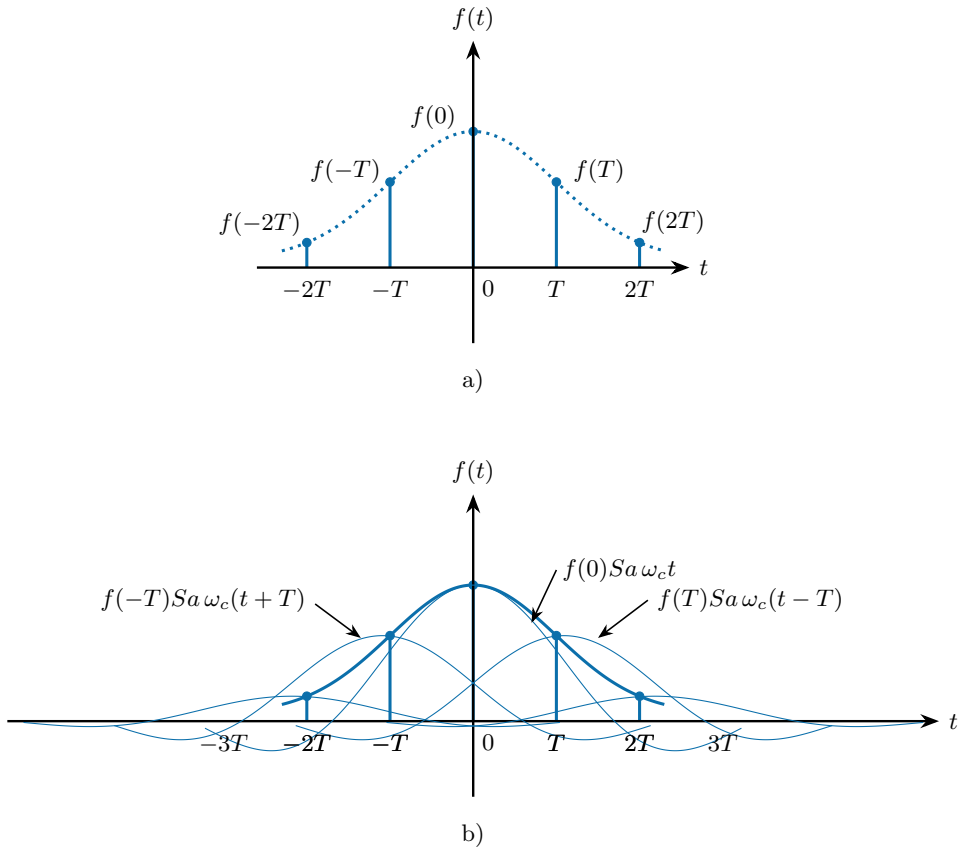
uz uslov $\omega_M \leq \omega_c \leq \omega_0 - \omega_M$. U specijalnom slučaju, kada se spektri dodiruju, ali se ne preklapaju vrijedi:

$$\omega_M = \omega_0 - \omega_M, \quad \omega_c = \omega_M = \omega_0/2$$

tako da je:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) \cdot Sa\omega_M(t - kT) \tag{7.19}$$

Izraz (7.19) se naziva *red Kotelnikova*. Uzorci funkcije $f(t)$ prikazani su na slici 7.8.a. Sa slike 7.8.b se vidi kako pojedini članovi reda Kotelnikova formiraju funkciju $f(t)$. Dakle, funkcija $f(t)$, čiji je spektar ograničen učestanostima $\pm\omega_M$, jednoznačno je određena beskonačnom sumom članova, pri čemu je svaki od njih obrazovan kao proizvod vrijednosti funkcije $f(t)$ u trenutku diskretizacije $t = kT$ i težinske funkcije oblika $Sa\omega_M(t-kT)$, centrirane u odgovarajućem trenutku diskretizacije. Funkcija $Sa\omega_M(t - kT)$ ima vrijednost jednaku jedinici u trenutku $t = 0$, a prolazi kroz nulu za vrijednosti $\omega_M(t-kT) = k\pi$, gdje je k ma koji cijeli broj izuzev nule. Vrijednost funkcije u nekom trenutku diskretizacije $t = kT$ nezavisna je od bilo koje njene druge vrijednosti u ostalim trenucima.



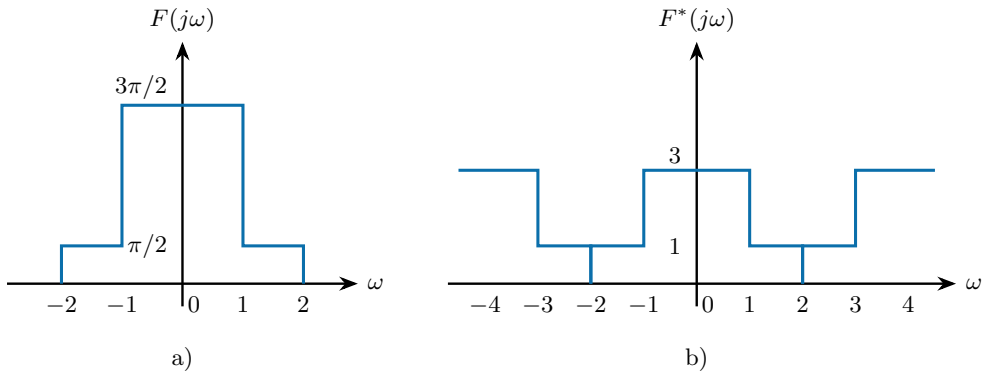
Slika 7.8: a) Uzorci signala, b) rekonstrukcija signala redom Kotelnikova.

Primjer 7.5:

a) Za signal $f(t) = Sa(t) + Sa(2t)$ odrediti spektar i minimalnu učestanost uzimanja uzoraka.
b) Napisati izraz za zvjezdastu funkciju za izračunatu minimalnu učestanost i nacrtati spektar zvjezdaste funkcije.
c) Napisati red Kotelnikova za signal $f(t)$.

Rješenje:
a) Kako je Fourierova transformacija signala $\mathrm{Sa}(at/2)$:

$$Sa\frac{at}{2} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{a} p\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



Slika 7.9: Spektar originalnog signala i spektar zvjezdaste funkcije (primjer 7.5).

to je:

$$Sa(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi p\left(\frac{\omega}{2}\right) \implies \quad Sa(2t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{2} p\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

tako da je Fourierova transformacija signala $f(t) = Sa(t) + Sa(2t)$:

$$f(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \pi p\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\pi}{2} p\left(\frac{\omega}{4}\right)$$

Učestanost uzimanja uzoraka $\omega_0 = 2\pi/T$ određuje se iz Nyquistovog uslova $\omega_0 \geq 2\omega_M$. Kako je za signal $f(t)$ maksimalna učestanost u spektru (slika 7.9.a) $\omega_M = 2$[rad/s] to je minimalna učestanost uzimanja uzoraka $\omega_0 = 4$[rad/s], odnosno period povorke impulsa kojom je uzorkovan signal je: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{\pi}{2}[s]$.

b) Zvjezdasta funkcija i njen spektar (slika 7.9.b) su:

$$f^*(t) = f(t) \cdot \delta_T(t) = f(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega - jk\omega_0\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - j4k)$$

c) Red Kotelnikova za signal $f(t)$ je:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT) Sa\omega_M(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[Sa\left(\frac{k\pi}{2}\right) + Sa(k\pi)\right] Sa\left(2\left(t - \frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

7.1.11 Energija frekventno ograničenog signala

Koristeći red Kotelnikova, pod uslovom $\omega_c = \omega_M = \omega_0/2$, može se odrediti energija realnog, frekventno ograničenog signala iz njegovih uzoraka:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kT)\cdot \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-kT)\right]\cdot\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(mT)\cdot \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-mT)\right]dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(kT)f(mT)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-kT)\cdot \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-mT)dt \end{aligned} \tag{7.20}$$

Integral proizvoda dvije Sa funkcije dobije se primjenom Parsevalove teoreme:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-kT)\cdot \mathrm{Sa}\,\omega_M(t-mT)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\omega_M}\cdot p\left(\frac{\omega}{2\omega_M}\right)e^{-jk\omega T}\frac{\pi}{\omega_M}\cdot p\left(\frac{\omega}{2\omega_M}\right)e^{jm\omega T}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi^2}{\omega_M^2}\int_{-\omega_M}^{+\omega_M} e^{j(m-k)\omega T}d\omega \\ &= \frac{\pi}{2\omega_M^2}\cdot\begin{cases}0, & k\neq m\\ 2\omega_M, & k=m\end{cases} \end{aligned}$$

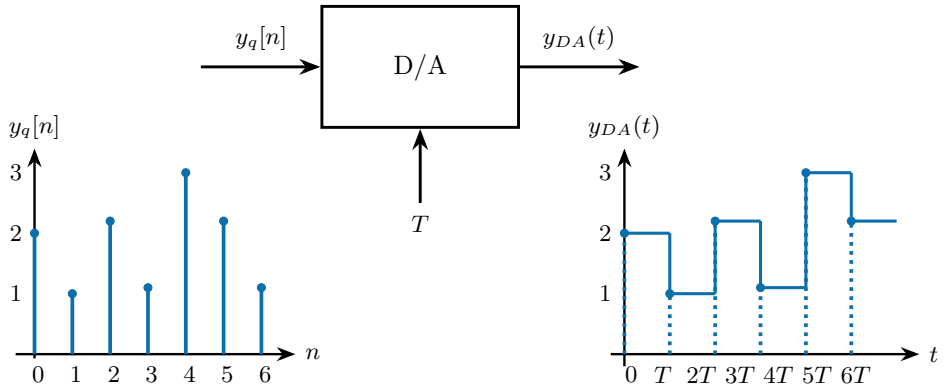
Iz relacije (7.20) dobije se energija frekventno ograničenog signala kao:

$$E = \frac{\pi}{\omega_M}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f^2(kT) \tag{7.21}$$

7.1.12 Rekonstrukcija kolom zadrške nultog reda

Iz izraza (7.18), odnosno (7.19) se vidi da je samo teoretski moguća rekonstrukcija originalnog signala iz njegovih uzoraka (idealna digitalno-analogna konverzija, D/A), pod uslovom da je originalni signal bio frekventno ograničen i da je poštovan Nyquistov uslov. U praksi se ovaj proces aproksimira kaskadnom vezom D/A konvertora i niskopropusnog filtera. Niskopropusni filter uklanja visokofrekventne komponente koje su se pojavile u procesu uzorkovanja.

Realni D/A konvertor uzima kvantizirane binarne signale $y_q[n]$, (slika 7.10.) i na izlazu daje analogni signal $y_{DA}(t)$. Ako se kao interpolirajuća funkcija koristi kolo zadrške nultog reda (ZOH), onda je izlaz iz D/A konvertora konstantan u toku trajanja jednog intervala uzorkovanja T, sve dok se ne pojavi novi uzorak, kao što je pokazano na slici 7.10. Međutim, za razliku od A/D konvertora, gde je zbog malih vrijednosti τ u odnosu na T, uticaj inerpoliraluće funkcije bio mali, kod D/A konvertora, zbog uslova $\tau = T$, uticaj interpolirajuće funkcije je značajan, te se obično ublažava korištenjem kaskadno vezanih ekvilizacijskih filtera.



Slika 7.10: Konverzija diskretnog signala u analogni signal korištenjem kola zadrške.

7.2 Diskretizacija spektra

Kako je ranije pokazano, da bi se iz uzoraka kontinualnog signala mogao rekonstruirati originalni vremenski signal, spektar signala $f(t)$ mora biti ograničen, tj. $f(t)$ mora imati spektar $F(j\omega)$ koji je jednak nuli za $|\omega| > \omega_M$. Učestanost uzimanja uzoraka ω_0 bira se tako da nema preklapanja između dva susjedna spektra tj. mora biti zadovoljena nejednakost $\omega_0 \geq 2\omega_M$.

Teorema o uzimanju uzoraka u vremenskom domenu ima svoj ekvivalent u frekventnom domenu kao *teorema o diskretizaciji spektra* - ako je kontinualni signal $f(t)$ vremenski ograničen na τ sekundi, onda se spektar $F(j\omega)$ signala $f(t)$ može rekonstruirati iz uzoraka spektra.

7.2.1 Izvedena periodička funkcija

Da bi se odredili uslovi pod kojima je moguće rekonstruirati spektar $F(j\omega)$ signala $f(t)$ iz uzoraka spektra, definira se periodička funkcija izvedena od aperiodičke funkcije $f(t)$, koja se naziva izvedena periodička funkcija i označava sa $f_T(t)$. Izvedena periodička funkcija (slika 7.11.) definira se na slijedeći način:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t - kT) \tag{7.22}$$

gdje je T period izvedene periodičke funkcije. Period T izvedene periodičke funkcije na slici 7.11.b izabran je tako da u vremenskom domenu dolazi do preklapanja signala (vremenski aliasing). U relaciji (7.22) kašnjenje funkcije $f(t)$ može se predstaviti konvolucijom sa zakašnjelom delta funkcijom:

$$f(t - kT) = f(t) * \delta(t - kT) \tag{7.23}$$

Tada se može uvesti alternativni izraz za izvedenu periodičku funkciju:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t - kT) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = f(t) * \delta_T(t) \tag{7.24}$$

Fourierova transformacija izvedene periodičke funkcije ima dva oblika. Prvi se dobije primjenom teoreme o kašnjenju na izraz (7.22), tako da je:

$$F_T(j\omega) = F(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-jk\omega T} \tag{7.25}$$

Drugi oblik Fourierove transformacije izvedene periodičke funkcije dobije se iz relacije (7.23), uz primjenu osobine konvolucije originala.

$$\begin{aligned} F_T(j\omega) &= F(j\omega) \cdot \delta_T(j\omega) \\ &= F(j\omega) \cdot \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= \omega_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F(jk\omega_0)\, \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned} \tag{7.26}$$

Na osnovu izraza (7.26) može se nacrtati spektar izvedene periodičke funkcije (slika 7.11.b i c. Spektar se sastoji od pomjerenih delta funkcija koje se nalaze na učestanostima $k\omega_0$ i imaju površine $\omega_0 \cdot F(jk\omega_0)$. Spektar je u općem slučaju kompleksna funkcija, ali je zbog jednostavnosti nacrtan samo amplitudni spektar. Dakle, spektar originalne funkcije $F(j\omega)$ pomnožen sa ω_0 predstavlja anvelopu delta funkcija u spektru $F_T(j\omega)$.

Ukoliko je aperiodički signal $f(t)$ vremenski ograničen na τ sekundi (slika 7.11.a), onda se njegov spektar (slika 7.11.a) određuje na osnovu relacije za direktnu Fourierovu transformaciju:

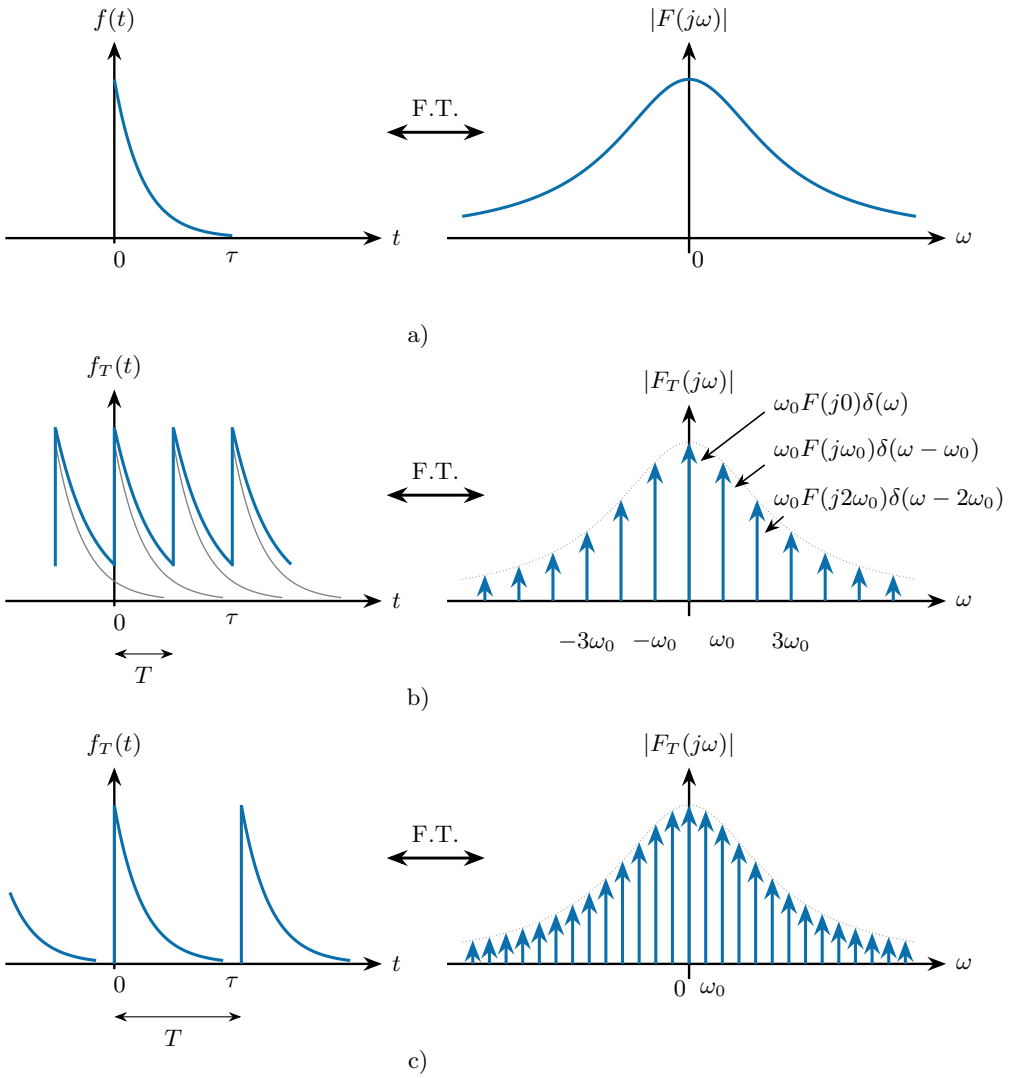
$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\tau} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{7.27}$$

Neka je period izvedene periodičke funkcije takav da je $T > \tau$, kao što je pokazano na slici 7.11.c. Uslov:

$$T > \tau \text{ ili } \quad \omega_0 < 2\pi/\tau \tag{7.28}$$

gdje je T period izvedene periodičke funkcije, a τ maksimalno vrijeme ("trajanje") koje se pojavljuje u vremenski ograničenom aperiodičkom signalu, je teorema o diskretizaciji spektra. Sa slike 7.11.c vidi se da nema preklapanja signala u vremenskom domenu, što indirektno znači da se iz uzoraka spektra izvedene periodičke funkcije može rekonstruirati spektar aperiodičkog signala $f(t)$.

Iz analize zvjezdaste funkcije, izvedene periodičke funkcije i njihovih spektara, zaključuje se da je za obradu kontinualnog signala na računaru, neophodna njegova diskretizacija. Prema teoremi o uzorkovanju signal mora biti frekventno ograničen. S druge strane, da bi se signal mogao smjestiti u memoriju računara, on mora imati konačan broj uzoraka, odnosno mora biti ograničen u vremenu. Međutim, nije moguće da signal bude istovremeno ograničen i po vremenu i po frekvenciji. Odavde slijedi zaključak da će postupak realne diskretizacije signala uvijek biti samo aproksimacija idealnog postupka.



Slika 7.11: a) Aperiodički signal i odgovarajući spektar, b) izvedena periodička funkcija za $T < \tau$ i odgovarajući spektar, c) izvedena periodička funkcija za $T > \tau$ i odgovarajući spektar.

7.2.2 Izvedena periodička funkcija u Pythonu

Neka je originalna funkcija oblika $f(t) = e^{-|2t|}$, a njena izvedena periodička funkcija neka ima period T. Izvedena periodička funkcija definirana je relacijom (7.22), što predstavlja superpoziciju beskonačno mnogo pomjerenih kopija originalne funkcije $f(t)$. U programu se uzima konačan broj kopija N_{per} s obje strane.

Važno je naglasiti da originalna funkcija $f(t)$ može biti definirana na intervalu koji je duži od perioda T – u tom slučaju dolazi do međusobnog preklapanja pomjerenih kopija, i vrijednost $f_T(t)$ u tačkama preklapanja jednaka je zbiru doprinosa svih kopija. Ovo je u potpunoj saglasnosti sa relacijom (7.22). Upravo zbog toga se u okviru programa periodičko ponavljanje implementira kao eksplicitna suma pomjerenih kopija, a ne prostim lijepljenjem jednog perioda.

Programski kod 7.3

```
ts   = 0.1   # korak diskretizacije
T    = 2.0   # period izvedene periodicke funkcije
Nper = 4     # broj perioda s obje strane

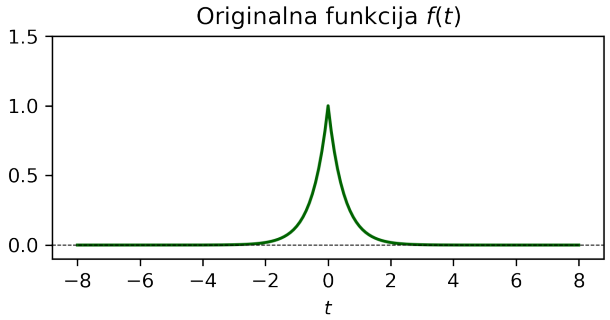
# cijela vremenska baza
t = np.arange(-Nper * T, Nper * T + ts, ts)

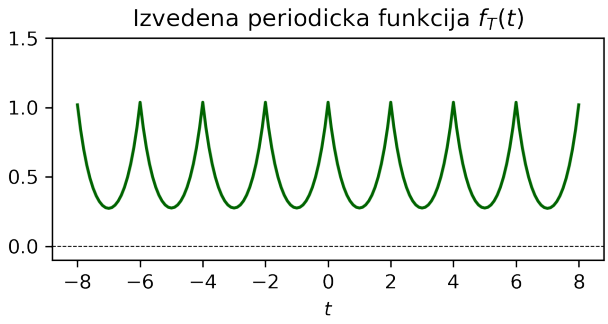
# originalna funkcija f(t) definirana na cijelom intervalu
f = np.exp(-np.abs(2 * t))

# periodicko ponavljanje: fT = suma f(t - kT)
fT = np.zeros(len(t))
for k in range(-Nper, Nper + 1):
    fT += np.exp(-np.abs(2 * (t - k * T)))

sis.dijagram(t, f,
             ylim=(-0.1, 1.5),
             naslov='Originalna funkcija $f(t)$')


sis.dijagram(t, fT,
             ylim=(-0.1, 1.5),
             naslov='Izvedena periodicka funkcija $f_T(t)$')
```





Mijenjanjem parametara `T` i `Nper` dobija se izvedena periodička funkcija sa željenim periodom i brojem prikazanih perioda. Ako je period T manji od trajanja originalne funkcije $f(t)$, na dijagramu će biti vidljivo preklapanje kopija.

7.2.3 Poissonova sumaciona formula

Između koeficijenata C_k Fourierovog reda izvedene periodičke funkcije i uzoraka spektra izvedene periodičke funkcije, može se naći veza koja je data *Poissonovom sumacionom formulom*. Izvedena periodička funkcija ima Fourierov red:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_b t} \tag{7.29}$$

Koeficijenti C_k dobijaju se iz:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_0^{+T} f_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{7.30}$$

Ova relacija nije pogodna za računanje koeficijenata C_k, jer je potrebno poznavati analitički oblik funkcije $f_T(t)$. Kao što se vidi sa slike izvedene periodičke funkcije (slika 7.11.b), u općem slučaju se pomaknute funkcije $f(t-kT)$, koje formiraju $f_T(t)$, preklapaju, pa je potrebno izvršiti prethodno određivanje $f_T(t)$ u intervalu $[0, T]$ sumiranjem beskonačno mnogo pomaknutih funkcija. Međutim, postoji jedan mnogo jednostavniji izraz za određivanje koeficijenata C_k. Za njegovo izvođenje treba iskoristiti vezu između koeficijenata Fourierovog reda C_k periodičke funkcije i njenog spektra. Periodička funkcija $f_T(t)$ ima Fourierov red dat relacijom (7.29), a Fourierova transformacija tog izraza je:

$$F\left\{f_T(t)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi C_k \delta\left(\omega - k\omega_0\right) \tag{7.31}$$

Spektar se sastoji od delta funkcija na učestanostima $k\omega_0$ sa površinama $2\pi C_k$. Posmatranjem spektra izvedene periodičke funkcije datog izrazom (7.26) uočava se da je površina delta funkcija jednaka $\omega_0 F\left(jk\omega_0\right)$. Poređenjem izraza (7.26) i (7.31) zaključuje se da je:

$$C_k = \frac{\omega_0}{2\pi} F\left(jk\omega_0\right) = \frac{F\left(jk\omega_0\right)}{T} \tag{7.32}$$

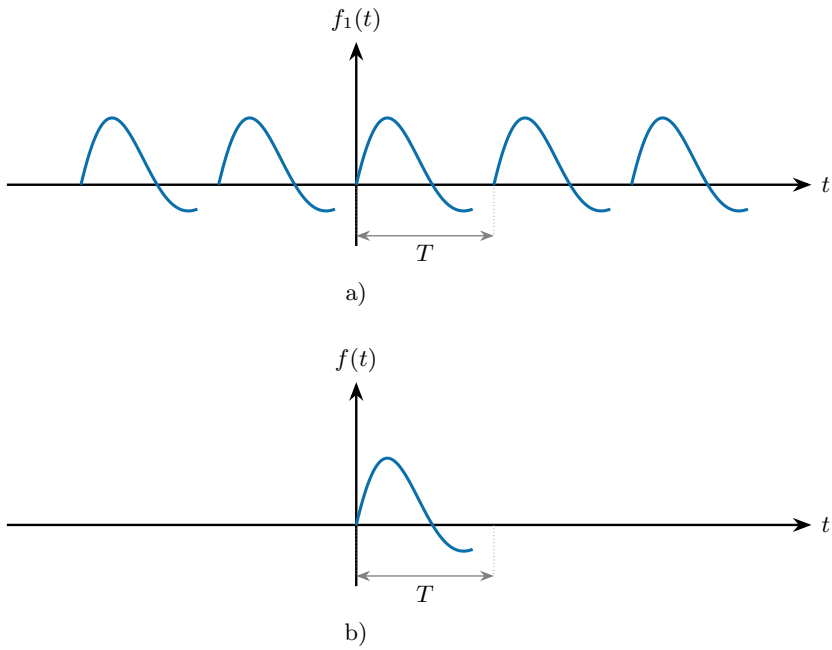
gdje je $T = 2\pi/\omega_0$ period periodičke funkcije, a $F(jk\omega_0)$ Fourierova transformacija aperiodičke funkcije $f(t)$ od koje je izvedena periodička funkcija $f_T(t)$, na učestanostima $k\omega_0$. Određivanje koeficijenata C_k iz izraza (7.32) je mnogo pogodnije nego iz izvornog izraza (7.30) jer ne treba poznavati analitički oblik funkcije $f_T(t)$, nego samo spektar originalne aperiodičke funkcije $f(t)$. Ako se dobijeni izraz (7.32) za C_k uvrsti u izraz za Fourierov red, dobija se Poissonova sumaciona formula.

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{F(jk\omega_0)}{T} \cdot e^{jk\omega_0 t} \tag{7.33}$$

Poissonova sumaciona formula može se koristiti za određivanje koeficijenata Fourierovog reda bilo koje periodičke funkcije, tako što se odredi Fourierova transformacija aperiodičke funkcije koja odgovara osnovnom periodu periodičke funkcije.

Primjer 7.6:

Neka je data periodička funkcija $f_1(t)$ (slika 7.12.a). Potrebno je odrediti koeficijente C_k periodičke funkcije $f_1(t)$ koristeći relaciju (7.32) i odrediti Fourierov red te funkcije.



Slika 7.12: Periodička funkcija $f_l(t)$ i aperiodička funkcija $f(t)$ (primjer 7.6).

Rješenje:
Funkcija $f_1(t)$ se može shvatiti kao izvedena periodička funkcija funkcije $f(t)$ prikazane na slici 7.12.b. Iz toga slijedi da funkcija $f_1(t)$ ima koeficijente Fourierovog reda:

$$C_k = \frac{\omega_0}{2\pi} F\left(jk\omega_0\right) = \frac{F\left(jk\omega_0\right)}{T}$$

gdje je $F(j\omega)$ Fourierova transformacija aperiodičke funkcije $f(t)$, tako da je Fourierov red funkcije $f_1(t)$:

$$f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{F\left(jk\omega_0\right)}{T} \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Primjer 7.7:

a) Za signal $f(t) = e^{-2|t|}$ naći izraz za spektar izvedene periodičke funkcije, i nacrtati spektar ako je period izvedene periodičke funkcije $T = 0.1[s]$.
b) Kako će se promjeniti spektar ako se period T udvostruči?
c) Izračunati vrijedost izvedene periodičke funkcije s periodom $T = 0.1[s]$ u trenutku $t = 0[s]$ i $t = 0.05[s]$.

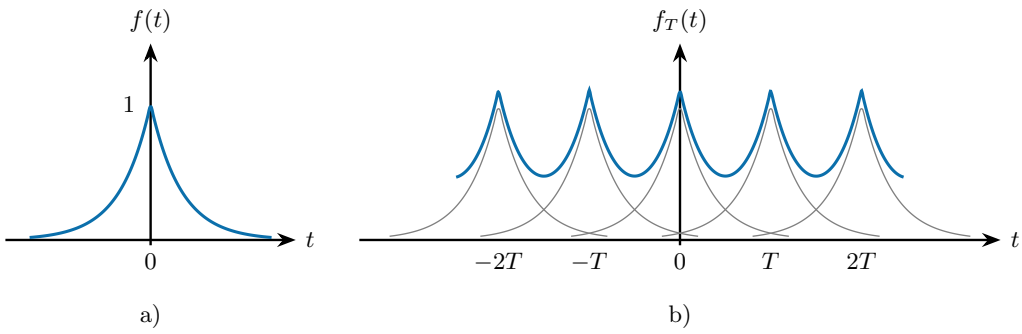
Rješenje:
a) Izvedena periodička funkcija $f_T(t)$, signala $f(t) = e^{-2|t|}$ (slika 7.13.a) prikazana je na slici 7.13.b. Fourierova transformacija signala $f(t) = e^{-2|t|}$ je:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt = \\ &= \left. \frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega} \right|_{-\infty}^{0} + \left. \frac{e^{-(2+j\omega)t}}{2+j\omega} \right|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} = \frac{4}{4+\omega^2} \end{aligned}$$

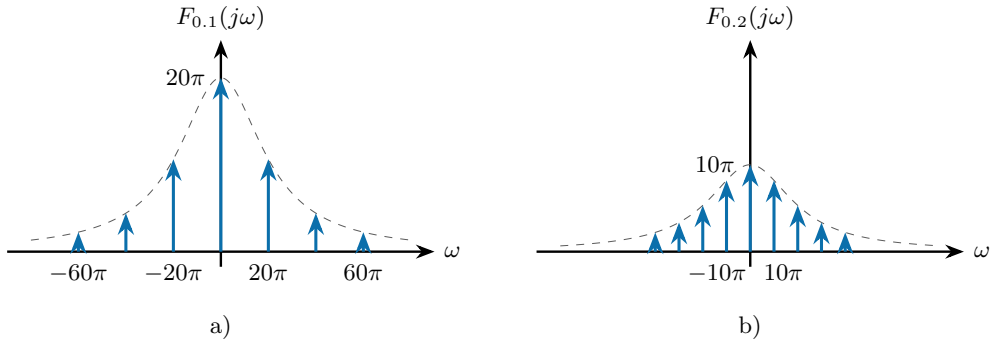
Izvedena periodička funkcija ima dva oblika:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = f(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{k}{10}\right)$$

Njena Fourierova transformacija, odnosno spektar je proizvod Fourierovih transformacija učesnica u konvoluciji.



Slika 7.13: a) Aperiodički signal, b) izvedena periodička funkcija (primjer 7.7).



Slika 7.14: Spektar izvedene periodičke funkcije za period: a) $T = 0.1[s]$, b) $T = 0.2[s]$ (primjer 7.7).

Prema tome, slijedi:

$$F_T(j\omega) = F(j\omega) \cdot \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) = 4\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta\left(\omega - k\omega_0\right)}{4 + \left(k\omega_0\right)^2}$$

$$T = 0.1[s] \implies \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi$$

odakle se dobiva:

$$F_{0.1}(j\omega) = \frac{4}{4+\omega^2} \cdot 20\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 20k\pi) = 80\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\delta(\omega - 20k\pi)}{4 + (20k\pi)^2}$$

Spektar izvedene perodičke funkcije je diskretan tj. predstavlja $\delta(\omega)$ funkcije na međusobnim rastojanjima od 20π, čija se površina mijenja po zakonu obvojnice

$80\pi/\left(4+\omega^2\right)$.

b) Ukoliko se period izvedene periodičke funkcije dva puta poveća, odnosno dobije vrijednost $T=0.2[s]$, učestanost će se dva puta smanjiti (slika 7.14.), tako da je:

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.2}=10\pi$$

$\delta(\omega)$ funkcije će biti na međusobnim rastojanjiima od 10π, a površine će se mijenjati po zakonu obvojnice $40\pi/\left(4+\omega^2\right)$:

$$F_{0.2}(j\omega)=\frac{4}{4+\omega^2}\cdot 10\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-10k\pi)=40\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(\omega-10k\pi)}{4+(10k\pi)^2}$$

c) Ako je period izvedene periodičke funkcije $T=0.1[s]$, to je vrijednost te funkcije u trenutku $t=0[s]$:

$$f_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-2|t-kT|}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-2\left|t-\frac{k}{10}\right|}$$

$$f_T(0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(-kT)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-2|-kT|}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{5}|-k|}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-|-0.2k|}$$

$$|-0.2k|=\begin{cases}-0.2k, & k<0\\ 0.2k, & k>0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ f_T(0)=\sum_{k=-\infty}^{-1}e^{\frac{k}{5}}+\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\frac{k}{5}}=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-\frac{k}{5}}+\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-\frac{k}{5}}$$

$$=\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{5}}}-1+\frac{1}{1-e^{-\frac{1}{5}}}=\frac{1+e^{-\frac{1}{5}}}{1-e^{-\frac{1}{5}}}=\frac{e^{0.2}+1}{e^{0.2}-1}\cong 10.03$$

Za isti period $T=0.1[s]$ vrijednost izvedene periodičke funkcije u trenutku $t=0.05[s]$ je:

$$f_T(0.05)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{-2|0.05-0.1k|}$$

$$=\left|\ |0.05-0.1k|=\begin{cases}0.05-0.1k, & k<\dfrac{1}{2}\\ -(0.05-0.1k), & k>\dfrac{1}{2}\end{cases}\ \right|$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{0}e^{-2(0.05-0.1k)}+\sum_{k=1}^{+\infty}e^{2(0.05-0.1k)}$$

$$=e^{-0.1}\sum_{k=-\infty}^{0}e^{0.2k}+e^{0.1}\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-0.2k}$$

$$
\begin{aligned}
f_T(0.05) &= e^{-0.1}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-0.2k} + e^{0.1}\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-0.2k} \\
&= e^{-0.1}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-0.2k} + e^{0.1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-0.2k} - 1\right) \\
&= \left(e^{-0.1} + e^{0.1}\right)\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-0.2k} - e^{0.1} \qquad \left[\,|q| = \left|e^{-0.2}\right| < 1\,\right] \\
&= 2\,\mathrm{ch}(0.1)\frac{1}{1-e^{-0.2}} - e^{0.1} = \frac{2\,\mathrm{ch}(0.1)\,e^{0.2}}{e^{0.2}-1} - e^{0.1}
\end{aligned}
$$

Primjer 7.8:

a) Koristeći Fourierovu transformaciju izvedene periodičke funkcije odrediti koeficijente razvoja u Fourierov red signala:

$$f_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+\cos 2\pi t)p(t-2k)$$

b) Izračunati koeficijenate C_0 i C_1 Fourierovog reda datog signala.

Rješenje:
a) Kako je signal $f_1(t)$ periodički (slika 7.15.), na osnovu Poissonove sumacione formule koeficijenti razvoja u Fourierov red signala su:

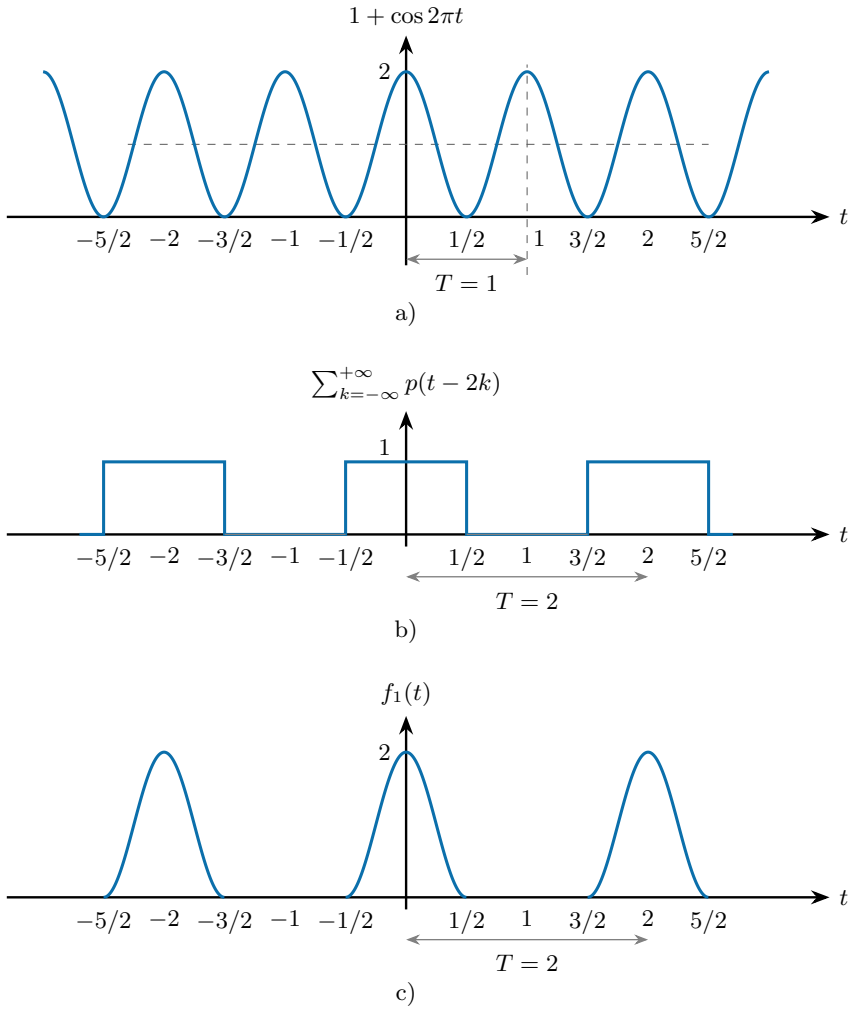
$$C_k = \frac{F\left(jk\omega_0\right)}{T}$$

gdje je $F(j\omega)$ Fourierova transformacija signala $f(t) = (1+\cos 2\pi t)p(t)$. Fourierova transformacija tog proizvoda je:

$$
\begin{aligned}
f(t) = (1+\cos 2\pi t)p(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}F\{1+\cos 2\pi t\} * F\{p(t)\} = F(j\omega) \\
f(t) &\overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi}\{2\pi\delta(\omega) + \pi[\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi)]\} * Sa\frac{\omega}{2} \\
&= Sa\frac{\omega}{2} + \frac{1}{2}Sa\frac{\omega+2\pi}{2} + \frac{1}{2}Sa\frac{\omega-2\pi}{2} = F(j\omega)
\end{aligned}
$$

Učestanost ω_0 se određuje sa slike 7.15. odakle se vidi da je period funkcije $f_l(t)$ jednak $T = 2$, tako da je $\omega_0 = 2\pi/T = \pi$.

$$
\begin{aligned}
F\left(jk\omega_0\right) &= \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\frac{k\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}+\pi\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}+\pi\right)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(\frac{k\pi}{2}-\pi\right)}{\left(\frac{k\pi}{2}-\pi\right)} = \\
&= \left(\frac{2}{k\pi} - \frac{1}{k\pi+2\pi} - \frac{1}{k\pi-2\pi}\right)\cdot\sin\frac{k\pi}{2} = \frac{8}{k\pi}\cdot\frac{1}{4-k^2}\cdot\sin\frac{k\pi}{2}
\end{aligned}
$$



Slika 7.15: Formiranje signala iz primjera 7.8.

Kako je signal $f_1(t)$ realna i parna funkcija, koeficijenti Fourierovog reda su realni brojevi:

$$C_k = \frac{F\left(jk\omega_0\right)}{T} = \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{4 - k^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{2}, \quad k \neq 0 \tag{7.34}$$

tako da je Fourierova transformacija signala $f_1(t)$:

$$F_1(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot \frac{4}{k\pi} \cdot \frac{1}{4-k^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{2} \cdot \delta(\omega - k\omega_0) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{8}{k} \cdot \frac{1}{4-k^2} \cdot \sin\frac{k\pi}{2} \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

b) Za $k = 0$, koeficijent C_0 se izračunava iz definicione relacije:

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos 2\pi t)p(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}(1+\cos 2\pi t)dt = \frac{1}{2}$$

Koeficijent C_1 se može izračunati iz izraza (7.34): $C_1 = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3\pi}$.

8. Diskretna Fourierova transformacija - DFT

8.1 Uvod

Numeričko računanje Fourierove transformacije kontinualnih signala pomoću računara zahtijeva konačan broj uzoraka, odnosno diskretnih podataka (konačnu sekvencu). Da bi se iz Fourierove transformacije $F(j\omega)$ kontinualnog signala $f(t)$ date izrazom:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8.1}$$

numerički izračunala Fourierova transformacija, potrebni su uzorci $f(t)$ u trenucima $t = kT_1$. Također, računar može izračunati $F(j\omega)$ samo u diskretnim vrijednostima učestanosti $\omega = m\omega_0$. Zbog toga treba naći vezu između uzoraka $f(t)$ i uzoraka $F(j\omega)$, odnosno koristiti diskretizaciju originalnog signala i diskretizaciju spektra. Za ovo su potrebne dvije funkcije izvedene od funkcije $f(t)$:

1. zvjezdasta funkcija $f^*(t)$ i njen spektar, i
2. izvedena periodička funkcija $f_T(t)$ i njen spektar.

Dakle, diskretizacijom Fourierove transformacije dobija se diskretna Fourierova transformacija - DFT (engl. *Discrete Fourier Transform*). DFT je neophodan alat u spektralnoj analizi signala. Značaj diskretne Fourierove transformacije u digitalnoj obradi signala potiče od toga što postoje veoma efikasni algoritmi za izračunavanje diskretne Fourierove transformacije. Da bi se do njih došlo, od posebne važnosti pri analizi i sintezi vremenski invarijantnih sistema je poznavanje uticaja promjena u vremenskom domenu na promjene u frekventnom domenu i obrnuto.

8.1.1 Izbor intervala uzorkovanja funkcije i njenog spektra

Neka je interval uzimanja uzoraka zvjezdaste funkcije T_1, čemu odgovara učestanost $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Interval T_1 treba izabrati tako da zadovoljava Nyquistov uslov $T_1 \leq \pi/\omega_M$, gdje je ω_M maksimalna frekvencija u spektru $F(j\omega)$. Neka izvedena periodička funkcija ima period T_0, čemu odgovara učestanost $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$, gdje je ω_0 razmak između uzoraka spektra izvedene periodičke funkcije $F_{T_0}(j\omega)$. Period T_0 treba izabrati tako da zadovoljava teoremu o diskretizaciji spektra, odnosno $T_0 > \tau$, gdje je τ maksimalno

vrijeme koje se pojavljuje u vremenski ograničenom aperiodičkom signalu. (Uslovi $T_1 \leq \pi/\omega_M$ i $T_0 > \tau$ su na određeni način u koliziji, što će biti razmatrano u primjeru 8.2).

Ako je količnik T_0 i T_1 cijeli broj N, odnosno:

$$\frac{T_0}{T_1} = N \equiv \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = N \tag{8.2}$$

onda se uzorci spektra zvjezdaste funkcije $F^*(j\omega)$ mogu izraziti pomoću uzoraka izvedene periodičke funkcije $f_{T_0}(t)$.

8.1.2 Numeričko računanje Fourierove transformacije

Neka se pretpostavi aperiodička funkcija $f(t) = e^{-a|t|}$ i njena Fourierovu transformaciju $F(j\omega)$, koje su prikazane na slici 8.1.a i 8.1.b:

$$f(t) = e^{-a|t|} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} = F(j\omega) \quad (a > 0) \tag{8.3}$$

Iz funkcije $f(t)$ može se dobiti zvjezdasta funkcija $f^*(t)$ s intervalom između uzimanja uzoraka T_1 (slika 8.1.c), a iz spektra $F(j\omega)$ može se dobiti spektar zvjezdaste funkcije $F^*(j\omega)$ (slika 8.1.d). Spektar zvjezdaste funkcije ima dva oblika:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega \mp jn\omega_1\right) \tag{8.4}$$

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) e^{-jn\omega T_1} \tag{8.5}$$

Iz funkcije $f(t)$ može se dobiti i izvedena periodička funkcija $f_{T_0}(t)$ s periodom T_0 (slika 8.1.e), a iz spektra $F(j\omega)$ može se dobiti spektar izvedene periodičke funkcije $F_{T_0}(j\omega)$ (slika 8.1.f). Izvedena periodička funkcija ima dva oblika:

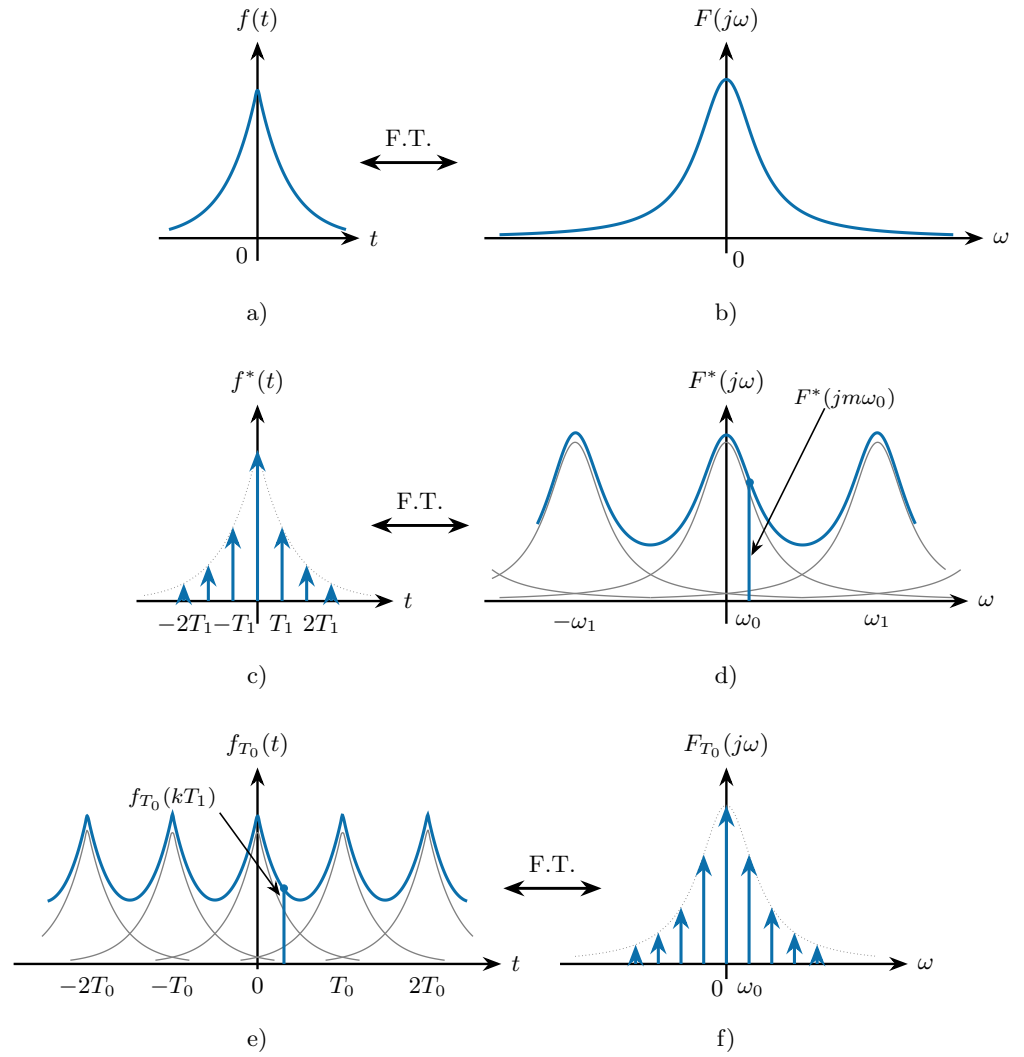
$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(t \mp nT_0\right) \tag{8.6}$$

$$f_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(jn\omega_0\right) e^{jn\omega_0 t} \tag{8.7}$$

Izraz (8.7) zapravo predstavlja Poissonovu sumacionu formulu.

Neka je, za početak, odabran aperiodički signal $f(t)$ koji je vremenski neograničen, a čiji je spektar spektralno ograničen (odnosno takav da je spektar jednak nuli za $|\omega| > \omega_M$). Ukoliko se poštuje Nyquistov uslov $T_1 \leq \pi/\omega_M$, gdje je ω_M maksimalna frekvencija u spektru $F(j\omega)$, onda u $F^*(j\omega)$ neće doći do preklapanja spektara $F(j\omega)$. Međutim, formirajući izvedenu periodičku funkciju od vremenski neograničenog aperiodičkog signala $f(t)$ doći će do preklapanja signala $f(t)$ u vremenskom domenu (vremenski aliasing). U tom slučaju, pri diskretizaciji funkcije $f_{T_0}(t)$, pojavit će se greška, jer uzorci funkcije $f_{T_0}(t)$ neće odgovarati uzorcima funkcije $f(t)$.

Ako je signal $f(t)$ vremenski ograničen sa τ, poštujući teoremu o diskretizaciji spektra $T_0 > \tau$, gdje je T_0 period izvedene periodičke funkcije, ponovljene kopije signala $f(t)$ u



Slika 8.1: a) Aperiodička funkcija, b)spektar aperiodičke funkcije, c) zvjezdasta funkcija, d) spektar zvjezdaste funkcije, e) izvedena periodička funkcija, f) spektar izvedene periodičke funkcije.

funkciji $f_{T_0}(t)$ se neće preklopiti, pa diskretizacija $f_{T_0}(t)$ neće dovoditi do greške. Greška će se pojaviti pri diskretizaciji $F^*(j\omega)$, jer će za vremenski ograničeni signal $f(t)$ spektar biti neograničene širine, pa će se $F(j\omega)$ u $F^*(j\omega)$ preklopiti. Funkcija data izrazom (8.3) je vremenski neograničen signal, a i njen spektar je frekventno neograničen.

Dakle, numeričkim računanjem direktne i inverzne Fourierove transformacije, greška se može smanjiti, ali se nikada ne može eliminirati. Kako numeričko računanje podrazumijeva rad sa konačnim brojem podataka, signal $f(t)$ mora biti vremenski ograničen, ili periodičan - pa da se razmatranje bazira samo na osnovnom periodu signala.

Može se pokazati da između uzoraka funkcije $f_{T_0}(t)$ uzetih u trenucima $t = kT_1$ (pri čemu je kontinualno vrijeme zamijenjeno diskretnim), $k = 0, 1, \ldots N-1$ i uzoraka spektra $F^*(j\omega)$ funkcije $f^*(t)$, uzetih na učestanostima $m\omega_0$, $m = 0, 1, \ldots N-1$, postoji jednostavna veza, koja se može izvesti na način koji slijedi u nastavku.

Iz Poissonove sumacione formule (8.7) vrijednost uzoraka funkcije $f_{T_0}(t)$ u trenucima $t = kT_1$ je:

$$f_{T_0}(kT_1) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(jn\omega_0)\, e^{jn\omega_0 kT_1} \tag{8.8}$$

Kako mora biti zadovoljeno $NT_1 = T_0$ odnosno $\omega_1 = N\omega_0$, gdje je N cijeli broj, to je:

$$f_{T_0}(kT_1) = \frac{1}{NT_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(jn\omega_0)\, e^{\frac{jnk\cdot 2\pi}{N}} \tag{8.9}$$

Ako se uvede smjena:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{8.10}$$

onda relacija (8.9) postaje:

$$f_{T_0}(kT_1) = \frac{1}{NT_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(jn\omega_0)\, W_N^{-nk} \tag{8.11}$$

Koeficijenti W_N se nazivaju *rotacioni faktori* (engl. *twiddle*), zbog toga što se množenjem sa njima mijenja samo argument kompleksnih brojeva. Rotacioni faktori su periodički i predstavljaju tačke na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni.

Ako se indeks sumiranja n u relaciji (8.11) zamjeni sa $n = m + rN$, i ako je $m = 0, 1, \ldots N-1$, a $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, onda n ima sve vrijednosti iz intervala $(-\infty \div +\infty)$. Relacija (8.11) se sada može napisati u obliku dvostruke sume:

$$f_{T_0}(kT_1) = \frac{1}{NT_1} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F(jm\omega_0 + jrN\omega_0)\, W_N^{-mk} W_N^{-rkN} \tag{8.12}$$

Kako je $W_N^N = 1$, dobije se:

$$f_{T_0}(kT_1) = \frac{1}{NT_1} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-mk} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F(jm\omega_0 + jr\omega_1) \tag{8.13}$$

Kako je, na osnovu (8.4):

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} F[j(\omega + r\omega_1)]$$

to je:

$$F^*\left(jm\omega_0\right) = \frac{1}{T_1}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} F\left[j\left(m\omega_0 + r\omega_1\right)\right] = \frac{1}{T_1}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} F\left[j\omega_0(m+rN)\right] \tag{8.14}$$

Tako se na osnovu relacije (8.14) relacija (8.13) može napisati kao:

$$f_{T_0}\left(kT_1\right) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} F^*\left(jm\omega_0\right) W_N^{-mk} \tag{8.15}$$

Relacija (8.15) definira *inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju.*

Direktna diskretna Fourierova transformacija dobija se analogno, s tim što se polazi od spektra $F^*(j\omega)$ datog relacijom (8.5):

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) e^{-jn\omega T_1} \tag{8.16}$$

Za $\omega = m\omega_0$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$, $(m = 0, 1, 2, \ldots\ldots N-1)$ i uz $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ te $T_0/T_1 = N$, dobija se:

$$\begin{aligned} F^*\left(jm\omega_0\right) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) e^{-jnm\omega_0 T_1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) e^{-jnm\omega_0 \frac{T_0}{N}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) e^{-jnm\frac{2\pi}{N}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(nT_1\right) W_N^{nm} \end{aligned}$$

Ako se uvede smjena $n = k + rN$, pri čemu je $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i $k = 0, 1, \ldots N-1$, onda se dobije relacija (8.17):

$$\begin{aligned} F^*\left(jm\omega_0\right) &= \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N-1} f\left[(k+rN)T_1\right] W_N^{mk} \underbrace{W_N^{rmN}}_{1} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{mk} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left[(k+rN)T_1\right] \end{aligned} \tag{8.17}$$

Kako je, na osnovu relacije (8.6):

$$f_{T_0}(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left(t - rT_0\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left(t + rT_0\right)$$

to je:

$$f_{T_0}\left(kT_1\right) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left(kT_1 + rT_0\right)$$

$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left(kT_1 + rNT_1\right)$$
$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f\left[T_1(k+rN)\right] \tag{8.18}$$

Na osnovu relacije (8.18), relacija (8.17) postaje:

$$F^*\left(jm\omega_0\right) = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{mk} f_{T_0}\left(kT_1\right) \tag{8.19}$$

Relacija (8.19) je *direktna diskretna Fourierova transformacija.* Tako relacije (8.15) i (8.19) u potpunosti definiraju vezu između uzoraka izvedene periodičke funkcije i uzoraka spektra zvjezdaste funkcije, odnosno *diskretnu Fourierovu transformaciju* (DFT). Sa slika 8.1.d i 8.1.e se vidi da $F^*\left(jm\omega_0\right)$ i $f_{T_0}\left(kT_1\right)$ predstavljaju periodičke sekvence perioda N, jer je $\omega_1 = N\omega_0$ i $T_0 = NT_1$.

Uzorci izvedene periodičke funkcije $f_{T_0}\left(kT_1\right)$ mogu se posmatrati kao diskretni signal obilježen sa $x[k]$, pri čemu je $x[k]$ periodički signal perioda N ($x(k+N) = x(k)$). Uzorci spektra zvjezdaste funkcije $F^*\left(jm\omega_0\right)$ mogu se posmatrati kao diskretni signal obilježen sa $X[m]$, pri čemu je $X[m]$ periodički signal perioda N ($X(m+N) = X(m)$), tako da je:

$$x(k) = f_{T_0}\left(kT_1\right), \quad X(m) = F^*\left(jm\omega_0\right) \tag{8.20}$$

Na osnovu relacija (8.15) i (8.19) dobije se:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-km} \tag{8.21}$$

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{mk} \tag{8.22}$$

Izrazi (8.21) i (8.22) predstavljaju češću formu za inverznu i direktnu diskretnu Fourierovu transformaciju, i također se nazivaju diskretni Fourierov red. Korištenjem ovih relacija se numerički računaju članovi jedne sekvence pomoću članova druge sekvence, pri čemu obje imaju period N. DFT se skraćeno obilježava sa:

$$x[k] \underset{N}{\longleftrightarrow} X[m] \tag{8.23}$$

a čita se na slijedeći način: periodički diskretni signal $x[k]$ s periodom N transformira se u periodički diskretni signal $X[m]$ također s periodom N. Važno je napomenuti da se u literaturi često koristi i notacija $\tilde{x}[k]$ i $\tilde{X}[m]$ kako bi se naglasilo da se radi o periodičkim sekvencama.

Iz relacije (8.22) se vidi da se DFT računa za diskretne učestanosti u opsegu učestanosti $0 \leq \omega \leq 2\pi$, čiji je inkrement $\Delta\omega = 2\pi/N$. Taj opseg je izabran zbog lakše interpretacije komponente čija je učestanost $\omega = 0$, a koja je predstavljena prvim članom DFT. Iz

relacije (8.22) se vidi da $X(0)/N$ predstavlja srednju vrijednost signala $x[k]$). Relacije (8.21) i (8.22) direktno su primjenljive na kauzalne sekvence konačne dužine. Ukoliko je broj tačaka u jednom periodu N veći od dužine originalne sekvence $x[k]$), da bi se dobio povećan broj tačaka u spektru, originalna sekvenca se dopunjava nulama (engl. *zero padding*). Dopunjavanje nulama ima važnu primjenu u izračunavanju konvolucije pomoću DFT.

Prednost diskretne Fourierove transformacije u odnosu na Fourierovu transformaciju je što nema integriranja. Na osnovu izraza (8.21) i (8.22) vidi se da se pojavljuje samo sabiranje i množenje. Broj sabiranja i množenja određuju kompleksnost algoritma (engl. *arithmetic cost*).

Primjer 8.1:

Neka je data diskretna vremenska sekvenca:

$$x[k] = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{5}k\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{5}k\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}k + \frac{\pi}{2}\right).$$

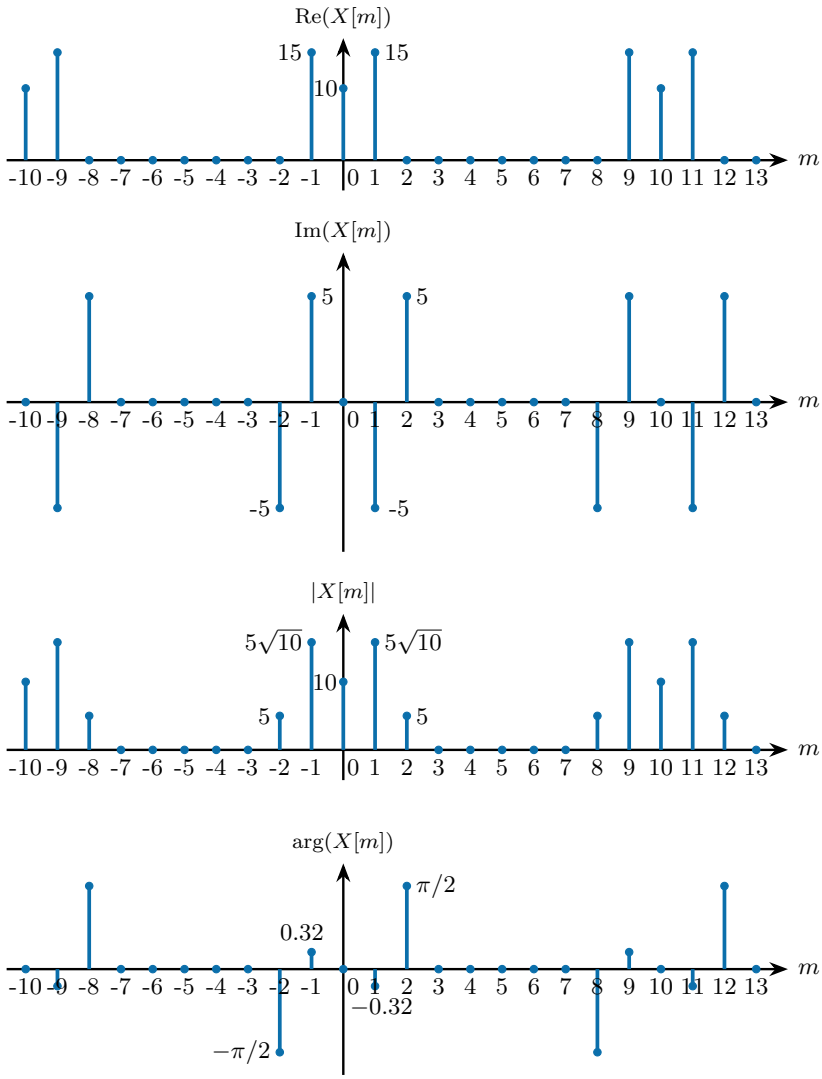
Odrediti koeficijente diskretne Fourierove sekvence $X[m]$ koristeći definicionu relaciju. Nacrtati realni, imaginarni, amplitudni i fazni dio spektra sekvence $X[m]$.

Rješenje:
Period sekvence $x[k]$ je $N = 10$. Zadata sekvenca se može napisati u obliku:

$$\begin{aligned}
x[k] &= 1 + \sin\left(\frac{\pi}{5}k\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{5}k\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{5}k + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi}{5}k} - e^{-j\frac{\pi}{5}k}\right) + \frac{3}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{5}k} + e^{-j\frac{\pi}{5}k}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{5}k+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\frac{2\pi}{5}k+\frac{\pi}{2}\right)}\right) \\
&= 1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)\cdot e^{j\frac{\pi}{5}k} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)\cdot e^{-j\frac{\pi}{5}k} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{5}k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi}{5}k} \\
&= \frac{10}{10}\left\{1 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right)\cdot e^{-\left(-j\frac{2\pi}{10}\right)k} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)\cdot e^{\left(-j\frac{2\pi}{10}\right)k} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-2\cdot\left(-j\frac{2\pi}{10}\right)k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{2\cdot\left(-j\frac{2\pi}{10}\right)k}\right\}
\end{aligned}$$

Iz definicione relacije (8.21) za $N = 10$ dobije se:

$$x(k) = \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{9} X(m)e^{-\left(-j\frac{2\pi}{10}\right)km}$$



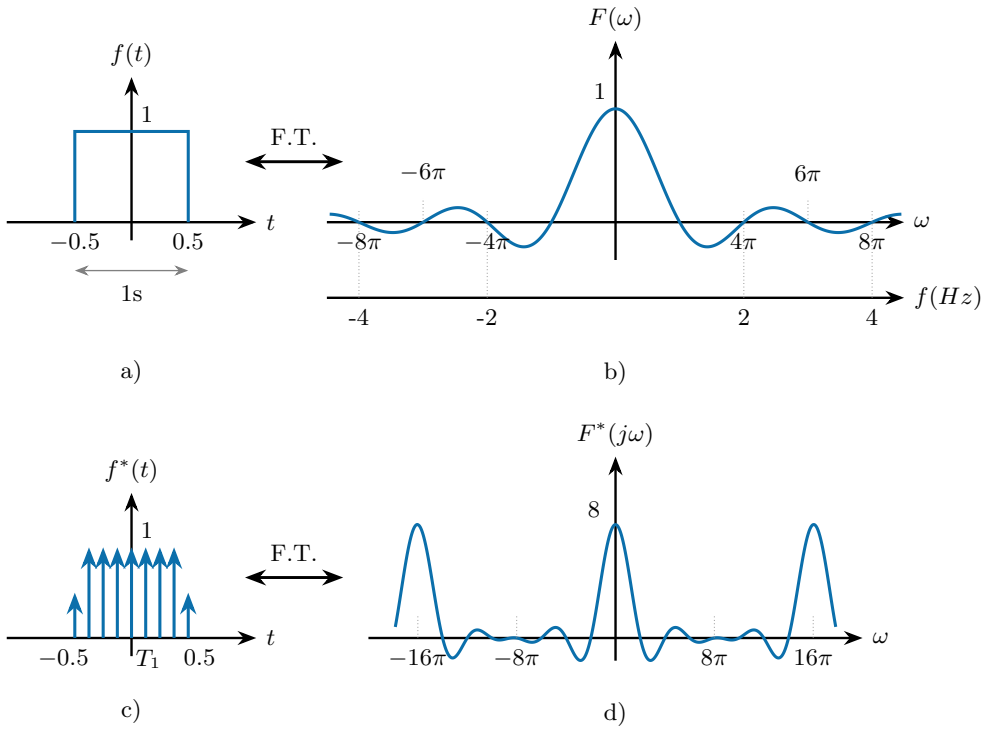
Slika 8.2: Realni, imaginarni, amplitudni i fazni spektar signala (primjer 8.1).

Poređenjem ove relacije i relacije iz prethodnog izraza, dobije se:

$$X(0) = 10, \quad X(1) = 10\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2j}\right) = 15 - j5,$$

$$X(-1) = 10\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right) = 15 + j5, \quad X(2) = j5, \quad X(-2) = -j5$$

Ostali koeficijenti $X(m)$ su nula. Spektri sekvence $X(m)$ prikazani su na slici 8.2.



Slika 8.3: a) Originalni signal (pravougaoni impuls), b) spektar signala, c) zvjezdasta funkcija, d) spektar zvjezdaste funkcije (primjer 8.2).

Primjer 8.2:

Naći diskretni Fourierov red signala $f(t) = p(t)$.

Rješenje:
Funkcija $f(t)$ (slika 8.3.a) ima Fourierovu transformaciju (slika 8.3.b):

$$p(t) \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} Sa\frac{\omega}{2}$$

Spektar prolazi kroz nulu za učestanosti $\omega/2 = k\pi$, ili $\omega = 2k\pi, k = \pm 1, \pm 2 \ldots$ Za određivanje intervala između uzimanja uzoraka T_1 funkcije $f(t)$, koja ima ograničeno trajanje $\tau = 1[s]$, iz Fourierove transformacije, odnosno spektra funkcije $f(t)$ koji je neograničen, određuje se ω_M. Sa slike 8.3.b se vidi da je $F(j\omega)$ vrlo mala za $|\omega| > 8\pi$. Zbog toga je razuman izbor $\omega_M = 8\pi$, što prema teoremi o uzimanju uzoraka daje $T_1 \leq \pi/\omega_M = \pi/(8\pi) = 1/8[s]$.

Na slici 8.3.c nacrtana je zvjezdasta funkcija s intervalom između uzoraka $T_1 = 1/8[s]$,

a prema relaciji:

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_1)\,\delta(t - nT_1)$$

Kako funkcija $f(t)$ ima diskontinuitet (skok) u trenucima uzimanja uzoraka $t = -0.5$ i $t = 0.5$, onda će ti uzorci imati vrijednosti koje predstavljaju srednju vrijednost između dvije vrijednosti funkcije u trenucima diskontinuiteta (0.5), jer Fourierova reprezentacija tačke diskontinuiteta konvergira srednjoj vrijednosti.

Spektar zvjezdaste funkcije (slika 8.3d) nacrtan je na osnovu relacije:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(j\omega - jn\omega_1) = 8 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Sa\left(\frac{\omega - n\omega_1}{2}\right)$$

Kako je $T_1 = 2\pi/\omega_1 = 1/8[s]$, to je $\omega_1 = 2\pi/T_1 = 16\pi$.

Za crtanje izvedene periodičke funkcije $f_{T_0}(t)$, potrebno je odrediti period T_0. Prema teoremi o diskretizaciji spektra mora biti $T_0 > \tau = 1[s]$, ili $\omega_0 < 2\pi$. Sa slike 8.3.b spektra $F(j\omega)$ vidi se da je razuman izbor $\omega_0 = \pi/2$ ili frekventna rezolucija $f_0 = (\pi/2)/(2\pi) = 1/4$ [Hz]. To daje po četiri uzorka sa svake strane spektra $F(j\omega)$. U tom slučaju je $f_0 = (\pi/2)/(2\pi) = 1/4$ [Hz], što zadovoljava uslov teoreme o diskretizaciji spektra ($T_0 > \tau$). Na osnovu relacije:

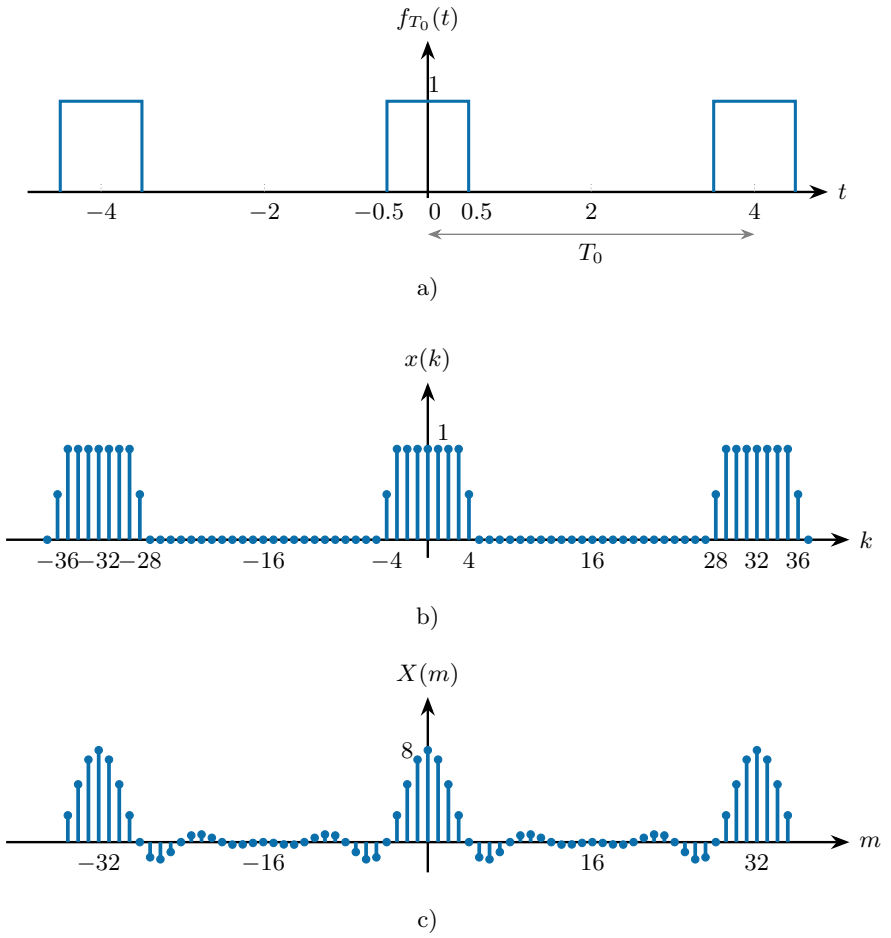
$$f_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_0)$$

na slici 8.4.a nacrtana je izvedena periodička funkcija perioda $T_0 = 4[s]$. Iz izabranih T_1 i T_0 slijedi da je period sekvenci $x[k]$ i $X[m]$ jednak $N = T_0/T_1 = 32$.

Signal $f(t)$ traje $1[s]$ i treba ga ponoviti svakih $4[s]$ ($T_0 = 4[s]$), kao što je prikazano na slici 8.4.a, i uzeti uzorke svakih $T_1 = 1/8[s]$, što daje 32 uzorka. Kako je $x(k) = f_{To}(kT_1)$, to su vrijednosti $x(k)$ jednake 0 i 1, a u trenutku diskontinuiteta 0.5, što je prikazano na slici 8.4.b. Na istoj slici $x[k]$ je prikazano u funkciji diskretnog vremena k. Prema slici 8.4.a jasno je da je ponavljanje segmenta $f(t)$ iz intervala $-2 \div 2[s]$ identično ponavljanju segmenta $f(t)$ iz intervala $0 \div 4[s]$. Dakle, bez obzira gdje $f(t)$ počinje, uvijek se mogu uzeti uzorci iz intervala $0 \div T_0$ i crtati periodička sekvenca $x[k]$ perioda N. Vrijednosti 32 uzorka iz ovog primjera su:

$$x(k) = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 3 \quad \wedge \quad 29 \le k \le 31 \\ 0, & 5 \le k \le 27 \\ 0.5, & k = 4 \quad \wedge \quad k = 28 \end{cases}$$

Kako je $X(m) = F^*(jm\omega_0)$, to se vrijednosti $X(m)$ za direktnu DFT određuju na osnovu relacije (8.19). Period sekvence $X(m)$ je takođe $N = 32$ i prikazana je na slici 8.4.c. Vrijednosti $X(m)$ za $m = -16 \div -1$ iste su kao i vrijednosti za $m = 16 \div 31$. Uzorci $F^*(jm\omega_0)$ su razdvojeni sa $\omega_0 = \pi/2$, čemu odgovara $T_0 = 4[s]$, tako da je frekventna rezolucija $f_0 = 1/4[Hz]$.



Slika 8.4: a) Izvedena periodička funkcija, b) uzorkovana periodička funkcija, Diskretna Fourierova transformacija pravougaonog impulsa (primjer 8.2).

8.2 Brza Fourierova transformacija - FFT

Za računanje koeficijenata diskretne Fourierove transformacije (DFT) na računaru koristi se algoritam *brze Fourierove transformacije* (engl. *Fast Fourier Transform Algorithm - FFT*). Po tom algoritmu potreban je manji broj matematičkih operacija nego na osnovu relacija (8.21) i (8.22) za DFT, tako da je kompleksnost algoritma niža. To se može pokazati na primjeru.

Primjer 8.3:

Odrediti sekvencu $X(m)$ i broj množenja ako je sekvenca $x(k)$ data sa:

$$x(0) = 3 \quad x(1) = 2 \quad x(2) = 1 \quad x(3) = 2$$

Rješenje:
U ovom slučaju period sekvence $x[k]$ je $N = 4$, pa je: $W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j$. Koeficijenti sekvence $X[m]$ su:

$$\begin{aligned} X(0) &= x(0)W_4^{0\cdot 0} + x(1)W_4^{0\cdot 1} + x(2)W_4^{0\cdot 2} + x(3)W_4^{0\cdot 3} \\ &= 3\cdot(-j)^0 + 2\cdot(-j)^0 + 1\cdot(-j)^0 + 2\cdot(-j)^0 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(1) &= x(0)W_4^{l\cdot 0} + x(1)W_4^{l\cdot 1} + x(2)W_4^{l\cdot 2} + x(3)W_4^{l\cdot 3} \\ &= 3\cdot(-j)^0 + 2\cdot(-j)^1 + 1\cdot(-j)^2 + 2\cdot(-j)^3 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2) &= x(0)W_4^{2\cdot 0} + x(1)W_4^{2\cdot 1} + x(2)W_4^{2\cdot 2} + x(3)W_4^{2\cdot 3} \\ &= 3\cdot(-j)^0 + 2\cdot(-j)^2 + 1\cdot(-j)^4 + 2\cdot(-j)^6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(3) &= x(0)W_4^{3\cdot 0} + x(1)W_4^{3\cdot 1} + x(2)W_4^{3\cdot 2} + x(3)W_4^{3\cdot 3} \\ &= 3\cdot(-j)^0 + 2\cdot(-j)^3 + 1\cdot(-j)^6 + 2\cdot(-j)^9 = 2 \end{aligned}$$

Za određivanje koeficijenta $X(0)$ nisu potrebna množenja. Za računanje ostalih $N-1$ koeficijenata potrebno je $(N-1)^2$ množenja sa W_N^{mk}. U ovom primjeru broj potrebnih množenja je $(N-1)^2 = 3^2 = 9$. Za npr. $N = 128$ broj množenja, bez korištenja brze Fourierove transformacije (FFT) je $(N-1)^2 = 127^2 = 16139$. Korištenjem FFT broj množenja se smanjuje.

FFT algoritam po bazi 2 ili radiks-2 algoritam je rekurzivni algoritam koji se sastoji od dijeljenja dobivene sekvence (i svake podsekvence) u dvije podsekvence upola manje dužine. U narednom izlaganju biće obrađena dva osnovna FFT algoritma po bazi dva, koja se razlikuju u načinu definiranja podsekvenci, i to su:

1. brza Fourierova transformacija *sa decimiranjem (preslaganjem) po vremenu (engl. Decimation In Time, DIT FFT)*,
2. brza Fourierova transformacija *sa decimiranjem (preslaganjem) po učestanosti (engl. Decimation In Frequency, DIF FFT)*.

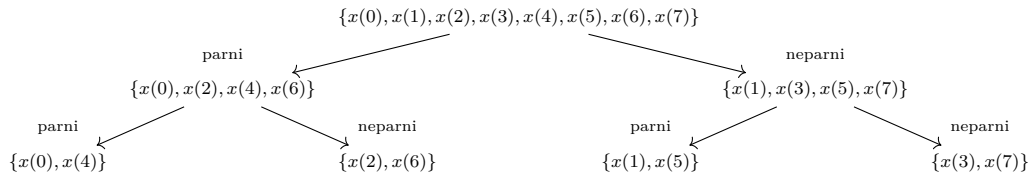
FFT algoritmi po većoj bazi (4,8 itd.) nisu izvođeni, ali se algoritam može općenito primijeniti po bazi 2^s, gdje je s cijeli pozitivan broj. Ako se vremenski niz sastoji od npr. $N = 4^n$ diskretnih uzoraka, pošto je $N = 4^n = 2^{2n}$ može se koristiti bilo koji algoritam sa bazom 2 da bi se izračunala tražena transformacija. Razlog povećanja baze je u smanjenju kompleksnosti algoritma, što predstavlja prednost koja se koristi kod paralelnih FFT

algoritama. Također, postoji mnogo slučajeva kada N nije eksponent broja 2 i tada je potrebno modificirati algoritam. Intuitivno je jasno da će algoritam FFT imati najbolje rezultate ako je dužina sekvence $N = 2^s$, jer podjela sekvenci u sukcesivno manje grupe se može nastaviti dok ne ostane samo jedan par u grupi. U narednom izvođenju polazi se od pretpostavke da je $N = 2^s$, a ostale transformacije su samo specijalni slučajevi transformacije po bazi 2^s.

8.2.1 Brza Fourierova transformacija po bazi 2 sa decimiranjem po vremenu (DIT FFT)

Neka je data sekvenca $x[k]$ perioda N. Ta sekvenca se može podijeliti na dva dijela: prvi dio čine članovi sa parnim k i obilježava se sa $x[2k]$. Drugi dio čine članovi sa neparnim k i obilježava se sa $x[2k+1]$. Dužine (periodi) tih sekvenci su $N/2$. Svaka od tih sekvenci ponovo se dijeli na dva dijela perioda $N/4$, itd. sve dok ne ostanu sekvence perioda $N = 2$.

U nastavku će biti pokazano izvođenje relacija koje će koristiti opće dužine sekvenci, ali će ilustracije i prateće slike koristiti primjer dekompozicije diskretne Fourierove sekvence za slučak perioda $N = 8$. Članovi date sekvence podijeljeni su prvo na parne i neparne. Grupa parnih članova ponovo je podijeljena na parne i neparne, kao i grupa neparnih. Ponovnim dijeljenjem dobiju se četiri grupe od po dva člana. Na ovakav način članovi diskretne Fourierove sekvence $x[k]$ su presloženi (decimirani) po diskretnom vremenskom parametru k.



Dakle, u općem slučaju, dijeleći $x[k]$ na $x[2k]$ i $x[2k+1]$, na osnovu relacije (8.22) je:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{m \cdot k} = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k) W_N^{m \cdot 2k} + \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(2k+1) W_N^{m \cdot (2k+1)} \tag{8.24}$$

Ako se uvedu nove sekvence perioda $N/2$ takve da vrijedi:

$$a(k) = x(2k), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, (N/2) - 1$$

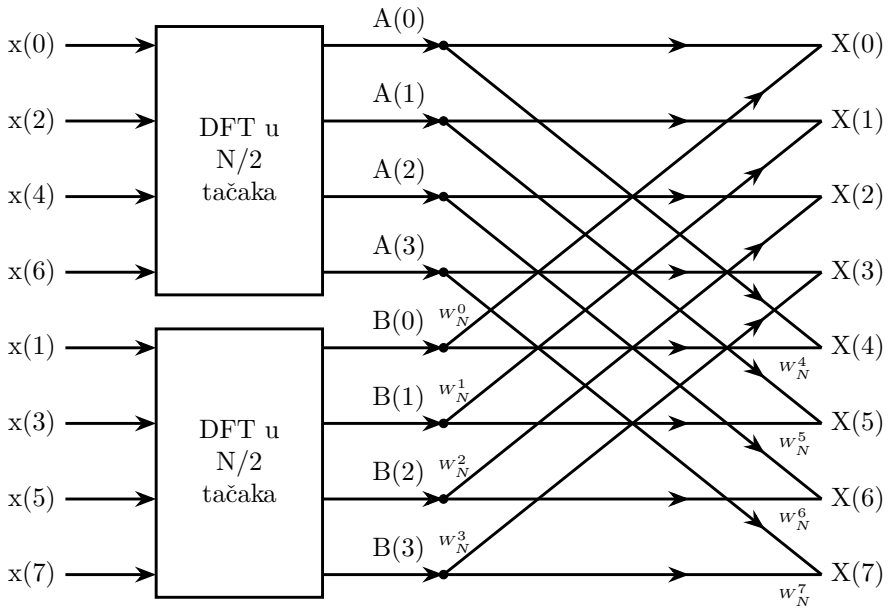
$$b(k) = x(2k+1), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, (N/2) - 1$$

i ako se uzme u obzir da je $W_N^2 = W_{N/2}$, dobije se:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} a(k) W_{N/2}^{m \cdot k} + W_N^m \sum_{k=0}^{(N/2)-1} b(k) W_{N/2}^{m \cdot k} \tag{8.25}$$

Ako se diskretne Fourierove transformacije sekvenci $a[k]$ i $b[k]$ označe sa $A[m]$ i $B[m]$, gdje su:

$$A(m) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} a(k) W_{N/2}^{m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, (N/2) - 1 \tag{8.26}$$



Slika 8.5: Dekompozicija diskretne Fourierove sekvence perioda $N = 8$ na dvije diskretne Fourierove sekvence sa periodom $N/2 = 4$.

$$B(m) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} b(k) W_{N/2}^{m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, (N/2) - 1 \tag{8.27}$$

onda relacija (8.25) postaje:

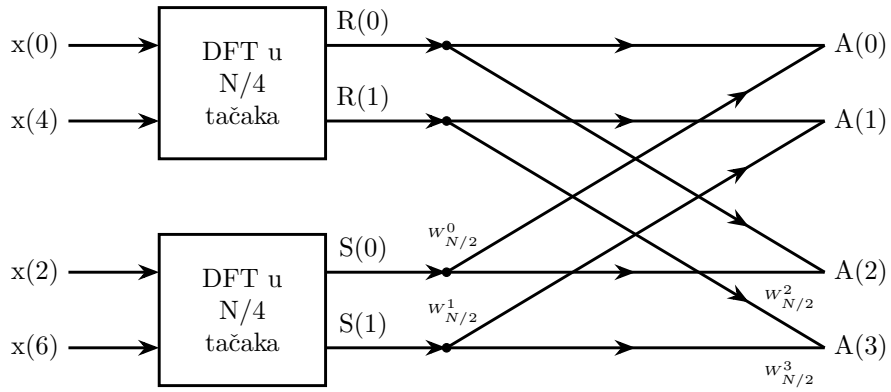
$$X(m) = A(m) + W_N^m B(m), \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, (N/2) - 1 \tag{8.28}$$

Pošto su $A[m]$ i $B[m]$ periodičke sekvence perioda $N/2$, to se za određivanje vrijednosti $X(m)$ između $N/2$ i $N - 1$ može napisati:

$$X(m) = A\left(m - \frac{N}{2}\right) + W_N^m B\left(m - \frac{N}{2}\right), \quad m = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \ldots\ldots, N - 1.$$

Relacija (8.28) definira brzu Fourierovu transformaciju sa decimiranjem po vremenu (DIT FFT). Dakle, diskretni Fourierov red originala sekvence sa periodom N može se izračunati pomoću diskretnog Fourierovog reda originala dvije sekvence perioda N/2. Prvu sekvencu $a[k]$ čine svi članovi sekvence $x[k]$ s parnim indeksima, a drugu, $b[k]$ čine svi članovi sekvence $x[k]$ s neparnim indeksima.

Neka je $N = 8$. Grafička predstava dekompozicije diskretne Fourierove sekvence perioda $N = 8$ na dvije diskretne Fourierove sekvence perioda $N/2 = 4$ prikazana je na slici 8.5.



Slika 8.6: Dekompozicija diskretne Fourierove sekvence perioda $N/2 = 4$ na dvije diskretne Fourierove sekvence sa periodom $N/4 = 2$.

Ovaj postupak se može nastaviti rekurzivno. Sekvenca $a[k]$ takođe se može podijeliti na parne i neparne članove:

$$r(k) = a(2k), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots N/4 - 1 \tag{8.29}$$

$$s(k) = a(2k+1), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots N/4 - 1 \tag{8.30}$$

Tada se $A(m)$ iz relacije (8.26) može napisati kao:

$$A(m) = \sum_{k=0}^{(N/4)-1} a(2k) W_{N/2}^{m \cdot 2k} + \sum_{k=0}^{(N/4)-1} a(2k+1) W_{N/2}^{m \cdot (2k+1)} \tag{8.31}$$

Kako je $W^2_{N/2} = W_{N/4}$, to je:

$$A(m) = \sum_{k=0}^{(N/4)-1} r(k) W_{N/4}^{m \cdot k} + W_{N/2}^{m} \sum_{k=0}^{(N/4)-1} s(k) W_{N/4}^{m \cdot k} \tag{8.32}$$

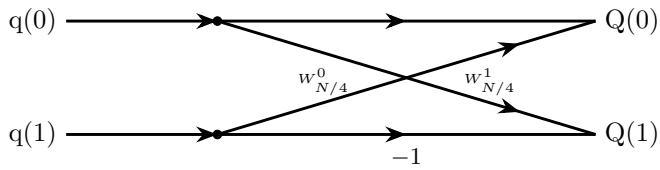
Sumiranje se sada izvodi u $N/4$ tačaka. Ako se diskretna Fourierova transformacija-DFT sekvenci $r[k]$ i $s[k]$ označi sa $R[m]$ i $S[m]$, odnosno:

$$R(m) = \sum_{k=0}^{(N/4)-1} r(k) W_{N/4}^{m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, \frac{N}{4} - 1 \tag{8.33}$$

$$S(m) = \sum_{k=0}^{(N/4)-1} s(k) W_{N/4}^{m \cdot k}, \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, \frac{N}{4} - 1 \tag{8.34}$$

onda je:

$$A(m) = R(m) + W_{N/2}^{m} S(m), \quad m = 0, 1, \ldots\ldots, \frac{N}{4} - 1 \tag{8.35}$$



Slika 8.7: "Cooley - Tukey butterfly" algoritam ($N = 2$)

Još je potrebno odrediti vrijednosti $A(m)$ između $N/4$ i $(N/2-1)$. Pošto sekvence $R(m)$ i $S(m)$ imaju period $N/4$, može se napisati:

$$A(m) = R\left(m - \frac{N}{4}\right) + W^m_{N/2} S\left(m - \frac{N}{4}\right), \quad m = \frac{N}{4}, \frac{N}{4}+1, \ldots\ldots, \frac{N}{2}-1 \tag{8.36}$$

Relacije (8.35) i (8.36) daju dekompoziciju diskretne Fourierove sekvence perioda $N/2$ na dvije diskretne Fourierove sekvence perioda $N/4$ (slika 8.6.).

Identična je dekompozicija $B[m]$. Proces dekompozicije sekvence dužine $N = 2^r$ nastavlja se dijeljenjem sekvence na dvije sekvence dužine $N/2 = 2^{r-1}$. Zatim se ove dvije sekvence također dijele na po dvije sekvence dužine 2^{r-2} itd, sve dok ne ostanu samo dva člana.

Relacija za dekompoziciju diskretne Fourierove sekvence za period $N = 2$ je vrlo jednostavna:

$$Q(m) = q(0) + W^m_2 q(1) \tag{8.37}$$

$q(0)$ je parni, a $q(1)$ neparni član, dok je $W_2 = W_{2/2^{r-1}} = -1$.

$$Q(0) = q(0) + q(1) \tag{8.38}$$
$$Q(1) = q(0) - q(1) \tag{8.39}$$

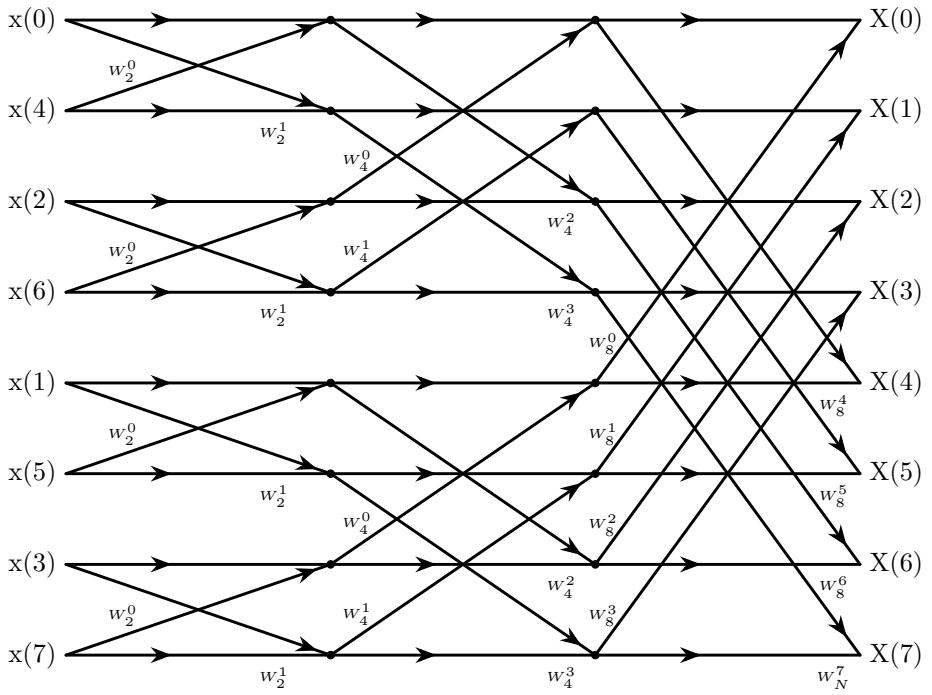
Računanje diskretne Fourierove sekvence perioda $N = 2$ predstavljeno relacijama (8.38) i (8.39) poznato je u literature kao *Cooley - Tukey butterfly algoritam* (slika 8.7.).

Na osnovu slika 8.5, 8.6 i 8.7 za dekompoziciju diskretne Fourierove sekvence, na slici 8.8. prikazana je shema za dekompoziciju, odnosno grafička predstava diskretne Fourierove sekvence $X[m]$ perioda $N = 8$, na diskretnu sekvencu $x[k]$ istog perioda, samo što su članovi novodobijene sekvence presloženi po vremenu.

Brza Fourierova transformacija sa decimiranjem po vremenu, za $N = 8$, napravljena je u tri stepena, odnosno $\log_2 N$ stepeni. Svaki stepen zahtijeva N kompleksnih sabiranja i $N/2$ kompleksnih množenja.

Operacija sabiranja ili množenja brojeva sa pomičnim zarezom naziva se flopom (engl. *floating-point operation, flop*). Jedno kompleksno sabiranje se sastoji od dva realna sabiranja, a jedno kompleksno množenje se sastoji od četiri realna množenja i dva realna sabiranja. Ukupan broj flopova po stepenu iznosi:

$$\underbrace{2N}_{\text{kompleksna sabiranja}} + \underbrace{\frac{N}{2} \cdot 6}_{\text{kompleksna množenja}} = 5N \text{ flopova}$$



Slika 8.8: Shema za brzu Fourierovu transformaciju sa decimiranjem po vremenu za $N = 8$.

Kako ima $\log_2 N$ stepeni, ukupna broj flopova algoritma DIT FFT je:

$$T(N) = 5N \log_2 N \tag{8.40}$$

Ako se kao mjera kompleksnosti uzmu samo kompleksna množenja (s obzirom da su sabiranja računski jednostavnija operacija), broj operacija je manji.

Dodatno, u prvom vertikalnom i horizontalnom stepenu dekompozicije množenja su trivijalna (množenje sa $W_N^0 = 1$), pa se ona mogu izostaviti itd. Moguće su i druge optimizacije, ali je bez obzira na to kompleksnost algoritma ekvivalentna $O(N \log_2 N)$, što predstavlja značajno poboljšanje u odnosu na direktnu DFT čija je kompleksnost $O(N^2)$.

Primjer 8.4:

Neka je sekvenca $x[k]$ zadata kao i u primjeru 8.3 sa:

$$x(0) = 3 \quad x(1) = 2 \quad x(2) = 1 \quad x(3) = 2$$

Na osnovu relacije (8.28) za brzu Fourierovu transformaciju odrediti članove sekvence $X[m]$.

Rješenje:
Kako je:

$$a(k) = x(2k) \quad \text{i} \quad b(k) = x(2k+1)$$

to je:

$$a(0) = 3 \quad a(1) = 1 \quad b(0) = 2 \quad b(1) = 2.$$

Za računanje koeficijenata $A(m)$ i $B(m)$, prema relacijama (8.26) i (8.27), potrebno je naći:

$$W_{N/2} = W_N^2 = e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot 2} = e^{-j\pi} = -1 \quad (N = 4)$$

Tada je:

$$\begin{aligned} A(0) &= a(0)(-1)^{0\cdot 0} + a(1)(-1)^{0\cdot 1} = 4 \\ A(1) &= a(0)(-1)^{1\cdot 0} + a(1)(-1)^{1\cdot 1} = 2 \\ B(0) &= b(0)(-1)^{0\cdot 0} + b(1)(-1)^{0\cdot 1} = 4 \\ B(1) &= b(0)(-1)^{1\cdot 0} + b(1)(-1)^{1\cdot 1} = 0 \end{aligned}$$

Na osnovu relacije (8.28) računa se $X[m]$, pri čemu su $A[m]$ i $B[m]$ periodičke sekvence perioda $N = 2$:

$$\begin{aligned} W_N &= W_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j \\ X(0) &= A(0) + (-j)^0 B(0) = 8 \\ X(1) &= A(1) + (-j)^1 B(1) = 2 \\ X(2) &= A(2) + (-j)^2 B(2) = A(0) + (-j)^2 B(0) = 0 \\ X(3) &= A(3) + (-j)^3 B(3) = A(1) + (-j)^3 B(1) = 2 \end{aligned}$$

Dakle, rezultat je isti kao u primjeru 8.2.

8.2.2 Brza Fourierova transformacija po bazi 2 sa decimiranjem po učestanosti (DIF FFT)

Neka je data sekvenca $x[k]$ perioda N. Ta sekvenca se može podijeliti na dva dijela sa istim brojem članova. Dužine (periodi) tih sekvenci su N/2. Svaka od tih sekvenci ponovo se dijeli na dva dijela svaki perioda $N/4$, itd. sve dok ne ostanu sekvence perioda $N = 2$. Iz ovoga se zaključuje da FFT sa decimiranjem po učestanosti, kao i FFT sa decimiranjem po vremenu, koristi vrijednosti N koje imaju oblik 2^r, gdje je r cijeli pozitivan broj. Na ovakav način članovi diskretne Fourierove sekvence $X[m]$ preslažu se (decimiraju) po diskretnom parametru učestanosti m.
U općem slučaju sumiranje po k, u relaciji (8.22) za $X(m)$, dijeli se na dva dijela:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{m\cdot k} = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(k) W_N^{m\cdot k} + \sum_{k=N/2}^{N-1} x(k) W_N^{m\cdot k} \tag{8.41}$$

U drugoj sumi k se može zamijeniti sa $(r + N/2)$:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(k) W_N^{m \cdot k} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x\left(r + \frac{N}{2}\right) W_N^{m \cdot \left(r + \frac{N}{2}\right)} \tag{8.42}$$

U drugoj sumi indeks sumiranja r opet se može zamijeniti sa k, pa je:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x(k) W_N^{m \cdot k} + (-1)^m \sum_{k=0}^{(N/2)-1} x\left(k + \frac{N}{2}\right) W_N^{m \cdot k} \\ &= \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[x(k) + (-1)^m x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{m \cdot k} \end{aligned} \tag{8.43}$$

Relacija (8.43) se može analizirati za dva slučaja, kada je m paran broj i kada je m neparan broj.

Slučaj 1° **- (**m **paran broj)**, odnosno $m = 2r$, $r = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$. Relacija (8.43) sada postaje:

$$X(2r) = \sum_{k=0}^{(N/2)-l} \left[x(k) + (-1)^{2r} x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2r \cdot k} = \sum_{k=0}^{(N/2)-l} \left[x(k) + x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{r \cdot k} \tag{8.44}$$

Dakle, $X(2r)$ se dobije kada se nađe diskretni Fourierov red sekvence:

$$a(k) = x(k) + x(k + N/2), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/2 - 1 \tag{8.45}$$

Slučaj 2° **- (**m **neparan broj)**, odnosno $m = 2r + 1$, $r = 0, 1, \ldots, N/2 - 1$. Iz relacije (8.43) je:

$$X(2r+1) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[x(k) + (-1)^{2r+1} x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{(2r+1) \cdot k} \tag{8.46}$$

Kako je $(-1)^{2r+1} = -1$, to je:

$$X(2r+1) = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \left[x(k) - x\left(k + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^k W_{N/2}^{rk} \tag{8.47}$$

Dakle, neparni članovi $X(2r+1)$ dobijaju se kao koeficijenti diskretnog Fourierovog reda sekvence $b[k]$, gdje je:

$$b(k) = [x(k) - x(k + N/2)] W_N^k, \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/2 - 1 \tag{8.48}$$

Neka je npr. $N = 8$. Polazeći od izraza za $X(m)$, njegovim razdvajanjem na parne i neparne članove, pri čemu su $a(k)$ i $b(k)$ dati izrazima:

$$a(k) = x(k) + x(k + N/2), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/2 - 1 \tag{8.49}$$

$$b(k) = [x(k) - x(k + N/2)]W_N^k, \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/2 - 1 \tag{8.50}$$

Može se doći do sheme za dekompoziciju, odnosno grafičke predstave diskretne Fourierove sekvence sa decimiranjem po parametru učestanosti m (slika 8.9.). Od sekvence $a[k]$ formiraju se sekvence $r[k]$ i $s[k]$, kao i od sekvence $b[k]$:

$$r(k) = a(k) + a(k + N/4), \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/4 - 1 \tag{8.51}$$

$$s(k) = [a(k) - a(k + N/4)]W_{N/2}^k, \quad k = 0, 1, \ldots\ldots, N/4 - 1 \tag{8.52}$$

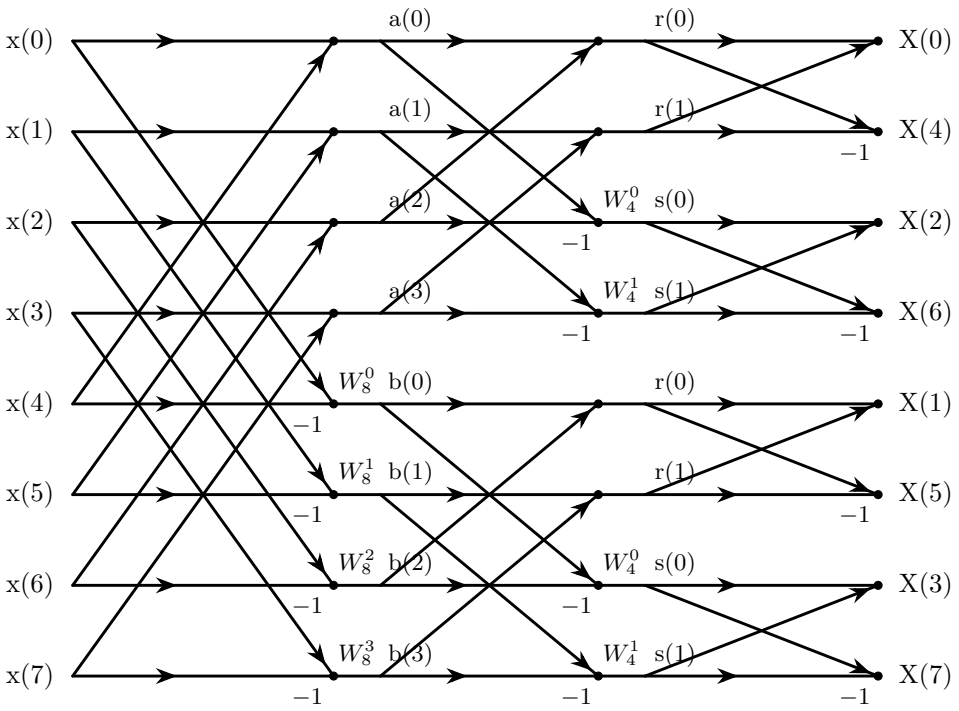
Konačno se od $r(k)$, za $N = 8$, formiraju sekvence $r(0)$ i $r(1)$, pri čemu je:

$$Q(0) = r(0) + r(1) \tag{8.53}$$

$$Q(1) = [r(0) - r(1)]W_2^0 \tag{8.54}$$

gdje su $Q(0)$ i $Q(1)$ parni i neparni članovi diskretne Fourierove sekvence po učestanosti.

Brza Fourierova transformacija sa decimiranjem po učestanosti m, za period $N = 8$, može se realizirati u tri koraka.



Slika 8.9: Shema za brzu Fourierovu transformaciju sa decimiranjem po učestanosti za $N = 8$.

Na osnovu prethodnih relacija nacrtana je šema za dekompoziciju diskretne Fourierove sekvence $x[k]$ perioda $N = 8$, na diskretnu Fourierovu sekvencu $X[m]$ sa istim periodom, samo što su članovi novodobijene sekvence presloženi po učestanosti (slika 8.9). Na slici 8.9 članovi sekvence $x[k]$ podijeljeni su na dva dijela tako da su dobivene sekvence $a[k]$ i $b[k]$ sa po četiri člana. Svaka od njih može se ponovo podijeliti na po dva dijela i dobijene su sekvence $r[k]$ i $s[k]$ sa po dva člana. Konačno, od tih sekvenci, u trećem koraku, napravljene su četiri tzv. "butterfly" strukture. Brza Fourierova transformacija sa decimiranjem po učestanosti, za $N = 8$, napravljena je u $\log_2 N$ stepeni, od kojih svaki zahtijeva N kompleksnih sabiranja i $N/2$ kompleksnih množenja. To znači da korištenje algoritma brze Fourierove transformacije sa decimiranjem po učestanosti ima istu kompleksnost algoritma kao i DIT FFT. To također znači da je brza Fourierova transformacija (FFT), bilo da se radi sa decimiranjem po vremenu ili sa decimiranjem po učestanosti, brža od diskretne Fourierove transformacije (DFT).

8.3 Primjena diskretne Fourierove transformacije

Diskretna Fourierova transformacija primjenjuje se u digitalnim telekomunikacijama, sistemima identifikacije, digitalnom filtriranju, računanju konvolucije, itd. U nastavku će biti razmotrene primjena diskretne Fourierove transformacija za:

1. određivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma,
2. približno određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičkih funkcija,
3. približno određivanje uzoraka spektra kontinualnih funkcija,
4. ubrzano izvođenje konvolucije dvije diskretne sekvence.

8.3.1 Odredivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma

Pod trigonometrijskim polinomom podrazumijeva se funkcija koja ima ograničen broj koeficijenata Fourierovog reda. Neka je dat trigonometrijski polinom:

$$x(t) = \sum_{m=-M}^{M} C_m e^{jm\omega_0 t}, \quad C_m = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt \tag{8.55}$$

Ako se za funkciju $x(t)$, predstavljenu Fourierovim redom, uzme N uzoraka, pri čemu je $N > 2M$, u trenucima $t = kT/N$, dobijaju se slijedeće vrijednosti (za $k = 0, 1, \ldots\ldots, N-1$, $\omega_0 = 2\pi/T$):

$$x\left(k \cdot \frac{T}{N}\right) = \sum_{m=-M}^{M} C_m e^{jm\omega_0(k\cdot T/N)} = \sum_{m=-M}^{M} C_m W_N^{-km} \quad (W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}) \tag{8.56}$$

Ova suma se može razdvojiti na tri dijela:

$$x\left(k \cdot \frac{T}{N}\right) = C_0 + \sum_{m=1}^{M} C_m W_N^{-km} + \sum_{m=-M}^{-1} C_m W_N^{-km} \tag{8.57}$$

Kako je $W_N^N = 1$, ako se u drugoj sumi relacije (8.57) m zamijeni sa $-m$, da bi granice sumiranja bile iste kao u prvoj sumi, tada relacija postaje:

$$x\left(k \cdot \frac{T}{N}\right) = C_0 + \sum_{m=1}^{M} C_m W_N^{-km} + \sum_{m=1}^{M} C_{-m} W_N^{-k(N-m)} \tag{8.58}$$

pri čemu je korišteno $W_N^{km} = W_N^{k\cdot(N-m)\cdot}$. Ako se ovaj izraz uporedi sa izrazom (8.21) za diskretnu Fourierovu transformaciju:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-km}$$

dolazi se do slijedećih koeficijenata:

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{N} X(0) \\ C_{-m} &= \frac{1}{N} X(N-m), && m = 1, 2, \ldots\ldots, M \\ C_m &= \frac{1}{N} X(m), && m = 1, 2, \ldots\ldots, M \end{aligned} \tag{8.59}$$

$X(m)$ se određuje iz izraza (8.21) za diskretnu Fourierovu transformaciju:

$$X(m) = \sum_{k=0}^{N-1} x\left(k \cdot \frac{T}{N}\right) W_N^{km}, \quad N > 2M \tag{8.60}$$

Dakle, na osnovu relacija (8.59) mogu se odrediti koeficijenti Fourierovog reda trigonometrijskog polinoma $x(t)$ koristeći relaciju za diskretnu Fourierovu transformaciju datu relacijom (8.22). Uzeto je N uzoraka funkcije $x(t)$ u trenucima $t = kT/N$.

8.3.2 Određivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma u Pythonu

Primjenom DFT mogu se odrediti koeficijenti Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma. Koeficijenti Fourierovog reda dobiju se iz koeficijenata DFT prema relaciji (8.59). Ako su koeficijenti trigonometrijskog polinoma analitički poznati, može se direktno provjeriti tačnost postupka.

Primjer 8.5:

Napraviti program u Pythonu za određivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskog polinoma:

$$f(t) = 1 + 2\sin(2\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)$$

uzorkovanog sa $N = 10$ uzoraka na periodu $T = 2$ ($\omega_0 = \pi$). Usporediti dobijene koeficijente sa analitički poznatim vrijednostima i rekonstruirati funkciju.

Rješenje:
Trigonometrijski polinom $f(t)$ sadrži harmonike do reda $M = 2$, pa je uslov $N > 2M$ zadovoljen za npr. $N = 10$. Uzorkovanje se vrši u N ravnomjerno raspoređenih tačaka na periodu $[0, T)$: $t_k = kT/N$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Analitički koeficijenti Fourierovog reda, na osnovu Eulerovih formula, su:

$$C_0 = 1, \quad C_{\pm 1} = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = -j, \quad C_{-2} = j$$

Koeficijenti dobijeni DFT-om prema relaciji (8.59) trebaju se poklopiti s ovim vrijednostima. Programski kod kojim se ovo provjerava je dat u nastavku.

Programski kod 8.1

```
# parametri
w0  = np.pi             # osnovna ugaona ucestanost
T   = 2 * np.pi / w0    # period = 2
N   = 10                # broj uzoraka (N > 2M, gdje je M=2)
M   = 2                 # najvisi harmonik u polinomu

# vremenska baza uzorkovanja: N ravnomjerno rasporedjenih
# tacaka na periodu [0, T)
t1 = np.arange(N) * T / N

# uzorkovana funkcija
x1 = 1 + 2 * np.sin(2 * w0 * t1) - np.cos(w0 * t1)

# FFT uzorkovane funkcije
X = sis.fft(x1)

# koeficijenti Fourierovog reda:
# C0 = X(0)/N,  Cm = X(m)/N,  C-m = X(N-m)/N,  m = 1..M
Ck = {}
Ck[0] = X[0] / N
for m in range(1, M + 1):
    Ck[m]  = X[m] / N
    Ck[-m] = X[N - m] / N

print("Koeficijenti Fourierovog reda dobijeni DFT-om:")
print(f"  C[ 0] = {Ck[ 0]:.2f}  (analiticki:  1+0j)")
print(f"  C[ 1] = {Ck[ 1]:.2f}  (analiticki: -0.5+0j)")
print(f"  C[-1] = {Ck[-1]:.2f}  (analiticki: -0.5+0j)")
print(f"  C[ 2] = {Ck[ 2]:.2f}  (analiticki:  0-1j)")
print(f"  C[-2] = {Ck[-2]:.2f}  (analiticki:  0+1j)")
```

```
Koeficijenti Fourierovog reda dobijeni DFT-om:
  C[ 0] = 1.00+0.00j  (analiticki:  1+0j)
  C[ 1] = -0.50+0.00j  (analiticki: -0.5+0j)
  C[-1] = -0.50-0.00j  (analiticki: -0.5+0j)
  C[ 2] = -0.00-1.00j  (analiticki:  0-1j)
  C[-2] = -0.00+1.00j  (analiticki:  0+1j)
```

Programski kod 8.2

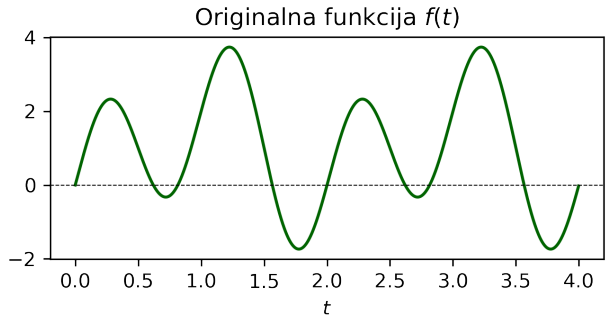
```
# graficki prikaz: originalna vs. rekonstruirana funkcija
t = np.arange(0, 2* T, T / 1000)

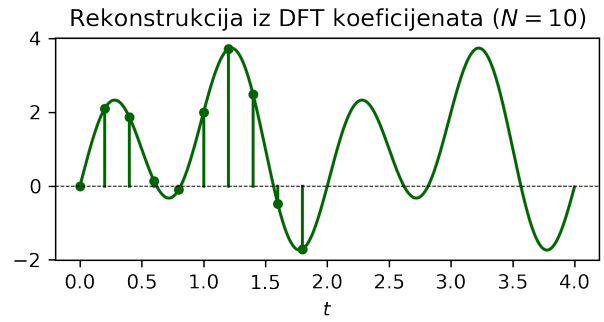
# originalna funkcija
x = 1 + 2 * np.sin(2 * w0 * t) - np.cos(w0 * t)

# rekonstrukcija iz DFT koeficijenata
apr = Ck[0] * np.ones(len(t))
for m in range(1, M + 1):
    apr = apr + Ck[m] * np.exp(1j * m * w0 * t) \
              + Ck[-m] * np.exp(-1j * m * w0 * t)

sis.dijagram(t, x,
             naslov='Originalna funkcija $f(t)$')

sis.dijagram(serije=[dict(t=t, x=np.real(apr)),
                     dict(t=t1, x=x1, tip='uzorci', marker = 'o')],
             naslov=f'Rekonstrukcija iz DFT koeficijenata ($N={N}$)')
```





Rezultat programskog koda 8.2 potvrđuje poklapanje DFT koeficijenata sa analitičkim vrijednostima. Prikazane su originalna funkcija $f(t)$, uzorci u trenucima t_k i rekonstruirana funkcija iz DFT koeficijenata. Savršeno poklapanje originala i rekonstrukcije potvrđuje da DFT daje egzaktne koeficijente Fourierovog reda za trigonometrijske polinome, pod uslovom $N > 2M$.

8.3.3 Približno određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičkih funkcija

Neka je data periodička funkcija $x(t)$, (slika 8.10.), koja se može posmatrati kao izvedena periodička funkcija funkcije $x_0(t)$, tako da vrijedi:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_0(t - nT_0) \tag{8.61}$$

Tada se $x(t)$ može napisati preko Poissonove sumacione formule:

$$x(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_0\left(jm\omega_0\right) e^{jm\omega_0 t} \tag{8.62}$$

gdje je $X_0(j\omega)$ Fourierova transformacija funkcije $x_0(t)$. Poređenjem ovog izraza sa Fourierovim redom za $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{jm\omega_0 t} \tag{8.63}$$

dolazi se do zaključka da je:

$$C_m = \frac{1}{T_0} X_0\left(jm\omega_0\right) \tag{8.64}$$

Problem računanja koeficijenata Fourierovog reda se tako svodi na računanje uzoraka spektra funkcije $x_0(t)$. Međutim, posmatrajući samo izvedenu periodičku fukciju nije uvijek moguće jednoznačno odrediti osnovnu funkciju od koje je ona sadržana - a kao što je poznato, diskretizacijom funkcije se proširuje osnovni spektar, pojavljuju komplementarni spektralni pojasevi i može doći do aliasinga. Zbog toga je nešto teže uspostaviti vezu između uzoraka periodične funkcije (i njenog spektra) i koeficijenata razvoja u Fourierov red iste funkcije.

Između uzoraka neke izvedene periodičke funkcije i uzoraka spektra zvjezdaste funkcije postoji odnos:

$$F^*\left(jm\omega_0\right) = \sum_{k=0}^{N-1} f_{T_0}\left(kT_1\right) W_N^{mk}, \quad T_1 = \frac{T_0}{N} \tag{8.65}$$

koja je ranije izvedena (relacija (8.19). U ovom slučaju je:

$$F^*\left(jm\omega_0\right) = X_0^*\left(jm\omega_0\right) \tag{8.66}$$

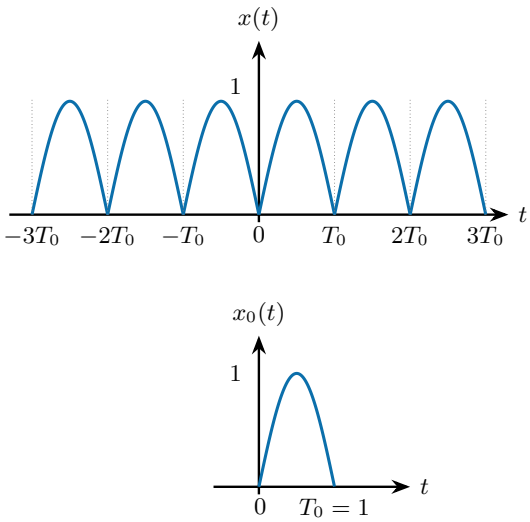
$$f_{T_0}\left(kT_1\right) = x\left(kT_1\right) \tag{8.67}$$

Tako se dobije:

$$X_0^*\left(jm\omega_0\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x\left(kT_1\right) W_N^{km} \tag{8.68}$$

Spektar zvjezdaste funkcije $X_0^*(j\omega)$ dat je izrazom:

$$X_0^*(j\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_0\left(j\omega - jn\omega_1\right) \tag{8.69}$$



Slika 8.10: Izvedena periodička funkcija i funkcija od koje je izvedena (osnovni period).

Ako su spektri, u prethodnoj formuli, dovoljno udaljeni jedan od drugog, onda približno važi:

$$X_0^*(j\omega) \cong \frac{1}{T_1} X_0(j\omega) \quad \text{za} \quad |\omega| < \frac{\omega_1}{2} \tag{8.70}$$

Za uzorke je:

$$X_0\left(jm\omega_0\right) \cong T_1 X_0^*\left(jm\omega_0\right) \tag{8.71}$$

Kako je $N\omega_0 = \omega_1$, odnosno $N\omega_0/2 = \omega_1/2$, to m uzima vrijednosti između $0 \leq m \leq N/2$. Dakle, sve do vrijednosti $m = N/2$ koeficijenti se mogu približno računati po formuli:

$$C_m = \frac{1}{T_0} X_0\left(jm\omega_0\right) \cong \frac{T_1}{T_0} X_0^*\left(jm\omega_0\right) = \frac{T_1}{T_0} \sum_{k=0}^{N-1} x\left(kT_1\right) W_N^{mk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x\left(kT_1\right) W_N^{mk} \tag{8.72}$$

Da bi se računski odredili ovi koeficijenti, prvo treba formirati sekvencu $x[k] = x\left(t = kT_1\right)$, a zatim naći koeficijente diskretne Fourierove transformacije $X[m]$ koji odgovaraju $X[m] = X_0^*\left(j\omega = jm\omega_0\right)$. Tako se koeficijenti Fourierovog reda mogu približno odrediti iz relacije (8.72), po formuli:

$$C_m \cong \frac{X(m)}{N} \quad \text{za} \quad m = 0, 1, \ldots \frac{N}{2} - 1 \tag{8.73}$$

Rezultat je tačniji što je m manje. Kada se m približava granici $N/2$, spektar zvjezdaste funkcije čini ne samo centralni spektar već i prvi desno translirani spektar, te aproksimacija data za C_m daje veću grešku. Također, analogno se pokazuje da izraz (8.73) vrijedi i za $m = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \ldots, -1$.

8.3.4 Približno određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičkih funkcija u Pythonu

Primjer 8.6:

Napraviti program u Pythonu za određivanje koeficijenata Fourierovog reda periodičke trapezoidne funkcije perioda $T_0 = 8$, uzorkovane sa $N = 12$ uzoraka. Usporediti koeficijente dobijene DFT-om sa koeficijentima izračunatim iz definicione relacije i ilustrirati periodičnost DFT spektra.

Rješenje:
Za razliku od trigonometrijskog polinoma (primjer 8.5) gdje DFT daje egzaktne koeficijente, ovdje se radi o aproksimaciji. Referentni koeficijenti C_m računaju se iz definicione relacije numeričkim integriranjem na gustoj vremenskoj mreži ($T_{\min} = 0.0001$), dok se DFT koeficijenti dobijaju prema relaciji (8.73) iz svega $N = 12$ uzoraka:

$$C_m \cong \frac{X(m)}{N}, \quad m = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$$

Da bi se uočila ključna razlika između C_m i $X(m)/N$, spektri su prikazani na opsegu $m \in [-15, 15]$, koji je širi od jednog perioda DFT sekvence $N = 12$.

Programski kod 8.3

```
# parametri
T0  = 8       # period funkcije
N   = 12      # broj uzoraka
T1  = T0 / N  # period uzorkovanja
w0  = 2 * np.pi / T0

def trapez(t, T0):
    """Trapezoidna periodicna funkcija (definirana analiticki)."""
    t = t % T0
    x = np.zeros(len(t))
    for i, ti in enumerate(t):
        if   0 <= ti < 1: x[i] = ti
        elif 1 <= ti < 3: x[i] = 1
        elif 3 <= ti < 5: x[i] = 1 - (ti - 3)
        elif 5 <= ti < 7: x[i] = -1
        elif 7 <= ti < 8: x[i] = (ti - 7) - 1
    return x

# koeficijenti Cm iz definicione relacije
ts_def = 0.0001
t_def  = np.arange(0, T0, ts_def)
x_def  = trapez(t_def, T0)

m_max = 15
m_os  = np.arange(-m_max, m_max + 1)
C_def = np.zeros(len(m_os), dtype=complex)
for i, m in enumerate(m_os):
    C_def[i] = ts_def / T0 * np.sum(
```

```
        x_def * np.exp(-1j * m * w0 * t_def))

# DFT koeficijenti Cm ~= X(m)/N, periodicni po N
t1 = np.arange(N) * T1
x1 = trapez(t1, T0)
X  = sis.fft(x1)
C_dft = np.array([X[m % N] / N for m in m_os])

# ispis koeficijenata za m = 0, 1, ..., N//2
print(f"{'m':>3}  {'|Cm| def':>10}  {'|Cm| DFT':>10}")
for i, m in enumerate(m_os):
    if 0 <= m <= N // 2:
        print(f"{m:>3}  {abs(C_def[i]):>10.4f}  {abs(C_dft[i]):>10.4f}")
```

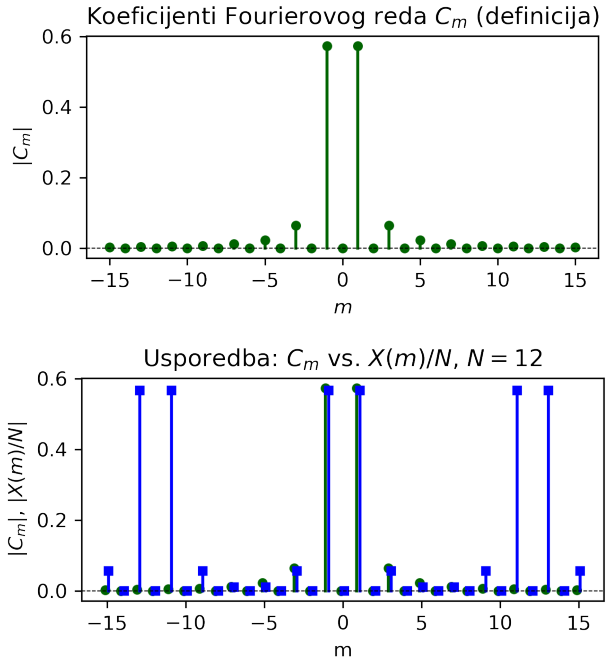
```
  m    |Cm| def    |Cm| DFT
  0      0.0000      0.0000
  1      0.5732      0.5665
  2      0.0000      0.0000
  3      0.0637      0.0556
  4      0.0000      0.0000
  5      0.0229      0.0109
  6      0.0000      0.0000
```

Na prvom dijagramu u okviru programskog koda 8.4 prikazani su koeficijenti $|C_m|$ iz definicione relacije – spektar je aperiodičan i opada prema nuli za veće $|m|$. Na donjem dijagramu prikazana je usporedba $|C_m|$ (zeleno) i $|X(m)/N|$ (plavo) i to tako da su koeficijenti malo smaknuti na apscisi radi lakše vizualizacije. Jasno se vidi da je DFT spektar periodičan po $N = 12$ – vrijednosti koje C_m dostiže za $|m| > N/2$ DFT periodički ponavlja, što je direktna posljedica periodičnosti DFT. Obzirom na spektralnu neograničenost polaznog signala, aproksimacija (8.73) postaje sve manje tačna kako se m približava granici $N/2$ i odgovarajućim multiplima.

Programski kod 8.4

```
sis.dijagram(m_os, np.abs(C_def), tip='uzorci',
         x_labela='$m$',y_labela='$|C_m|$',
         naslov='Koeficijenti Fourierovog reda $C_m$ (definicija)')


sis.dijagram(serije=[dict(t=m_os-0.1, x=np.abs(C_def), tip='uzorci'),
                dict(t=m_os+0.1, x=np.abs(C_dft), tip='uzorci',
                     stil='b', marker='s')], x_labela='m',
                y_labela='$|C_m|$, $|X(m)/N|$',
                naslov=f'Usporedba: $C_m$ vs. $X(m)/N$, $N={N}$')
```



8.3.5 Približno određivanje uzoraka spektra kontinualnih funkcija

Spektar kontinualne funkcije $f(t)$ definira se kao:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8.74}$$

Ako se pretpostavi da se sve vrijednosti funkcije $f(t)$, koje su značajno različite od nule, nalaze izmedu $-T$ i $+T$, onda se dobije aproksimativni izraz:

$$F(j\omega) = \int_{-T}^{+T} f(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8.75}$$

Zatim se integral (8.75) aproksimira sumom, uzimajući N uzoraka u posmatranom intervalu:

$$F(j\omega) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f(k\Delta t)e^{-jk\omega\Delta t} \cdot \Delta t, \quad \Delta t = \frac{2T}{N} \tag{8.76}$$

Računanje po ovom izrazu zahtijeva N množenje uzoraka sa $e^{-jk\omega t}$. Ako se žele izračunati uzorci spektra na učestanostima $k\omega_0$, onda je:

$$F\left(jm\omega_0\right) = \sum_{k=-N/2}^{+N/2} f(k\Delta t)e^{-jkm\omega_0\Delta t} \cdot \Delta t \tag{8.77}$$

Za računanje M tačaka spektra potrebno je MN množenja, što ovaj postupak čini veoma dugim za veliki broj tačaka. Umjesto da se spektar računa po definiciji, može se koristiti približna formula:

$$F(j\omega) \cong T_1 F^*(j\omega), \quad -\frac{\omega_1}{2} < \omega < \frac{\omega_1}{2} \tag{8.78}$$

koja važi ako su zadovoljeni uslovi:

$$F(j\omega) \cong 0 \quad \text{za} \quad |\omega| \geq \omega_c \quad \wedge \quad \frac{\omega_1}{2} > \omega_c \tag{8.79}$$

Uzorci spektra zvjezdaste funkcije mogu se dobiti iz relacije (8.19):

$$F^*\left(jm\omega_0\right) = \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{mk} f_{T_0}\left(kT_1\right), \quad T_1 = \frac{T_0}{N}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \tag{8.80}$$

za čije računanje se može koristiti algoritam brze Fourierove transformacije. Ovdje je:

$$f_{T_0}\left(kT_1\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f\left(kT_1 - mT_0\right) \tag{8.81}$$

Dakle, za računanje približnih vrijednosti spektra $F(j\omega)$ postupak je slijedeći:

1. bira se rastojanje između uzoraka spektra ω_0,
2. bira se ω_1 tako da je $(\omega_1/2) > \omega_M$, $\omega_1 = N\omega_0$, $N = 2^r$, r - cijeli broj. Ako ω_M nije poznato, pretpostavlja se,
3. računaju se vrijednosti $f_{T_0}\left(kT_1\right)$ za $k = 0, 1, \ldots, N-1$, i te vrijednosti se obilježavaju sa $f(k)$,
4. računaju se koeficijenti diskretne Fourierove transformacije $F(m)$ za $m = 0, 1, \ldots, N-1$.

Dobijene vrijednosti koeficijenta diskretne Fourierove transformacije $F(m)$ predstavljaju uzorke spektra kontinualne funkcije.

8.3.6 Približno određivanje uzoraka spektra kontinualnih funkcija u Pythonu

Primjer 8.7:

Napraviti program u Pythonu za određivanje uzoraka spektra kontinualne funkcije $f(t) = p(t/2)$ (pravougaoni impuls širine $a = 2$) pomoću DFT. Uporediti dobijene uzorke spektra sa analitičkim spektrom.

Rješenje:
Analitički, spektar pravougaonog impulsa $p(t/a)$ je dat sa:

$$F(j\omega) = a \cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{a\omega}{2}\right)$$

Za numeričko određivanje uzoraka spektra koristi se aproksimacija (8.78):

$$F(jm\omega_0) \cong T_1 \cdot X(m)$$

gdje je $X(m)$ DFT uzorkovane funkcije, a $T_1 = T_0/N$ period uzorkovanja. Interval posmatranja iznosi $T_0 = 8$, a broj uzoraka $N = 64$, što daje period uzorkovanja $T_1 = 0.125$ i frekventni korak $\omega_0 = 2\pi/T_0 \approx 0.785$.
Budući da DFT pretpostavlja da signal počinje u $t = 0$, impuls se smješta na početak intervala — vrijednosti $f(t) = 1$ postavljaju se za $t \leq a/2$ i $t \geq T_0 - a/2$, što je ekvivalentno centriranom impulsu zbog periodičnosti DFT. Centriranje spektra može se postići funkcijom `np.fft.fftshift`.

Programski kod 8.5

```
# parametri
a  = 2      # sirina pravougaonog impulsa
T0 = 8      # interval posmatranja
N  = 64     # broj uzoraka
T1 = T0 / N        # period uzorkovanja
w0 = 2 * np.pi / T0   # frekventni korak

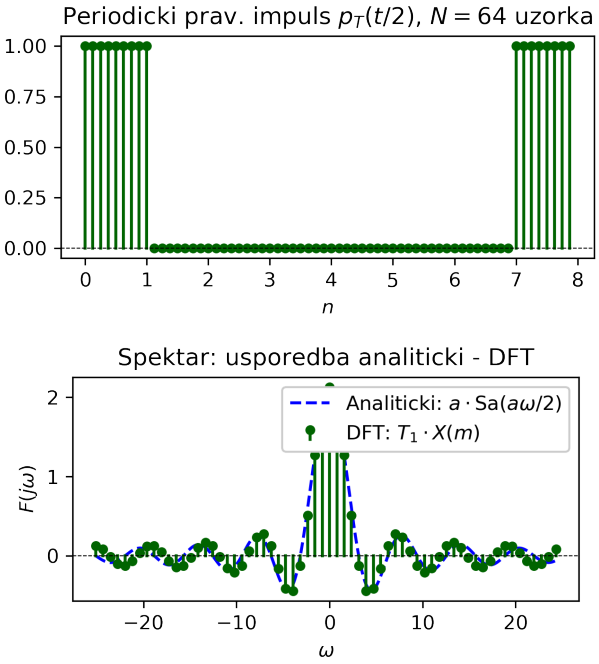
# vremenska baza [0, T0) - impuls smjesten na pocetak
t1 = np.arange(N) * T1
x1 = np.where((t1 <= a/2) | (t1 >= T0 - a/2), 1.0, 0.0)

# DFT i aproksimacija spektra: F(jmw0) ~= T1 * X(m)
X    = sis.fft(x1)
X_sh = sis.fftshift(X)
m_os = np.arange(-N // 2, N // 2)
w_os = m_os * w0
F_dft = T1 * X_sh

# gusta frekventna osa za analiticki spektar
w_cont = np.linspace(w_os[0], w_os[-1], 1000)
F_def  = a * np.sinc(a * w_cont / (2 * np.pi))

sis.dijagram(t1, x1, tip='uzorci',
         naslov=f'Periodicki prav. impuls $p_T(t/{a})$, $N={N}$ uzorka')


sis.dijagram(serije=[
             dict(t=w_cont, x=F_def, stil='b--', oznaka=
                  r'Analiticki: $a \cdot \mathrm{Sa}(a\omega/2)$'),
             dict(t=w_os, x=np.real(F_dft), tip='uzorci',
                  marker = 'o', oznaka='DFT: $T_1 \cdot X(m)$'),
             ],
             x_labela=r'$\omega$', y_labela=r'$F(j\omega)$',
             naslov='Spektar: usporedba analiticki - DFT')
```



Na slikama u okviru programskog koda 8.5 su prikazani uzorkovani signal, kao i usporedba analitički dobivenog spektra (crtkano plavo) i DFT uzoraka (zeleno). Vidi se dobro poklapanje DFT uzoraka sa analitičkom Sa funkcijom. Manja greška aproksimacije posljedica je aliasinga – spektar $p(t/2)$ nije spektralno ograničen, pa dolazi do aliasinga pri uzorkovanju. Povećanjem N (tj. smanjenjem T_1) greška se smanjuje, što se može provjeriti mijenjanjem parametra N u kodu.

8.3.7 Konvolucija dvije sekvence

Neka sekvence $f[n]$ i $h[n]$ imaju dužine N, i neka je:

$$\begin{aligned} h(n) &= 0, \quad \text{za} \quad n < 0 \quad \wedge \quad n \geq N \\ f(n) &= 0, \quad \text{za} \quad n < 0 \quad \wedge \quad n \geq N \end{aligned} \tag{8.82}$$

Rezultat konvolucije dvije kauzalne sekvence je:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \cdot h[n-k] = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot h[n-k] \tag{8.83}$$

Sekvenca $g[n]$ je jednaka nuli za $n < 0$ i $n > 2N-1$. Za računanje vrijednosti $g(n)$ treba napraviti N množenja, a pošto nenultih vrijednosti N ima $(2N-2)$, treba napraviti $(2N-2) \cdot N$ množenja.

Trajanje računanja može se skratiti primjenom brze Fourierove transformacije. Kako sekvenca $g[n]$ ima $2N$ vrijednosti, mogu se formirati periodičke sekvence $\tilde{f}[n]$, $\tilde{h}[n]$ i $\tilde{g}[n]$, sa periodom $2N$, pri čemu je:

$$\begin{aligned}\tilde{f}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f[n-k\cdot 2N]\\ \tilde{h}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k\cdot 2N]\\ \tilde{g}[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[n-k\cdot 2N]\end{aligned} \tag{8.84}$$

Za periodičke sekvence može se definirati periodička konvolucija:

$$g_p[n] \triangleq \tilde{f}[n] * \tilde{h}[n] = \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{f}(k)\cdot \tilde{h}[n-k] \tag{8.85}$$

$g_p[n]$ je također periodička sekvenca perioda $2N$. Može se pokazati da je $g_p[n] = g[n]$ za $0 \le n < 2N$. Naime, sekvenca $\tilde{f}[k]$ je definirana prema relaciji (8.84) sa:

$$\tilde{f}[k] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f[k-i\cdot 2N] \tag{8.86}$$

Ako je $0 \le k \le 2N$, onda je:

$$-i\cdot 2N < k - i\cdot 2N < (1-i)\cdot 2N \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Odavde se vidi da se $k - i\cdot 2N$ nalazi u intervalu $(0, 2N)$ samo ako je $i = 0$. Za ostale $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ je $k - i\cdot 2N$ van intervala $(0, 2N)$, a tim prije i van intervala $(0, N)$, pa je $f(k - i\cdot 2N) = 0$. Znači, za $k \in (0, 2N)$ u sumi datoj relacijom (8.86) ostaje samo član koji odgovara $i = 0$:

$$\tilde{f}(k) = f(k), \quad \forall k \in (0, 2N)$$

Isto tako je:

$$\tilde{h}(k) = h(k), \quad \forall k \in (0, 2N)$$

Dakle:

$$g_p[n] = \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{f}(k)\cdot \tilde{h}[n-k] = \sum_{k=0}^{n} f(k)\cdot h[n-k] = g[n] \quad (0 \le n < 2N) \tag{8.87}$$

Neka sekvence $\tilde{f}[n]$ i $\tilde{h}[n]$ imaju diskretnu Fourierovu transformaciju $\tilde{F}(k)$ i $\tilde{H}(k)$. Tada je:

$$\tilde{f}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{F}(k)\cdot W_{2N}^{-kn} \tag{8.88}$$

$$\tilde{h}(n-r) = \frac{1}{2N} \sum_{m=0}^{2N-1} \tilde{H}(m) \cdot W_{2N}^{-m(n-r)} \tag{8.89}$$

Ako se vrijednosti $\tilde{f}(n)$ i $\tilde{h}(n-r)$ uvrste u izraz za periodičku konvoluciju (8.85), dobije se:

$$\begin{aligned} g(n) &= \sum_{r=0}^{2N-1} \tilde{f}(r) \cdot \tilde{h}(n-r) \\ &= \frac{1}{4N^2} \sum_{r=0}^{2N-1} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{m=0}^{2N-1} \tilde{F}(k) \cdot W_{2N}^{-kr} \tilde{H}(m) W_{2N}^{-m(n-r)} \\ &= \frac{1}{4N^2} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{m=0}^{2N-1} \tilde{F}(k) \cdot \tilde{H}(m) W_{2N}^{-mn} \sum_{r=0}^{2N-1} W_{2N}^{r(m-k)} \end{aligned} \tag{8.90}$$

Kako je:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{2N-1} W_{2N}^{r(m-k)} &= \sum_{r=0}^{2N-1} e^{-j\frac{2\pi}{2N} \cdot r(m-k)} = \frac{1 - e^{-j\frac{\pi}{N} \cdot r(m-k) \cdot 2N}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{N} \cdot (m-k)}} \\ &= \frac{1 - e^{-j2\pi(m-k)}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{N} \cdot (m-k)}} = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ 2N, & m = k \end{cases} \end{aligned} \tag{8.91}$$

to periodička konvolucija postaje:

$$\begin{aligned} g(n) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{m=0}^{2N-1} \tilde{F}(k) \cdot \tilde{H}(m) W_{2N}^{-mn} \\ &= |m = k| = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{F}(k) \cdot \tilde{H}(k)(k) W_{2N}^{-kn} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{G}(k) W_{2N}^{-kn} \end{aligned} \tag{8.92}$$

Prema tome, za računanje $g(n)$ koristi se slijedeći algoritam:

1. odrede se $\tilde{F}[k]$ i $\tilde{H}[k]$ kao DFT izvedenih sekvenci $\tilde{f}[n]$ i $\tilde{h}[n]$,
2. odredi se $\tilde{G}(k) = \tilde{F}(k) \cdot \tilde{H}(k)$,
3. iz $\tilde{G}(k)$ odredi se $\tilde{g}(n)$ prema relaciji: $\tilde{g}(n) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} \tilde{G}(k) W_{2N}^{-kn}$, odakle se ekstraktuje $g[n]$.

8.3.8 Konvolucija dvije sekvence u Pythonu

Primjer 8.8:

Neka su date sekvence:

$$f[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1,2,3 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}, \quad h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0,1 \\ -1, & n = 2,3 \\ 0, & \text{za ostale } n \end{cases}$$

a) Odrediti konvoluciju tih sekvenci.
b) Odrediti periodičku konvoluciju sekvenci $\tilde{f}[n]$ i $\tilde{h}[n]$ i pokazati da daje isti rezultat kao linearna konvolucija.

Rješenje:
Obje sekvence imaju dužinu $N = 4$, pa rezultat linearne konvolucije ima $2N - 1 = 7$ članova, a periodička konvolucija se formira sa periodom $2N = 8$.
Za linearnu konvoluciju koristi se funkcija `np.convolve`, dok se periodička konvolucija računa prema algoritmu iz relacija (8.88)–(8.92):

1. sekvence $f[n]$ i $h[n]$ proširuju se nulama (*zero-padding*) na dužinu $2N$,
2. računaju se DFT sekvenci: $F[k] = DFT\{f[n]\}$, $H[k] = DFT\{h[n]\}$,
3. množi se u frekventnom domenu: $G[k] = F[k] \cdot H[k]$,
4. primjenjuje se inverzna DFT: $g_p[n] = DFT^{-1}\{G[k]\}$.

Programski kodovi 8.6 i 8.7 daju izračun i vizualizaciju obične i periodičke konvolucije.

Programski kod 8.6

```
# definiranje sekvenci
f = np.array([1, 1, 1, 1])      # f[n], n = 0,1,2,3
h = np.array([1, 1, -1, -1])    # h[n], n = 0,1,2,3
N = len(f)                      # duzina sekvenci N=4

# a) linearna konvolucija - direktno
g_lin = np.convolve(f, h)       # rezultat ima 2N-1 = 7 clanova

# b) periodicka konvolucija preko FFT (zero-padding na 2N)
f_pad = np.zeros(2 * N); f_pad[:N] = f
h_pad = np.zeros(2 * N); h_pad[:N] = h

F = sis.fft(f_pad)              # DFT prosirenih sekvenci
H = sis.fft(h_pad)
G = F * H                       # mnozenje u frekventnom domenu
g_per = np.real(sis.ifft(G))    # inverzna DFT

print("Linearna konvolucija (np.convolve):")
print(f"  g[n] = {g_lin}")
print()
```

```
print("Periodicka konvolucija via FFT (2N tacaka):")
print(f"  g[n] = {np.round(g_per, 4)}")
```

```
Linearna konvolucija (np.convolve):
  g[n] = [ 1  2  1  0 -1 -2 -1]

Periodicka konvolucija via FFT (2N tacaka):
  g[n] = [ 1.  2.  1.  0. -1. -2. -1.  0.]
```

Ispis programa potvrđuje poklapanje linearne i periodičke konvolucije za $0 \leq n < 2N-1$. Može se uočiti da su vrijednosti identične za $n = 0, 1, \ldots, 6$, dok $g_p[7] = 0$ jer sekvenca $g[n]$ ima samo $2N-1 = 7$ nenultih vrijednosti. Ovo direktno potvrđuje relaciju (8.87).

Programski kod 8.7

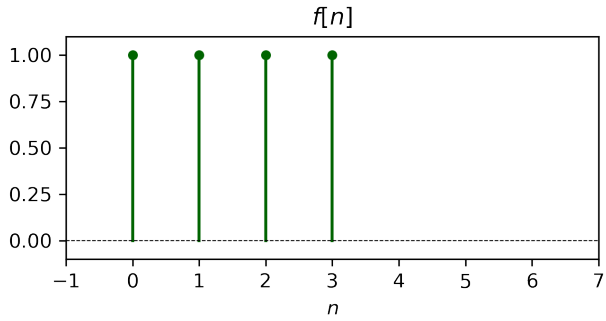
```
n_lin = np.arange(len(g_lin))
n_per = np.arange(2 * N)
xt = range(2 * N)
xl = (-0.5, 2*N - 0.5)

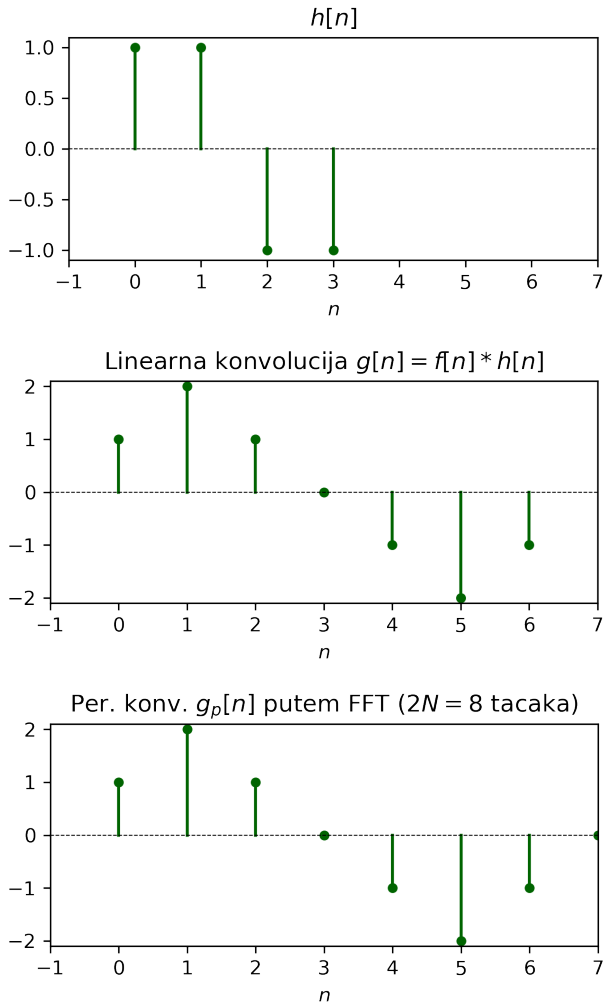
sis.dijagram(np.arange(N), f, tip='uzorci',
             xlim=[-1,7],ylim=[-0.1,1.1],
             naslov='$f[n]$')

sis.dijagram(np.arange(N), h, tip='uzorci',
             xlim=[-1,7],ylim=[-1.1,1.1],
             naslov='$h[n]$')

sis.dijagram(n_lin, g_lin, tip='uzorci',
             xlim=[-1,7],ylim=[-2.1,2.1],
             naslov='Linearna konvolucija $g[n] = f[n] * h[n]$')

sis.dijagram(n_per, g_per, tip='uzorci',
             xlim=[-1,7],ylim=[-2.1,2.1],
             naslov=f'Per. konv. $g_p[n]$ putem FFT ($2N={2*N}$ tacaka)')
```




h[n]
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1 0 1 2 3 4 5 6 7
n
Linearna konvolucija g[n] = f[n] * h[n]
2
1
0
−1
−2
−1 0 1 2 3 4 5 6 7
n
Per. konv. g_p[n] putem FFT (2N = 8 tacaka)
2
1
0
−1
−2
−1 0 1 2 3 4 5 6 7
n

9. Fourierova transformacija diskretnih signala - DTFT

U prethodnim poglavljima su obrađeni Fourierovi redovi, Fourierova transformacija te Diskretna Fourierova transformacija. Uočene su prednosti i nedostaci upotrebe ovih transformacija. Naime, Fourierovi redovi su korišteni za spektralnu analizu periodičkih signala gdje pokazuju svoj puni potencijal. Fourierova transformacija je proširila, odnosno poopćila, spektralnu analizu i na aperiodičke signale, ali je primijenjivana uglavnom na kontinualne signale i po pravilu su se dobivali kontinualni spektri. Specijalan slučaj kontinualnih signala su povorke impulsa koje predstavljaju ono što bi bilo bolje nazvati "diskretiziranim" nego "diskretnim" signalima.

Da bi se Fourierova transformacija efikasnije računala i implementirala na računaru uvedena je Diskretna Fourierova transformacija, odnosno Brza Fourierova transformacija. DFT po svojoj prirodi polazi od diskretnog signala, ali nameće zahtjev da je ulazna sekvenca konačnog trajanja ili da je periodična. Međutim, veliki broj sekvenci nije u općem slučaju niti konačnog trajanja niti periodički, već je aperiodički. Karakterističan primjer su odzivi IIR sistema/filtera (eng. *infinite impulse response*) koji po definiciji imaju neograničeno trajanje. Kao alat za spektralnu analizu diskretnih sekvenci neograničene dužine se uvode Z-transformacija i Fourierova transformacija diskretnog signala (DTFT) koje će biti obrađene u nastavku knjige. Fourierova transformacija diskretnog signala će biti uvedena kroz analizu frekventnog odziva diskretnih sistema.

9.1 Frekventni odziv LTI sistema

Ako je na ulazu LTI sistema ulazna sekvenca:

$$x[n] = e^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty \tag{9.1}$$

tj. kompleksna eksponencijalna sekvenca, čija je radijan-frekvencija ω, izlaz LTI sistema je:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} \end{aligned} \tag{9.2}$$

Ako se definira:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]e^{-j\omega k} \tag{9.3}$$

relacija (9.2) postaje:

$$y[n] = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} \tag{9.4}$$

$H\left(e^{j\omega}\right)$ opisuje promjenu kompleksne amplitude kompleksnog eksponencijalnog diskretnog signala, čija je *radijan-frekvencija* ω. Veličina $H\left(e^{j\omega}\right)$ naziva se *frekventni odziv sistema* (ili *frekvencijski odziv sistema*), čiji je impulsni odziv $h[n]$. Također, izraz (9.3) daje i definiciju *Fourierove transformacije diskretnog signala (DTFT)* od sekvence $h[n]$. U općem slučaju $H\left(e^{j\omega}\right)$ je kompleksna veličina i može se predstaviti kao:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = H_R\left(e^{j\omega}\right) + jH_I\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.5}$$

ili

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\arg H\left(e^{j\omega}\right)} \tag{9.6}$$

Umjesto $\arg H\left(e^{j\omega}\right)$, što predstavlja fazni spektar, često se koristi termin *grupno kašnjenje*, koje se definira kao negativni prvi izvod faze po ω, odnosno:

$$\text{grupno kašnjenje} \triangleq -\frac{d}{d\omega}\arg H\left(e^{j\omega}\right)$$

Frekventni odziv $H\left(e^{j\omega}\right)$ je kontinualna funkcija i periodična s periodom 2π. To znači da sistem daje identičan odziv na $e^{j\omega n}$ i na $e^{j(\omega+2\pi)n}$:

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j(\omega+2\pi)k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k} = H\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.7}$$

ili u općem slučaju:

$$H\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right) = H\left(e^{j\omega}\right), \quad \forall m \in \mathbb{Z} \tag{9.8}$$

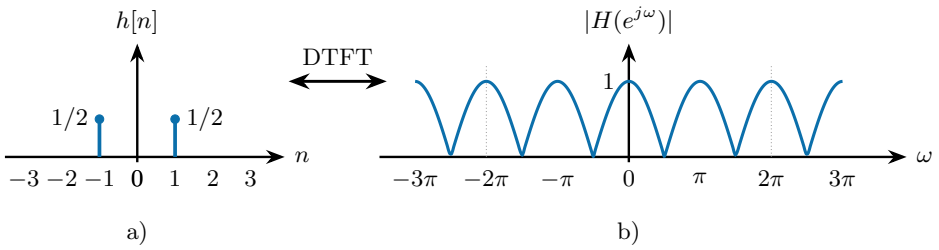
Kako je $H\left(e^{j\omega}\right)$ periodička funkcija perioda 2π, i kako se radijan frekvencije ω i $\omega + 2\pi$ suštinski ne razlikuju, slijedi da je potrebno specificirati $H\left(e^{j\omega}\right)$ samo na intervalu dužine 2π, tj. $0 \leq \omega \leq 2\pi$ ili $-\pi \leq \omega \leq \pi$. Poštujući ovaj interval „niske frekvencije“ su bliske nuli (odnosno parnom umnošku od π), dok su „visoke frekvencije" bliske $\pm\pi$ (odnosno neparnom umnošku od π).

Primjer 9.1:

Neka je impulsni odziv $h[n]$ prikazan na slici 9.1. Odrediti frekventni odziv sistema.

Rješenje:
Impulsni odziv se može analitički opisati relacijom:

$$h[n] = \frac{\delta[n+1] + \delta[n-1]}{2}$$



Slika 9.1: a) Impulsni odziv $h[n]$, b) amplitudni frekvencijski odziv $H(e^{j\omega})$ (primjer 9.1).

Fourierova transformacija tako dobijenog diskretnog signala je frekventni odziv sistema.

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2} = \cos\omega$$

Može se primijetiti i da je $H\left(e^{j\omega}\right) = \cos\omega$ periodička funkcija.

Primjer 9.2:

Naći frekventni odziv LTI sistema definiranog relacijom:

$$y[n] = x\left[n - n_d\right] \tag{9.9}$$

koji predstavlja sistem sa kašnjenjem, gdje je n_d cijeli pozitivan broj.

Rješenje:
Ako je ulaz u sistem $x[n] = e^{j\omega n}$ onda je prema relaciji (9.9):

$$y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = e^{j\omega n} \cdot e^{-j\omega n_d}$$

Na osnovu relacije (9.4) je:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega n_d}$$

Isti frekventni odziv mogao se dobiti koristeći impulsni odziv $h[n] = \delta\left[n - n_d\right]$. Na osnovu relacije (9.3) je:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left[n - n_d\right] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_d}$$

Koristeći Eulerove relacije, realni i imaginarni dio frekventnog odziva su:

$$H_R\left(e^{j\omega}\right) = \cos\left(\omega n_d\right), \quad H_I\left(e^{j\omega}\right) = -\sin\left(\omega n_d\right)$$

Magnituda i faza su:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|e^{-j\omega n_d}\right| = 1, \quad \arg H\left(e^{j\omega}\right) = -\omega n_d$$

dok je grupno kašenjenje dato sa:

$$-\frac{d}{d\omega}\arg H\left(e^{j\omega}\right) = -\frac{d}{d\omega}(-\omega n_d) = n_d$$

što je bilo i intuitivno za očekivati, uzimajući u obzir da sistem unosi kašnjenje od n_d uzoraka.

9.2 Direktna i inverzna Fourierova transformacija diskretnog signala

Pošto je $H\left(e^{j\omega}\right)$ periodička funkcija, onda ima Fourierov red ($h[n]$ zapravo odgovara C_n):

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \tag{9.10}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n} \tag{9.11}$$

Relacije (9.10) i (9.11) se mogu tretirati kao *inverzna i direktna Fourierova transformacija sekvence* $h[n]$. Ova transformacija egzistira ako red konvergira.
Fourierova transformacija se odnosi na bilo koji diskretni signal $x[n]$, tako da je:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \tag{9.12}$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \tag{9.13}$$

Izrazi (9.12) i (9.13) su Fourierov transformacioni par za diskretne signale (engl. *Discrete-time Fourier Transform - DTFT*), što se označava na slijedeći način:

$$F\{x[n]\} = X\left(e^{j\omega}\right) \quad \text{ili} \quad x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

Fourierova transformacija diskretnog signala DTFT je kompleksna funkcija učestanosti (radijan-frekvencije) ω, tako da se može napisati u obliku:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_R\left(e^{j\omega}\right) + jX_I\left(e^{j\omega}\right) = \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\arg x\left(e^{j\omega}\right)} \tag{9.14}$$

gdje su $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ i $\arg X\left(e^{j\omega}\right)$ magnituda i faza Fourierove transformacije i često se nazivaju magnitudni (amplitudni) i fazni spektar.

Ako suma u relaciji (9.13) ima konačnu vrijednost može se izračunati $X\left(e^{j\omega}\right)$, i kaže se da Fourijerova transformacija konvergira. Dovoljan uslov za konvergenciju izvodi se na slijedeći način:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\left|e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \tag{9.15}$$

što znači da niz čiji je zbir apsolutnih vrijednosti konačan može biti predstavljen pomoću Fourierove transformacije. S obzirom da impulsni odziv stabilnog sistema zadovoljava jednačinu (9.15), slijedi da svi stabilni sistemi imaju frekventni odziv koji je kontinualna i konačna funkcija sistema. Kako su stabilne sekvence apsolutno sumabilne, svaki stabilan sistem imaće konačnu Fourierovu transformaciju. Osim toga, svaka sekvenca konačne dužine je apsolutno sumabilna, odakle slijedi da se impulsni odziv sistema sa konačnim impulsnim odzivom (engl. Finite Impulse Response $-FIR$) uvijek može predstaviti pomoću Fourierove transformacije, kao i da je FIR sistem uvijek stabilan.

S druge strane postoje sekvence koje nisu apsolutno sumabilne, ali koje zadovoljavaju uslov kvadratne sumabilnosti:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty \tag{9.16}$$

Fourierova transformacija takvih sekvenci može se definirati preko granične vrijednosti ako se odustane od zahtjeva za uniformnom konvergencijom beskonačne sume date relacijom (9.13).

Često se ukazuje potreba za određivanjem Fourierove transformacije diskretnog signala koji nije ni apsolutno ni kvadratno sumabilan. Generalizacijom koncepta Fourierove transformacije, koja se ogleda u činjenici da se dozvoljava diskretnost i u transformacionom domenu (odnosno uvodi $\delta(\omega)$ u frekventni domen), može se odrediti i Fourierova transformacija takvih sekvenci. Primjeri takvih sekvenci su:

- sekvenca $x[n] = 1$ $(\forall n)$, čija je Fourierova transformacija:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2k\pi) \tag{9.17}$$

- kompleksna eksponencijalna sekvenca $x[n] = e^{j\omega_0 n}$, čija je Fourierova transformacija:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \omega_0 + 2k\pi\right) \tag{9.18}$$

- diskretna jedinična sekvenca $U[n]$, čija je Fourierova transformacija:

$$U\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2k\pi) \tag{9.19}$$

Primjer 9.3:

Odrediti Fourierovu transformaciju sekvence $x[n] = 1$ $(\forall n)$.

Rješenje:
Sekvenca $x[n] = 1$ ne zadovoljava ni uslov apsolutne, ni kvadratne sumabilnosti (9.16), jer suma (9.13) ne konvergira. Međutim, moguće je definirati Fourierovu

transformaciju sekvence $x[n] = 1$ koja predstavlja periodički niz impulsa.

Ekvivalentno Fourierovoj transformaciji konstante jedan iz kontinualnih signala i sistema ($1 \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$), Fourierova transformacija sekvence $x[n] = 1$ je:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2k\pi) \tag{9.20}$$

Impulsi u relaciji (9.20) su funkcije kontinualne varijable i po definiciji imaju beskonačnu visinu, nultu širinu i jediničnu površinu. Ovaj rezultat se principijelno potvrđuje tako što se formalnom zamjenom u relaciju (9.12) dobije korektan rezultat.

Primjer 9.4:

Za sekvencu $x[n]$, čija je Fourierova transformacija periodički impulsni niz:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \omega_0 + 2k\pi\right)$$

treba pokazati da je $x[n]$ kompleksna eksponencijalna sekvenca $e^{j\omega_0 n}$.

Rješenje:
Može se pretpostaviti da je: $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$. Kako se impulsi periodički ponavljaju svakih 2π, ovaj uslov će uvijek davati isto $X\left(e^{j\omega}\right)$. Signal $x[n]$ se može odrediti zamjenom $X\left(e^{j\omega}\right)$ u relaciju za inverznu Fourierovu transformaciju, uzimajući da je $k = 0$, jer integracija uključuje samo jedan period $-\pi \leq \omega_0 \leq \pi$. Tako je:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta\left(\omega - \omega_0\right) e^{j\omega n} d\omega$$

Kako $\delta\left(\omega - \omega_0\right)$ egzistira samo za $\omega = \omega_0$, to je $x[n] = e^{j\omega_0 n}\ \forall n$. Za $\omega_0 = 0$ to daje Fourierovu transformaciju sekvence $x[n] = 1$ za $\forall n$.

9.2.1 Osobine Fourierove transformacije diskretnih signala

Slično drugim linearnim transformacijama, Fourierova transformacija diskretnih signala zadovoljava mnoge opće osobine koje mogu znatno uprostiti postupak analize ili sinteze diskretnih sistema. Jedna grupa osobina proizilazi iz osobina linearnih sistema, a druga se odnosi na simetričnost signala i simetričnost Fourierove transformacije.

Linearnost

Ako su Fourierovi transformacioni parovi:

$$x_1[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X_1\left(e^{j\omega}\right)$$
$$x_2[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

vrijedi uslov o linearnosti Fourierove transformacije:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} a_1X_1\left(e^{j\omega}\right) + a_2X_2\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.21}$$

Fourierova transformacija vremenski i frekventno pomjerenog signala

Ako je:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

onda su transformacioni parovi za pomjerenu sekvencu i pomjereni spektar dati sa:

$$x[n-m] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega m}X\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.22}$$
$$e^{jn\omega_0}x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) \tag{9.23}$$

Refleksija vremenske sekvence

Pod refleksijom u vremenskom domenu podrazumijeva se promjena znaka cjelobrojne promjenljive n. Ako je:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

onda je transformacioni par za tu sekvencu

$$x[-n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{-j\omega}\right) \tag{9.24}$$

Ako je sekvenca $x[n]$ realna, onda je:

$$x[-n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X^*\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.25}$$

gdje * označava konjugovanu vrijednost.

Diferenciranje u frekventnom domenu

Ako sekvenca ima Fourierovu transformaciju:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

onda je transformacioni par za izvod Fourierove transformacije po promjenljivoj ω dat sa:

$$nx[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} j\frac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega} \tag{9.26}$$

Teorema o konvoluciji

Ako se sekvenca $x[n]$ dovede na ulaz LTI sistema, čiji je frekventni odziv $H\left(e^{j\omega}\right)$, i ako su odgovarajući transformacioni parovi:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$h[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} H\left(e^{j\omega}\right)$$

onda je odziv sistema opisanog impulsnim odzivom $h[n]$ na pobudu $x[n]$ dat konvolucijom:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Fourierov transformacioni par za konvoluciju je:

$$y[n] = x[n] * h[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \cdot H\left(e^{j\omega}\right) = Y\left[e^{j\omega}\right] \tag{9.27}$$

Dokaz ove osobine može se izvesti na slijedeći način:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x[n-k]e^{-j\omega n}$$

Ako se desna strana izraza proširi sa $e^{j\omega k} \cdot e^{-j\omega k}$ dobije se:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{-j\omega k}x[n-k]e^{-j\omega(n-k)}$$

Zamjenom redosljeda sumiranja, dobije se:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) \cdot X\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.28}$$

što je i trebalo dokazati. Također vrijedi:

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H\left(e^{j\omega}\right) \cdot X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega \tag{9.29}$$

Fourierova transformacija proizvoda dvije funkcije, modulacija ili teorema o prozorskoj funkciji (engl. Windowing Theorem)

Neka su odgovarajući transformacioni parovi:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$
$$w[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} W\left(e^{j\omega}\right)$$

Fourierov transformacioni par za proizvod sekvenci $y[n] = x[n] \cdot w[n]$ je:

$$x[n] \cdot w[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) \cdot W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\theta \tag{9.30}$$

Dokaz ove osobine može se izvesti na slijedeći način. Prvo se primjeni definicioni izraz (9.13) na sekvencu $y[n]$, a zatim se $x[n]$ izrazi pomoću inverzne Fourierove transformacije, čime se dobije:

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot w[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n] \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\theta}\right) \cdot e^{j\theta n} d\theta\right] e^{-j\omega n} \quad (9.31)$$

Promjenom redoslijeda sumiranja i integracije dobije se:

$$\begin{aligned} Y\left(e^{j\omega}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w[n] e^{-j(\omega-\theta)n}\right] X\left(e^{j\theta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) \cdot X\left(e^{j\theta}\right) d\theta \\ &= W\left(e^{j\omega}\right) \otimes X\left(e^{j\omega}\right) \end{aligned} \quad (9.32)$$

odnosno:

$$y[n] = x[n] \cdot w[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right) \otimes W\left(e^{j\omega}\right) = Y\left(e^{j\omega}\right) \quad (9.33)$$

gdje simbol $\otimes$ označava konvoluciju u frekventnom domenu. S obzirom da su funkcije $X\left(e^{j\omega}\right)$ i $W\left(e^{j\omega}\right)$ periodičke, takva konvolucija se naziva periodička ili cirkularna (ciklična) konvolucija, a konvolucioni integral se računa u toku jedne periode. Dakle, množenje diskretnih funkcija u vremenskom domenu odgovara cirkularnoj konvoluciji u spektralnom domenu.

Kada se uporedi konvoluciona i teoremu o modulaciji, dualnost Fourierove transformacije je evidentna. Međutim, za razliku od kontinualnih sistema, gdje je dualnost kompletna:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

diskretni sistemi imaju fundamentalnu razliku, jer je Fourierova transformacija suma, dok je inverzna Fourierova transformacija integral:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$$

Konvolucija dvije sekvence je konvoluciona suma i ekvivalentna je množenju periodičkih Fourierovih transformacija tih sekvenci. Množenje dvije sekvence je ekvivalentno periodičkoj konvoluciji odgovarajućih Fourierovih transformacija tih sekvenci.

Parsevalova teorema

Ako je Fourierov transformacioni par:

$$x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$$

onda je:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega \quad (9.34)$$

Podintegralna funkcija $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$ naziva se *spektralna gustina energije* pošto pokazuje spektralnu raspodjelu energije signala. Podrazumijeva se da je spektralna gustina energije definirana samo za signale čija je energija konačna.

Koristeći teoremu o konvoluciji može se izvesti i generalizirani oblik Parsevalove teoreme koji glasi:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot y^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) \cdot Y^*\left(e^{j\omega}\right) d\omega \tag{9.35}$$

Osobine simetrije Fourierove transformacije

Osobine simetrije Fourierove transformacije proizilaze iz definicionih izraza (9.12) i (9.13). Za objašnjenje osobina simetrije moraju se uvesti neke dodatne definicije koje se odnose na signal i njegovu transformaciju.

Konjugovano simetrična sekvenca je sekvenca $x_p[n]$ za koju vrijedi:

$$x_p[n] = x_p{}^*[-n] \tag{9.36}$$

Koncept konjugovane simetrije predstavlja poopćenje koncepta parnosti za kompleksne signale, odnosno sekvence.

Konjugovano antisimetrična sekvenca je sekvenca $x_n[n]$ za koju za koju vrijedi:

$$x_p[n] = x_p{}^*[-n] \tag{9.37}$$

gdje * označava konjugovanje. Koncept konjugovane antisimetrije predstavlja poopćenje koncepta neparnosti za kompleksne signale, odnosno sekvence.

Proizvoljna kompleksna sekvenca $x[n]$ može se uvijek rastaviti na sumu konjugovano simetrične sekvence i konjugovano antisimetrične sekvence:

$$x[n] = x_p[n] + x_n[n] \tag{9.38}$$

Iz definicija signala $x_p[n]$ i $x_n[n]$ i izraza (9.38) slijedi:

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x^*[-n]}{2}, \quad x_n[n] = \frac{x[n] - x^*[-n]}{2} \tag{9.39}$$

U skladu sa navedenim definicijama, na sličan način se može izvršiti i dekompozicija Fourierove transformacije signala na konjugovano simetrični i konjugovano antisimetrični dio transformacije:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_p\left(e^{j\omega}\right) + X_n\left(e^{j\omega}\right) \tag{9.40}$$

pri čemu je:

$$X_p\left(e^{j\omega}\right) = \frac{X\left(e^{j\omega}\right) + X^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2} \tag{9.41}$$

$$X_n\left(e^{j\omega}\right) = \frac{X\left(e^{j\omega}\right) - X^*\left(e^{-j\omega}\right)}{2} \tag{9.42}$$

U relacijama (9.41) i se (9.42) podrazumijeva da je $X_p\left(e^{j\omega}\right) = X_p^*\left(e^{-j\omega}\right)$ konjugovano simetrični, a $X_n\left(e^{j\omega}\right) = -X_n^*\left(e^{-j\omega}\right)$ konjugovano antisimetrični dio transformacije. Ako je Fourierova transformacija isključivo realna funkcija, onda je njen konjugovano simetrični dio parna funkcija, dok je konjugovano antisimetrični dio neparna realna funkcija.

U nastavku slijede neke od najvažnijih osobina. Ako se Fourierov transformacioni par označi sa $x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X\left(e^{j\omega}\right)$, onda važe slijedeće osobine simetrije:

Kompleksna sekvenca $x[n]$	**Realna sekvenca** $x[n]$
1. $x[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$	1. $X\left(e^{j\omega}\right) = X^*\left(e^{-j\omega}\right)$
2. $x^*[-n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X^*\left(e^{j\omega}\right)$	2. $X_R\left(e^{j\omega}\right) = X_R\left(e^{-j\omega}\right)$
3. $\mathrm{Re}\{x[n]\} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X_p\left(e^{j\omega}\right)$	3. $X_I\left(e^{j\omega}\right) = -X_I\left(e^{-j\omega}\right)$
4. $j\,\mathrm{Im}\{x[n]\} \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X_n\left(e^{j\omega}\right)$	4. $\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert = \left\lvert X\left(e^{-j\omega}\right)\right\rvert$
5. $x_p[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} X_R\left(e^{j\omega}\right)$	5. $\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\arg\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
6. $x_n[n] \overset{F.T.}{\longleftrightarrow} jX_I\left(e^{j\omega}\right)$	

Dokazi svih ovih osobina simetrije jednostavno se izvode iz definicionih relacija. Od posebnog značaja su osobine simetrije za realne signale, zbog toga što je većina diskretnih signala, koja se dobija diskretizacijom kontinualnih signala, realna.

9.2.2 Pregled važnijih transformacionih parova

Materija izložena u ovom poglavlju predstavlja osnovu za razumijevanje obrade diskretnih signala u transformacionom domenu. U tabeli 9.1 date su Fourierove transformacije nekih važnih i često korištenih diskretnih signala.

Tabela 9.1: Fourierove transformacije nekih diskretnih signala.

	Vremenski domen	**Fourierova transformacija**
1.	$\delta[n]$	1
2.	$\delta[n-m]$	$e^{-j\omega m}$
3.	$x[n]=1 \quad (-\infty<n<\infty)$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+2\pi k)$
4.	$a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert<l)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5.	$u[n]$	$\frac{1}{l-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+2\pi k)$
6.	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$
7.	$(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert<1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
8.	$\frac{\sin n\omega_c}{n\pi}$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<\omega_c\\ 0, & \omega_c<\lvert\omega\rvert<\pi\end{cases}$
9.	$x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le M\\ 0, & \text{za ostale } n\end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)}e^{-j\omega M/2}$
10.	$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\omega_0+2\pi k\right)$
11.	$\cos\left(\omega_0 n+\phi\right)$	$\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[e^{j\phi}\delta\left(\omega-\omega_0+2\pi k\right)+ +e^{-j\phi}\delta\left(\omega+\omega_0+2\pi k\right)\right]$
12.	$x[n]\cos\omega_0 n$	$0.5\left[X\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)+X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)\right]$

10. Z - transformacija

10.1 Uvod

Analiza signala i sistema u frekventnom domenu je standardna metoda koja se koristi u mnogim granama tehnike. Kao što je pokazano u poglavlju "Diskretni signali i sistemi" ako je sistem opisan diferentnom jednačinom, tj. implicitno, odziv se može dobiti primjenom rekurzije, uz primjenu četiri osnovne računske operacije. Za određivanje odziva u n-tom trenutku diskretnog vremena, moraju se prethodno odrediti odzivi za sve vrijednosti $k < n$. Međutim, iz rekurzije nije uvijek jednostavno naći generalni oblik odziva.

U nekim slučajevima, primjenom z-transformacije, moguće je dobiti odziv sistema bez ovih teškoća. U odnosu na diskretnu Fourierovu transformaciju i Fourierovu transformaciju diskretnog signala, z-transformacija odgovara uopćenijoj klasi ulaznih signala. Uvedena je da bi se otklonila neka ograničenja u primjeni prethodnih Fourierovih transformacija. Ako je signal dobiven diskretizacijom kontinualnog signala $f(t)$ sa intervalom diskretizacije T, onda se signal $f(t)$ može označiti sa $f(nT)$ gdje je n-ti uzorak signala $f(nT)$ označen sa $f(n)$. Diskretni signal $f[n]$ predstavlja niz (sekvencu) realnih ili kompleksnih brojeva definiranih u diskretnim vremenskim trenucima, gdje diskretno vrijeme n poprima sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

Odziv linearnog i stacionarnog (LTI) diskretnog sistema, u vremenskom domenu, ako je na njegov ulaz dovedena delta sekvenca, naziva se impulsnim odzivom. Odziv linearnog i stacionarnog sistema $g[n]$ na bilo koju ulaznu sekvencu $f[n]$ može se dobiti pomoću impulsnog odziva $h[n]$, odnosno preko konvolucione sume:

$$g[n] = f[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) \cdot h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot f[n-k] \tag{10.1}$$

Računanje konvolucione sume svodi se, u općem slučaju, na beskonačan broj operacija množenja i sabiranja. Ako ulaz u LTI sistem ima oblik:

$$f[n] = z^n \tag{10.2}$$

gdje je z kompleksni broj, prema relaciji (10.1) odziv sistema je:

$$g[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot z^{-k} \tag{10.3}$$

Ako se $H(z)$ definira kao:

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \cdot z^{-k} \tag{10.4}$$

onda za ulaz oblika $f(n) = z^n$ odziv sistema je:

$$g[n] = H(z) \cdot z^n \tag{10.5}$$

gdje je $H(z)$ funkcija sistema. To znači da ako je ulaz $f(n) = z_0^n$, odgovarajući izlaz je jednostavno z_0^n pomnožen vrijednošću $H(z)$ za $z = z_0$. Kako je $H(z_0)$ kompleksni broj, onda ima modul i fazni ugao. Međutim, iako izlaz ima eksponencijalni karakter kao i ulaz, modul izlaza je pomnožen modulom $H(z)$, a fazni ugao izlaza je pomjeren za fazni ugao $H(z)$.

10.2 Definicija z-transformacije

Z-transformacija omogućava predstavljanje sekvence $f[n]$ u zatvorenoj formi i preslikava sekvencu $f[n]$ - diskretni signal, u kontinualnu funkciju kompleksne promjenljive z. Time se omogućava primjena kompleksne analize u rješavanju problema diskretnih signala i sistema.

Z-transformacija se može posmatrati kao generalizacija Fourierove transformacije diskretnih signala, kao što se Laplaceova transformacija može posmatrati kao generalizacija Fourierove transformacije kontinualnih signala. Zbog toga z-transformacija ima veliki značaj pri projektovanju i analizi diskretnih signala i sistema.

Z-transformacija sekvence $f[n]$ definira se na slijedeći način:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \cdot z^{-n} \tag{10.6}$$

Funkcija $F(z)$, definirana relacijom (10.6) ima oblik Laurentovog reda. Relacija (10.6) skraćeno se obilježava na slijedeći način:

$$f[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F(z) \text{ ili } Z\{f[n]\} = F(z) \tag{10.7}$$

Relacija (10.7) daje vezu između diskretnog niza (sekvence) $f[n]$ i njegove z-transformacije. Takođe je:

$$Z^{-1}[Z\{f[n]\}] = f[n] \quad i \quad Z\left\{Z^{-1}[F(z)]\right\} = F(z) \tag{10.8}$$

gdje je Z^{-1} simbol za inverznu z-transformaciju. Relacija (10.6) definira dvostranu (bilateralnu) z-transformaciju koja se koristi za diskretne signale koji imaju kauzalni i antikazualni dio ("strogo" nekauzalni dio). **Važno je napomenuti da će se u nastavku teksta u svrhu veće fleksibilnosti, termini "nekauzalna sekvenca" i "nekauzalni dio" koristiti uglavnom u kontekstu opisa "antikauzalnih sekvenci" odnosno "antikauzalnih dijelova".** Naime, po definiciji nekauzalna sekvenca može imati i nenulte vrijednosti i za $n > 0$ (osim za $n < 0$), a antikauzalna ne može.

Unilateralna (jednostrana) z-transformacija se primijenjuje samo za kauzalne diskretne signale (sekvence), za koje je $f(n) = 0$ kada je $n < 0$. U definicionoj relaciji (10.6) donja granica je $n = 0$:

$$f[n] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) z^{-n} \tag{10.9}$$

Z-transformacija je funkcija kompleksne promjenljive, pa je važna njena interpretacija u kompleksnoj z-ravni, koja sadrži sve moguće vrijednosti argumenta z funkcije $F(z)$. Sve tačke u z-ravni, za koje je $|z| = 1$, predstavljaju krug jediničnog poluprečnika, tzv. jedinični krug (slika 10.1.). Kako je $z = |z|e^{j\omega} = Re^{j\omega}$, $0 \leq \omega < 2\pi$, to z-transformacija, za argumente z koji se nalaze na jediničnom krugu ($R = 1$), postaje Fourierova transformacija diskretnog signala $f[n]$:

$$F(z)|_{z=e^{j\omega}} = F\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-j\omega n} \tag{10.10}$$

Relacija (10.10) predstavlja direktnu Fourierovu transformaciju diskretnog signala koja je već izvedena u poglavlju 9, pretpostavljajući da je ulaz u LTI sistem sekvenca oblika $e^{j\omega n}$. Fourierova transformacija diskretnog signala se, dakle dobije zamjenom z sa $e^{j\omega}$, gdje je ω radijan frekvencija, i daje ugao između vektora koji određuje položaj tačke z na jediničnom krugu (slika 10.1.) i realne ose Re(z). Računanjem z-transformacije na jediničnom krugu, počevši od tačke $z = 1$ (što odgovara $\omega = 0$), preko $z = j$ ($\omega = \pi/2$), do $z = -1$ ($\omega = \pi$), dobija se Fourierova transformacija diskretnog signala za opseg $0 \leq \omega \leq \pi$. Slično, računanjem z-transformacije od tačke $z = -1$ ($\omega = \pi$), preko $z = -j$ ($\omega = 3\pi/2$), do $z = 1$ ($\omega = 2\pi$) dobija se Fourierova transformacija diskretnog signala za opseg $-\pi \leq \omega \leq 2\pi$. Ova interpretacija Fourierove transformacije diskretnog signala na jediničnom krugu je prirodno objašnjenje za njenu periodičnost, tj, važi:

$$F\left(e^{j\omega}\right) = F\left(e^{j(\omega+2\pi m)}\right) \tag{10.11}$$

za m cijeli broj. Kako je $F\left(e^{j\omega}\right)$ periodična funkcija, to se sekvenca $f[n]$ može predstaviti preko koeficijenata Fourierovog reda, tako da je:

$$f[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega \tag{10.12}$$

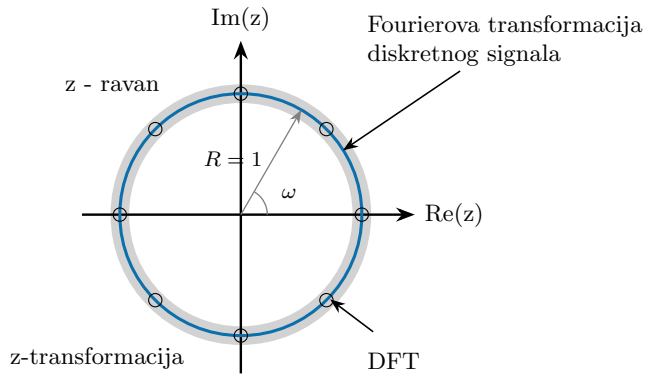
Relacija (10.12) je inverzna Fourierova transformacija diskretnog signala $f[n]$.

Sekvenca transformacionih koeficijenata diskretne Fourierove transformacije (DFT) dobije se računanjem z- transformacije u tačkama koje leže na jediničnom krugu na učestanostima $\omega_k = 2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$, (slika 10.1.). Tako je:

$$F\left(e^{j\omega_k}\right) = F(z)|_{z=e^{j\omega_k}} \tag{10.13}$$

10.2.1 Veza z-transformacije, Fourierove transformacije diskretnog signala (DTFT) i diskretne Fourierove transformacije (DFT)

Z-transformacija se može iskoristiti i za analizu ponašanja diskretnih sistema u prelaznom i stacionarnom režimu. Takođe, pošto se z-transformacija primjenjuje na isti diskretni signal kao i Fourierova transformacija ili diskretna Fourierova transformacija, postoji veza između transformacionih koeficijenata z-transformacije, Fourierove transformacije diskretnog signala i diskretne Fourierove transformacije.



Slika 10.1: Odnos z-transformacije, DTFT i DFT; z-transformacija je u cijeloj ravni, DTFT signala je na jediničnom krugu, DFT je u označenim tačkama na krugu.

Poređenjem definicionih izraza za z-transformaciju i Fourierovu transformaciju diskretnog signala datih relacijama (10.14) i (10.15):

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) z^{-n} \tag{10.14}$$

$$F\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-j\omega n} \tag{10.15}$$

uočava se velika sličnost. Vidi se da se prostom smjenom $z = e^{j\omega}$ iz $F(z)$ može dobiti $F\left(e^{j\omega}\right)$ i obrnuto. Dakle važi:

$$F(z)|_{z=e^{j\omega}} = F\left(e^{j\omega}\right) \tag{10.16}$$

odnosno, Fourierova transformacija diskretnog signala identična je z-transformaciji izračunatoj u tačkama koje leže na jediničnom krugu (slika 10.1.) kompleksne z-ravni za $z = e^{j\omega}, 0 \leq \omega < 2\pi$. Da bi relacija (10.16) važila, *oblast konvergencije funkcije* $F(z)$ *mora uključivati jedinični krug.*

Diskretna Fourierova transformacija sekvence $f[n]$ konačne dužine je funkcija diskretne ("frekventne") promjenljive k i ona nastaje diskretizacijom Fourierove transformacije. Definirana je izrazima ($\tilde{f}[n]$ je periodičko proširenje sekvence $f[n]$):

$$\tilde{F}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}(n) W_N^{nk}, \quad \tilde{f}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{F}(k) W_N^{-kn}, \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \tag{10.17}$$

Za kauzalnu sekvencu $f[n]$ konačne dužine N, DFT u z-ravni predstavljena je skupom tačaka $z_k = e^{j2\pi k/N}, 0 \leq k \leq N-1$, koje su uniformno raspoređene po jediničnom krugu na učestanostima $\omega_k = 2\pi k/N$, odnosno sekvenca transformacionih koeficijenata

DFT dobije se računanjem z-transformacije u tačkama koje leže na jediničnom krugu s jednakim ugaonim rastojanjima (slika 10.1.). Tako je:

$$F\left(e^{j\omega_k}\right) = F(z)|_{z=e^{j\omega_k}} \tag{10.18}$$

Na osnovu definicionog izraza za z-transformaciju sekvence konačne dužine N i relacije za inverznu DFT može se naći veza $F(z)$ i $F(k)$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi kn/N} \right) z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi k/N} z^{-1} \right)^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(W_N^{-k} z^{-1} \right)^n \end{aligned} \tag{10.19}$$

Kako je:

$$1 + q + q^2 + \ldots q^M = \frac{1 - q^{M+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(W_N^{-k} z^{-1}\right)^{N-1+1}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

to je tražena veza:

$$F(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{F(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \tag{10.20}$$

koja ima važnu primjenu u realizaciji jedne klase filterskih funkcija sa konačnim impulsnim odzivom (FIR). U izrazu (10.20) z-transformacija sekvence konačne dužine N izražena je preko N uzoraka nastalih uniformnim uzorkovanjem na jediničnom krugu. Ti uzorci su elementi DFT niza $F(k)$.

U nastavku izlaganja od interesa će biti cijela kompleksna ravan z, gdje je:

$$z = \mathrm{Re}\{z\} + j\,\mathrm{Im}\{z\} \tag{10.21}$$

10.2.2 Polovi i nule $F(z)$

Najčešći oblik z-transformacije, za inženjerske aplikacije, daje se kao odnos dva polinoma po z^{-1}, jer u općem slučaju predstavlja sisteme sa beskonačnim impulsnim odzivom (IIR), što je prikazano racionalnom funkcijom:

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots b_M z^{-M}} \tag{10.22}$$

Za neke vrijednosti kompleksne promjenljive z, z-transformacija signala $F(z)$ može biti jednaka nuli, i te kompleksne učestanosti nazivaju se nule z-transformacije. Za neke

vrijednosti kompleksne promjenljive z, z-transformacija signala $F(z)$ može biti beskonačno velika i te kompleksne učestanosti nazivaju se polovi z-transformacije. Informacije o ponašanju z-transformacije sadržane su u rasporedu nula i polova u kompleksnoj z-ravni. Relacija za z-transformaciju se može napisati i kao proizvod članova koji uključuju polove i nule $F(z)$:

$$F(z) = \frac{\frac{a_0}{b_0}\prod_{k=1}^{N}\left(1 - z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - p_k z^{-1}\right)} \tag{10.23}$$

U brojniku su nule funkcije $F(z)$ označene sa z_k, dok su polovi funkcije $F(z)$ u nazivniku i označeni su sa p_k. Položaj nula u z-ravni obilježava se znakom "o", a položaj polova znakom "$\times$". Polovi mogu biti i vrijednosti $z = 0$ i $z = \infty$.

10.2.3 Oblast konvergencije $F(z)$

Z-transformacija $F(z)$ definirana je samo za vrijednosti z za koje beskonačna suma iz relacije (10.6) konvergira. Potreban uslov za konvergenciju je apsolutna sumabilnost izraza $f(n) \cdot z^{-n}$ za sve vrijednosti n. Kako je $|f(n) \cdot z^{-n}| = |f(n) \cdot R^{-n}|$, da bi bio zadovoljen uslov apsolutne sumabilnosti, mora biti:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|f(n) \cdot R^{-n}\right| < \infty \tag{10.24}$$

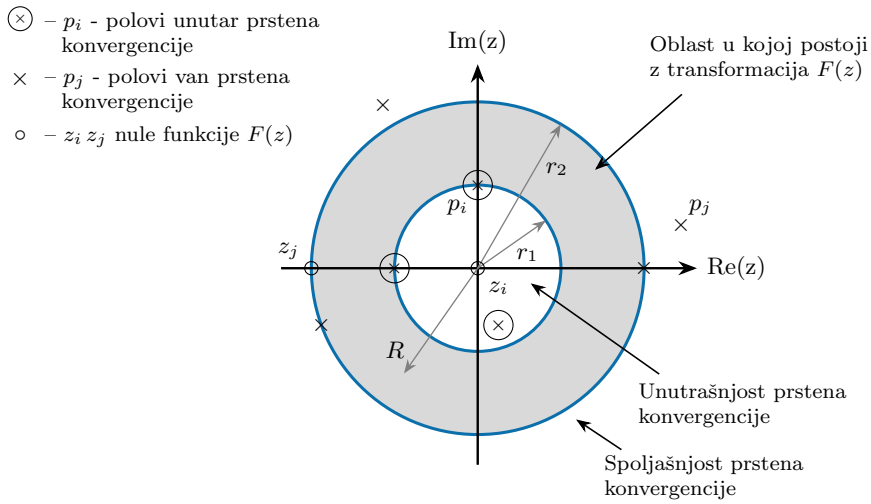
Oblast za koju je uslov (10.24) zadovoljen, naziva se oblast konvergencije (engl. *region of convergence - ROC*) z-transformacije. Ako se relacija (10.24) uporedi sa relacijom za Fourierovu transformaciju diskretnog signala (10.10), vidi se da suma u z-transformaciji može konvergirati i kada Fourierova transformacija ne konvergira. Z-transformacija egzistira i za signale koji nemaju Fourierovu transformaciju. Egzistencija Fourierove transformacije diskretnog signala zahtijeva apsolutnu sumabilnost sekvence $f[n]$, kao što Fourierova transformacija kontinualnog signala zahtijeva apsolutnu integrabilnost funkcije $f(t)$. Izborom vrijednosti R, osigurava se apsolutna sumabilnost proizvoda $f(n) \cdot R^{-n}$, iako sekvenca $f[n]$ nije apsolutno sumabilna.

Npr. Fourierova transformacija sekvence $f[n] = \alpha^n u[n]$ ne postoji za $|\alpha| > 1$ jer je tada $f[n]$ eksponencijalno rastuća sekvenca. Međutim, ako se izabere $R > |\alpha|$, onda R^{-n} opada brže nego što $f[n]$ raste, tako da je proizvod $f(n) \cdot R^{-n}$ apsolutno sumabilan, pa z-transformacija egzistira.

Dakle, mogućnost primjene z-transformacije za obradu diskretnih signala koji nemaju Fourierovu transformaciju, izuzetna je prednost u odnosu na Fourierovu transformaciju diskretnog signala. Iz oblasti konvergencije z-transformacije može se zaključiti da li diskretni signal ima Fourierovu transformaciju ili ne. Ako oblast konvergencije z-transformacije nekog diskretnog signala uključuje jedinični krug, onda taj diskretni signal ima Fourierovu transformaciju.

U općem slučaju z-transformacija data relacijom (10.6) u obliku beskonačne sume, definirana je u prstenu konvergencije (slika 10.2.) u z-ravni, centriranom u koordinatnom početku:

$$r_1 < |z| < r_2 \quad \text{ili} \quad r_1 < R < r_2 \tag{10.25}$$



Slika 10.2: Prsten konvergencije $F(z)$ i singulariteti.

Prsten konvergencije imaju sekvence koje se sastoje od nekauzalnog i kauzalnog dijela. Relacija za dvostranu z-transformaciju (10.6) može napisati kao suma dvije z-transformacije:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(n) \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \cdot z^{-n} \tag{10.26}$$

Prva suma odgovara z-transformaciji nekauzalne sekvence ($n < 0$), a druga kauzalne sekvence ($n \geq 0$).

Ako sekvenca ima oblik sume geometrijskih progresija, a $F(z)$ ima polove p_j van prstena konvergencije i p_i u unutrašnjosti prstena konvergencije (slika 10.2.), onda je:

$$r_1 = \max |p_i| \quad \wedge \quad r_2 = \min |p_j| \tag{10.27}$$

Dakle, **oblast konvergencije ne smije sadržavati polove** z-transformacije $F(z)$, jer u polovima funkcija $F(z)$ ima beskonačnu vrijednost, tj. nije konvergentna. Granice oblasti konvergencije određene su krugovima koji prolaze kroz polove $r_1 = \max |p_i|$ i $r_2 = \min |p_j|$, a centar im se nalazi u koordinatnom početku.

Kao primjer, može se diskutovati z-transformacija sekvence $\delta[n]$, koja je jednaka konstanti jedan:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \implies Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n) \cdot z^{-n} = 1 \implies \delta[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} 1 \tag{10.28}$$

tako da je suma u relaciji (10.28) konačna za svako z, odnosno oblast konvergencije je svako z uključujući i tačke $z = 0$ i $z = \infty$. Međutim, zakašnjela sekvenca $\delta[n-1]$, čija je

z-transformacija:

$$Z\{\delta[n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-1) \cdot z^{-n} = z^{-1} \tag{10.29}$$

ima oblast konvergencije svako z, osim $z = 0$, gdje je $z = 0$ pol. Isprednjačena sekvenca $\delta[n+1]$ ima z-transformaciju:

$$Z\{\delta[n+1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n+1) \cdot z^{-n} = z \tag{10.30}$$

a oblast konvergencije svako z, uključujući i $z = 0$, osim $z = \infty$, gdje je $z = \infty$ pol.

U općem slučaju, z-transformacija sekvence $f[n]$ konačne dužine (s konačnim brojem uzoraka) je:

$$F(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} f(n) \cdot z^{-n} \tag{10.31}$$

gdje su N_1 i N_2 cijeli brojevi. Suma (10.31) je konačna, dok je oblast konvergencije sekvence konačne dužine cijela kompleksna ravan uz eventualno isključenje tačaka $z = 0$ i/ili $z = \infty$, zavisno od toga da li je sekvenca kauzalna i/ili nekauzalna. Za slučaj sekvence koji ima kauzalni i nekauzalni dio, oblast konvergencije z-transformacije je $0 < |z| < \infty$.

Primjer 10.1:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije za svaku od sekvenci sa konačnim brojem nenultih uzoraka, prikazanih na slici 10.3.

Rješenje:
a) Sekvenca prikazana na slici 10.3.a je kauzalna, konačnog trajanja i ima vrijednosti $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 3$, $f(4) = 2$, $f(5) = 1$. Na osnovu relacije (10.6), z-transformacija ove sekvence s konačnim brojem uzoraka može se napisati u obliku:

$$F_a(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 3z^{-3} + 2z^{-4} + z^{-5}$$

U svim sabircima polinoma $F_a(z)$, uz odgovarajuće z^{-n} je vrijednost $f(n)$ za svako n. Broj koji se nalazi uz z^{-n} je vrijednost n-tog elementa sekvence. U ovom slučaju $F(z) = \infty$ za $z = 0$. Oblast konvergencije za ovu sekvencu je $|z| > 0$.

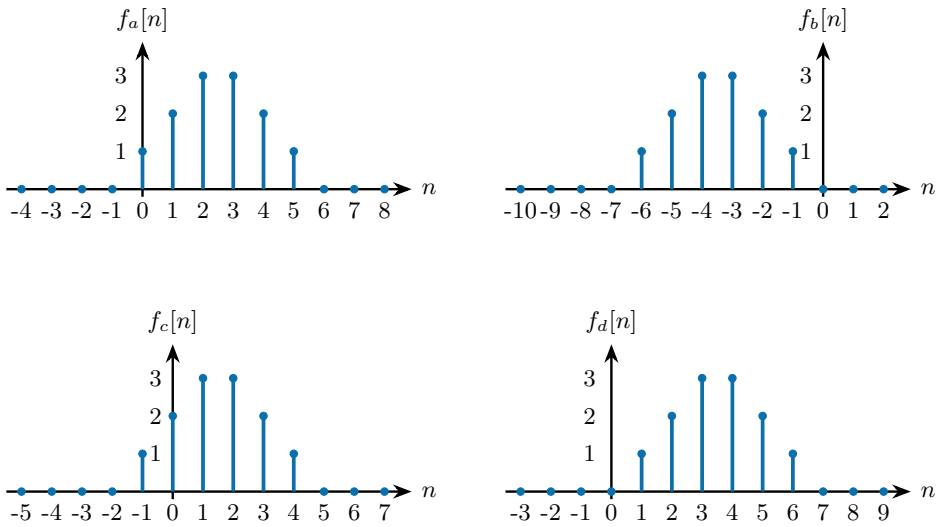
b) Sekvenca prikazana na slici 10.3.b je konačnog trajanja i nekauzalna je, jer su vrijednosti $f(n)$ za $n < 0$ različite od nule. Vrijednosti sekvence su: $f(-6) = 1$, $f(-5) = 2$, $f(-4) = 3$, $f(-3) = 3$, $f(-2) = 2$, $f(-1) = 1$. Njena z-transformacija je:

$$F_b(z) = z^6 + 2z^5 + 3z^4 + 3z^3 + 2z^2 + z^1$$

Kako je $F(z) = \infty$ kada je $z = \infty$, oblast konvergencije je $|z| < \infty$.

c) Ako se $F_a(z)$ iz primjera a) pomnoži sa z, dobije se:

$$zF_a(z) = z + 2 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} = F_c(z)$$



Slika 10.3: Sekvence sa konačnim brojem nenultih uzoraka (primjer 10.1).

Vidi se da množenje $F(z)$ sa z daje, u vremenskom domenu, sekvencu čiji se elementi dobiju pomjeranjem početne sekvence ulijevo za jedan (slika 10.3.c). Dobijeni izraz je ujedno z-transformacija sekvence sa slike 10.3.c, koja ima i kauzalni i nekauzalni dio. Takođe se vidi da je $F(z) = \infty$ za $z = 0$ i za $z = \infty$. Oblast konvergencije je $0 < |z| < \infty$.

d) Množenjem $F_a(z)$ iz primjera a) sa z^{-1} početna sekvenca se u vremenskom domenu pomjera za jedan udesno. Dobijena vremenska sekvenca je kauzalna (slika 10.3.d), a oblast konvergencije je $|z| > 0$.

$$F_d(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + 3z^{-4} + 2z^{-5} + z^{-6}$$

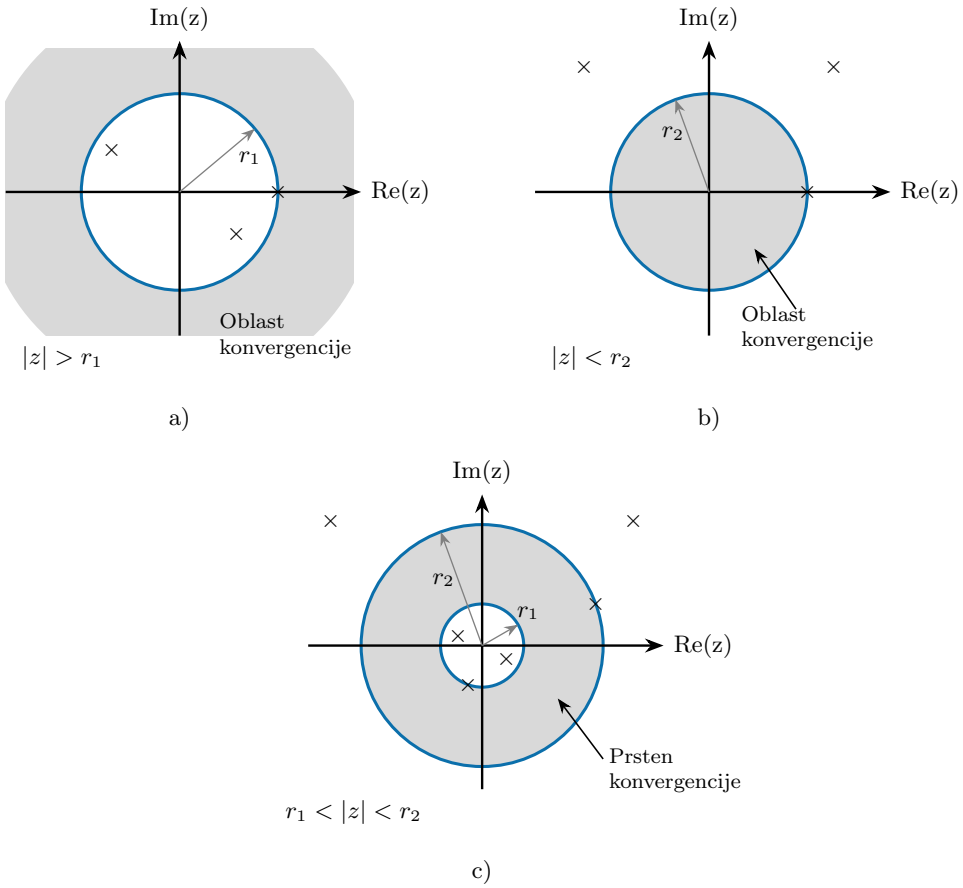
10.2.4 Z-transformacija kauzalnih i nekauzalnih sekvenci

U nastavku će biti diskutovana razlika Z-transformacija i oblasti konvergencije za kauzalne i nekauzalne (odnosno antikauzalne) sekvence.

Kauzalne sekvence - Uslov kauzalnosti sekvence je $f(n) = 0$ za $n < 0$. Poluprečnik r_1 zavisi od ponašanja $f[n]$ kada $n \to \infty$, pa z-transformacija oblika:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \cdot z^{-n} \tag{10.32}$$

odgovara kauzalnim sekvencama (slika 10.4.a). Za kauzalne sekvence $z = \infty$ pripada oblasti konvergencije, a svi polovi se nalaze u unutrašnjosti kruga poluprečnika r_1.



Slika 10.4: a) Oblast konvergencije za kauzalnu sekvencu, b) oblast konvergencije za nekauzalnu sekvencu, c) prsten konvergencije za sekvencu koja ima kauzalni i nekauzalni dio.

Oblast konvergencije je spoljašnost kruga poluprečnika r_1 ili:

$$0 \leq r_1 < |z| \tag{10.33}$$

Relacija (10.32) za unilateralnu z-transformaciju ima najveću primjenu pri rješavanju diferentnih jednačina i u analizi prelaznih procesa diskretnih sistema sa nenultim početnim uslovima.

Nekauzalne sekvence - Nekauzalne sekvence zadovoljavaju uslov $f(n) = 0$ za $n \geq 0$. Poluprečnik r_2 ($r_2 > 0$) zavisi od $f[n]$ kada $n \to -\infty$, pa z-transformacija oblika:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f(n) \cdot z^{-n} \tag{10.34}$$

odgovara nekauzalnim sekvencama (slika 10.4.b). Za nekauzalne sekvence je $z = 0$ pripada oblasti konvergencije, a svi polovi se nalaze van kruga poluprečnika r_2. Oblast konvergencije je unutrašnjost kruga poluprečnika r_2 :

$$0 \leq |z| < r_2 < \infty \tag{10.35}$$

Na slijedeća dva primjera može se vidjeti kako dvije različite sekvence mogu imati iste algebarske oblike z-transformacije, ali različite oblasti konvergencije.

Primjer 10.2:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije sekvence $f[n] = u[n]$.

Rješenje:
Z-transformacija jedinične sekvence određuje se na slijedeći način:

$$Z\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}$$

Vidi se da z-transformacija jedinične sekvence ima oblik geometrijske progresije sa $a_0 = 1$ i $q = 1/z$. Ova progresija ima konačnu sumu ako je $|q| < 1$, odnosno $|1/z| < 1$. Prema tome, kauzalna sekvenca $u[n]$ (slika 10.5.a) ima uslov konvergencije $|z| > 1$.

$$u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-1} \tag{10.36}$$

Kako je prema relaciji (10.25) prsten konvergencije:

$$r_1 < |z| < r_2, \quad r_1 \geq 0, \quad r_2 > 0$$

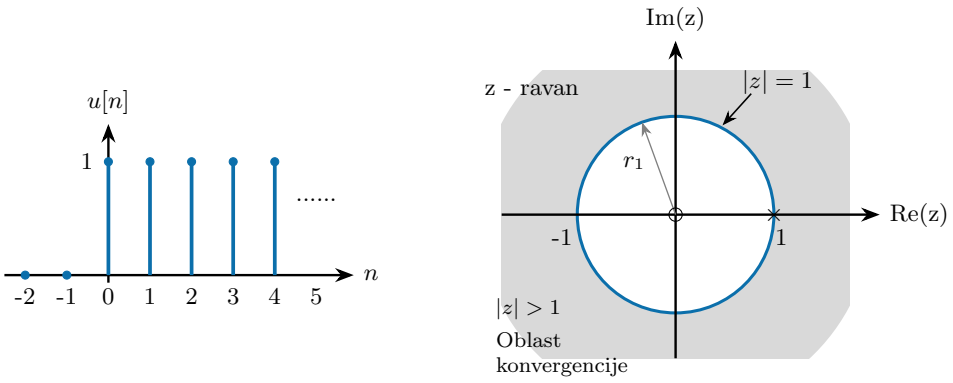
to je $r_1 = 1$, a $r_2 = \infty$. Nula funkcije $Z\{u[n]\}$, na osnovu (10.36) je u tački $z = 0$, a pol u tački $z = 1$, što je nacrtano na slici 10.5.b.

Primjer 10.3:

Za nekauzalnu sekvencu $f[n] = -u[-n-1]$ odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije.

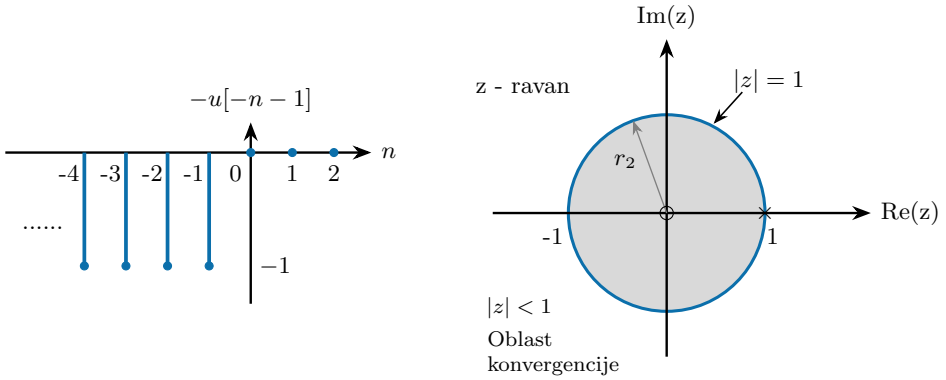
Rješenje:
Z-transformacija sekvence $f[n]$ prikazane na slici 10.6.a je:

$$Z\{-u[-n-1]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -u(-n-1) \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \cdot z^{-n}$$



a) b)

Slika 10.5: a) Jedinična sekvenca $u[n]$, b) oblast konvergencije (primjer 10.2).



a) b)

Slika 10.6: a) Sekvenca $-u[-n-1]$, b) oblast konvergencije (primjer 10.3).

Ako se uvede smjena $-n = k$, prethodni izraz se može napisati u obliku:

$$Z\{-u[-n-1]\} = -\sum_{k=1}^{+\infty} 1 \cdot z^k = -\left(\frac{1}{1-z} - 1\right) = -\frac{z}{1-z} = \frac{z}{z-1} \tag{10.37}$$

odnosno:

$$-u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-1} \tag{10.38}$$

Z-transformacija ove sekvence ima konačnu sumu ako je $|q| < 1$, odnosno $|z| < 1$. Prema tome, nekauzalna sekvenca $f[n] = -u[-n-1]$ ima uslov konvergencije $|z| < 1$. Oblast konvergencije (slika 10.6.b) je unutrašnjost kruga poluprečnika $r_2 = 1$. Nula funkcije (10.38) je u tački $z = 0$, a pol u tački $z = 1$, kao i u slučaju funkcije (10.36). Dakle, dvije različite sekvence $u[n]$ i $-u[-n-1]$ iz prethodna dva primjera (10.2 i 10.3) mogu imati iste algebarske oblike $F(z)$, ali su im oblasti konvergencije različite ($|z| > 1$ i $|z| < 1$).

Primjer 10.4:

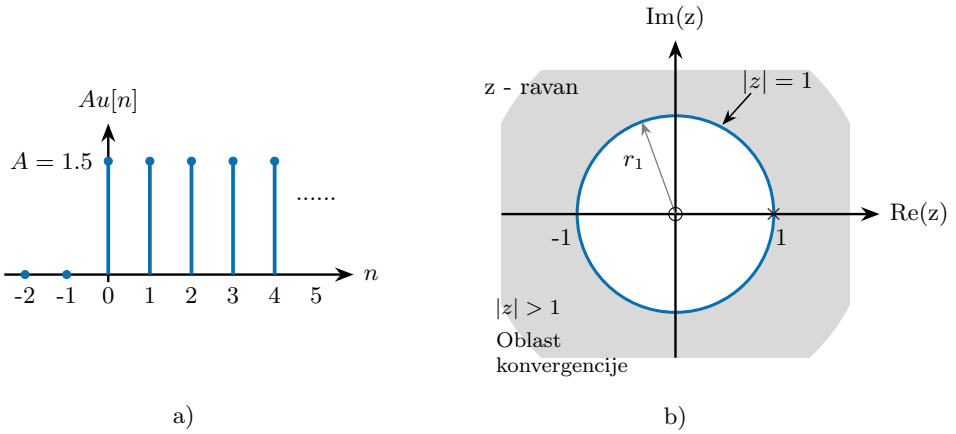
Odrediti z-transformaciju sekvence $f[n] = Au[n]$ prikazane na slici 10.7.a.

Rješenje:
Z-transformacija sekvence $f[n] = A$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$, je:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A \cdot z^{-n} = A\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots\right) = \frac{A}{1 - z^{-1}} = \frac{Az}{z-1}$$

Oblast konvergencije određuje se iz uslova: $|q| = \left|z^{-1}\right| < 1$ ili $|z| > 1$, što je spoljašnost jediničnog kruga u z-ravni (slika 10.7.b). Na istoj slici predstavljeni su nula i pol funkcije $F(z)$. Nula je u tački $z = 0$, a pol u tački $z = 1$.

$$A \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{Az}{z-1} \tag{10.39}$$



Slika 10.7: a) Kauzalna sekvenca $Au[n]$, b) oblast konvergencije (primjer 10.4).

10.3 Osobine z-transformacije

Osobine z-transformacije koriste se za nalaženje z-transformacije sekvenci i za rješavanje diferentnih jednačina s konstantnim koeficijentima.

10.3.1 Linearnost z-transformacije

Z-transformacija je linearni operator. Ako su npr. $F_1(z)$ i $F_2(z)$ z-transformacije sekvenci $f_1[n]$ i $f_2[n]$ sa odgovarajućim oblastima konvergencije, odnosno:

$$f_1[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F_1(z), \text{ oblast konvergencije: } r_1^1 < |z| < r_2^1$$
$$f_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F_2(z), \text{ oblast konvergencije: } r_1^2 < |z| < r_2^2$$

i ako je:

$$f[n] = a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]$$

onda je:

$$\begin{aligned} Z\{f[n]\} &= Z\left\{a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n)\right\} z^{-n} \\ &= a_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(n) z^{-n} + a_2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_2(n) z^{-n} \\ &= a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \end{aligned}$$

odnosno:

$$a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \tag{10.40}$$

a oblast konvergencije je:

$$\max\left(r_1^1, r_1^2\right) < |z| < \min\left(r_2^1, r_2^2\right) \tag{10.41}$$

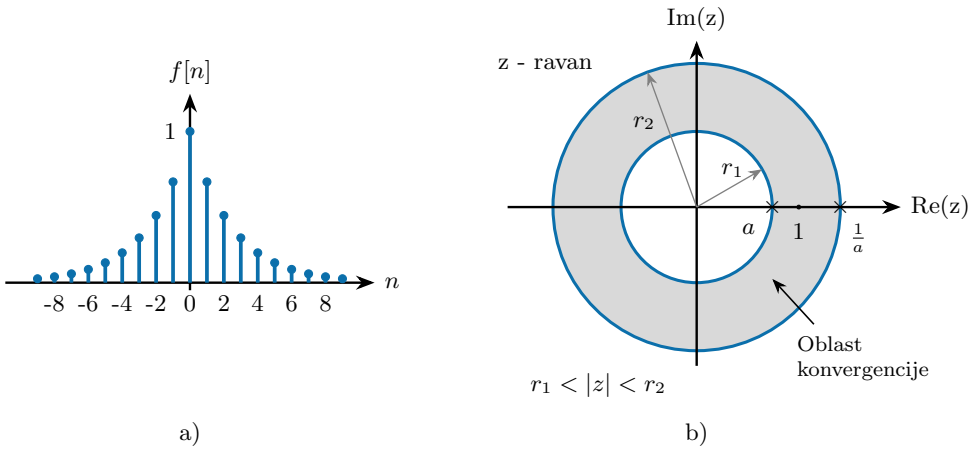
jer z-transformacija sume postoji samo pod uslovom da i $F_1(z)$ i $F_2(z)$ konvergiraju. Oblast konvergencije može biti i šira od oblasti date relacijom (10.41) ako pri nalaženju $F(z) = a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z)$ dolazi do poništavanja nekih polova i nula. Npr. ako su sekvence $f_1[n]$ i $f_2[n]$ neograničene u vremenu, a njihova suma ili razlika predstavljaju vremenski ograničene sekvence, onda je oblast konvergencije kompletna z-ravan, sa eventualnim izuzetkom tačaka $z = 0$ i/ili $z = \infty$.

Primjer 10.5:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije sekvence $f[n] = a^{|n|}$ za $a > 0$.

Rješenje:
Zadata sekvenca ima nekauzalni i kauzalni dio, tako da se može napisati u obliku:

$$f[n] = a^{|n|} = a^{-n} u[-n-1] + a^n u[n]$$



Slika 10.8: a) Eksponencijalna sekvenca, b) oblast konvergencije (primjer 10.5).

Za nekauzalni dio dobije se:

$$a^{-n}u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n} = \sum_{k=1}^{+\infty}(az)^k = \frac{1}{1-az} - 1 = \frac{-z}{z-a^{-1}}$$

a oblast konvergencije je: $|az| < 1$ ili $|z| < \frac{1}{a}$.

Za kauzalni dio se dobije:

$$a^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}$$

a oblast konvergencije je: $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$, odnosno $|z| > a$.

Korištenjem osobine linearnosti, konačno je:

$$F(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-a^{-1}} = \frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{z}{(z-a)\,(z-a^{-1})}, \quad a < |z| < \frac{1}{a}$$

Oblast konvergencije postoji samo ako je $0 < a < 1$. Eksponencijalni diskretni signal $f[n] = a^{|n|}$ za $0 < a < 1$ i oblast konvergencije prikazani su na slici 10.8.

10.3.2 Refleksija vremenske sekvence

Refleksija vremenske sekvence podrazumijeva zamjenu diskretnog vremena n diskretnim vremenom $-n$, što je ekvivalentno zamjeni promjenljive z promjenljivom z^{-1}. Ako je

oblast konvergencije sekvence $f[n]$ definirana oblašću $r_1 < |z| < r_2$, onda se oblast konvergencije reflektovane sekvence određuje iz: $r_1 < \left|z^{-1}\right| < r_2$.

$$Z\{f[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(-n)z^{-n} = |-n=k| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)\left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = F\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$f[-n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1} \tag{10.42}$$

10.3.3 Z-transformacija vremenski pomjerene sekvence

Neka sekvenca $f[n]$ ima z-transformaciju $F(z)$ i prsten konvergencije $r_1 < |z| < r_2$. Treba odrediti z-transformaciju sekvence $f[n-m]$, pri čemu se za $m > 0$ dobije zakašnjela sekvenca, a za $m < 0$ isprednjačena sekvenca.

Iz definicije z-transformacije je:

$$Z\{f[n-m]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n-m)z^{-n} = |n-m=k| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)z^{-k}z^{-m} = F(z)z^{-m}$$

odnosno:

$$f[n-m] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-m}F(z) \tag{10.43}$$

Dakle, z-transformacija sekvence $f[n-m]$ jednaka je z-transformaciji sekvence $f[n]$ pomnoženoj sa z^{-m}, gdje je m pomjeraj sekvence $f[n]$. Oblast konvergencije zavisi od oblasti konvergencije sekvence $f[n]$ i parametra m.

10.3.3.1 Pomjeranje sekvence udesno ($m > 0$)

Ako je $m > 0$ množenje z-transformacije sekvence $f[n]$ članom z^{-m} daje pol višestrukosti m u tački $z = 0$. U tom slučaju oblast konvergencije ne uključuje tačku $z = 0$, čak i kada oblast konvergencije sekvence $f[n]$ uključuje $z = 0$. Izuzetak je kada $F(z)$ ima nulu najmanje višestrukosti m u $z = 0$ koja poništava sve nove polove nastale zbog vremenskog pomjeranja za m.

Ako je $f[n]$ **kauzalna sekvenca**, onda njeno pomjeranje za m udesno ($m > 0$), ne mijenja njenu kauzalnost, dok je oblast konvergencije jednaka oblasti konvergencije sekvence $f[n]$. Ako kauzalna sekvenca ima z-transformaciju:

$$f[n] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F(z)$$

onda:

$$f[n-1] \cdot u[n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}F(z) \tag{10.44}$$

ili u općem slučaju:

$$f[n-m] \cdot u[n-m] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z^m}F(z) \tag{10.45}$$

Relacija (10.45) se može dokazati na slijedeći način:

$$\begin{aligned} Z\{f[n-m]\cdot u[n-m]\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n-m)\cdot u(n-m)z^{-n} \\ &= \sum_{n=m}^{+\infty} f(n-m)z^{-n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-(k+m)} \\ &= \frac{1}{z^m}\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k} \\ &= \frac{1}{z^m}F(z) \end{aligned}$$

Ako u općem slučaju, $f[n]$ **nije kauzalna sekvenca**, nego ima i dijelove koji odgovaraju diskretnom vremenu $n<0$ (koja može nastati npr. kao zapis početnih uslova diferentne jednačine u okviru kauzalne sekvence), tada se transformacija treba gledati ne kao $Z\{f[n-m]\cdot u[n-m]\}$ već kao $Z\{f[n-m]\cdot u[n]\}$. U skladu s tim važi:

$$f[n-1]\cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}F(z)+f(-1) \tag{10.46}$$

Ako se osobina data relacijom (10.46) ponovi, dobije se:

$$f[n-2]\cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}F(z)+f(-1)\right]+f(-2) = \frac{1}{z^2}F(z)+\frac{1}{z}f(-1)+f(-2)$$

ili u općem slučaju:

$$f[n-m]\cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-m}F(z)+z^{-m}\sum_{r=1}^{m} f(-r)z^{r} \tag{10.47}$$

Relacija (10.47) se može dokazati na slijedeći način:

$$\begin{aligned} Z\{f[n-m]\cdot u[n]\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n-m)z^{-n} \\ &= |n-m=k| = \sum_{k=-m}^{+\infty} f(k)z^{-(k+m)} \\ &= z^{-m}\left(\sum_{k=-m}^{-1} f(k)z^{-k}+\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}\right) \\ &= |k=-r| = z^{-m}\sum_{r=1}^{m} f(-r)z^{r}+z^{-m}F(z) \end{aligned}$$

10.3.3.2 Pomjeranje sekvence ulijevo ($m < 0$)

Ako je $m < 0$, onda množenje sa z^{-m} daje m polova u beskonačnosti. Ako ti polovi nisu poništeni nulama $F(z)$ u beskonačnosti, onda oblast konvergencije, za dvostranu z-transformaciju, ne uključuje $|z| = \infty$. Ako je $f[n]$ kauzalna sekvenca, onda njeno pomjeranje za m ulijevo ($m < 0$) daje isprednjačenu sekvencu. Dobijena sekvenca može biti nekauzalna i nemati jednostranu z-transformaciju. Zbog toga se može tražiti samo jednostrana z-transformacija sekvence $f[n+r] \cdot u[n]$, gdje je $r = -m$ pozitivan broj, za $m < 0$. Npr.

$$\begin{aligned} &f[n] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F(z) \\ &f[n+1] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} zF(z) - zf(0) \end{aligned} \tag{10.48}$$

Takođe je:

$$f[n+2] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z \cdot \{z \cdot [F(z) - f(0)] - f(1)\} = z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$$

ili u općem slučaju:

$$f[n+r] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^rF(z) - z^r \sum_{k=0}^{r-1} f(k)z^{-k} \tag{10.49}$$

Relacija (10.49) se dokazuje na sljedeći način:

$$\begin{aligned} Z\{f[n+r] \cdot u[n]\} &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+r)z^{-n} \\ &= |n+r=k| = \sum_{k=r}^{+\infty} f(k) \cdot z^{-(k-r)} \\ &= z^r \sum_{k=r}^{+\infty} f(k) \cdot z^{-k} \\ &= z^r \left[\sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \cdot z^{-k} - \sum_{k=0}^{r-1} f(k)z^{-k} \right] \\ &= z^r \left[F(z) - \sum_{k=0}^{r-1} f(k)z^{-k} \right] \end{aligned}$$

Primjer 10.6:

Odrediti z-transformaciju sekvence $\delta[n-m]$, gdje je m cijeli broj.

Rješenje:
Ako je sekvenca $\delta[n]$ pomjerena za m, onda je njena z-transformacija:

$$Z\{\delta[n-m]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-m)\cdot z^{-n} = z^{-m} \implies \delta[n-m] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-m} \tag{10.50}$$

jer je:

$$\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Oblast kovergencije zavisi od parametra m. Za $m > 0$ oblast konvergencije je svako z osim $z = 0$. Za $m < 0$ oblast konvergencije je svako z osim $z = \infty$.

Primjer 10.7:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije pomaknute jedinične sekvence $u[n-m]$, za $m > 0$.

Rješenje:
Z-transformacija pomaknute jedinične sekvence određuje se na slijedeći način:

$$Z\{u[n-m]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n-m)\cdot z^{-n} = |n-m=r| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(r)\cdot z^{-(r+m)}$$
$$= z^{-m}\sum_{r=0}^{+\infty} z^{-r} = z^{-m}\frac{z}{z-1} = \frac{z^{-m+1}}{z-1}$$

Odnosno:

$$u[n-m] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-m+1}}{z-1} \tag{10.51}$$

Kako se radi o kauzalnoj sekvenci, njeno pomjeranje za m udesno ($m > 0$), neće promijeniti njenu kauzalnost, a oblast konvergancije jednaka je oblasti konvergencije sekvence $u[n]$, tj. oblast konvergencije je $|z| > 1$, što svakako isključuje pol višestrukosti m u $z = 0$.

10.3.4 Teorema o početnoj vrijednosti sekvence

Ako kauzalna sekvenca $f[n]$ ima jednostranu z-transformaciju $F(z)$, onda se vrijednost $f(0)$ naziva *početna vrijednost*, a određuje se iz relacije:

$$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z) \tag{10.52}$$

Za dokaz ove tvrdnje, polazi se od z-transformacije kauzalne sekvence $f[n]$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\cdot z^{-n} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \ldots \tag{10.53}$$

Ako se u relaciji (10.53) stavi da $z \to \infty$, onda su svi članovi sume, osim $f(0)$, jednaki nuli. Osobina data relacijom (10.52) ima važne posljedice. Ako $f(0)$ ima konačnu vrijednost, to znači da je granična vrijednost $\lim_{z\to\infty} F(z)$ takođe konačna. Ako se $F(z)$ napiše kao količnik dva polinoma po z, to znači da za slučaj kauzalnih sekvenci polinom u brojniku $F(z)$ ne može biti višeg stepena od polinoma u nazivniku.

10.3.5 Teorema o krajnjoj vrijednosti sekvence

Ako kauzalna sekvenca $f[n]$ ima z-transformaciju $F(z)$, onda se vrijednost $f(n)$ za $n \to \infty$ naziva *krajnja vrijednost*, a nalazi se iz relacije:

$$\lim_{N\to\infty} f(N) = \lim_{z\to 1}(z-1)F(z) \tag{10.54}$$

pod uslovom da $(z-1)F(z)$ ima sve polove unutar jediničnog kruga.

Pri dokazivanju ove teoreme polazi se od unilateralne z-transformacije kauzalnog signala $f[n]$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)\cdot z^{-n} = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots$$

Ako se sekvenca $f[n]$, čije su vrijednosti $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$, pomakne za jedan ulijevo, tada se dobija nova sekvenca $f[n+1]$ koja ima vrijednosti uzoraka $f(1)$ za $n = 0$, $f(2)$ za $n = 1$, $f(3)$ za $n = 2$, itd. Ovo je sekvenca $f[n+1]$, čija je z-transformacija, prema relaciji (10.48):

$$f[n+1]\cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} zF(z) - zf(0)$$

Ako se z-transformacije sekvenci $f[n]$ i $f[n+1]$ napišu u obliku:

$$Z\{f[n]\} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} f(n)z^{-N} \tag{10.55}$$

$$Z\{f[n+1]\} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} f(n+1)z^{-N} \tag{10.56}$$

i nađe razlika ove dvije z-transformacije:

$$\begin{aligned} Z\{f[n+1]-f[n]\} &= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}(f(n+1)-f(n))z^{-N}\right] \\ &= zF(z) - zf(0) - F(z) \\ &= (z-1)F(z) - zf(0) \end{aligned} \tag{10.57}$$

i ako se u relaciji (10.57) stavi da $z \to 1$, onda se dobije:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}[(z-1)F(z) - zf(0)] &= \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}(f(n+1)-f(n))z^{-N}\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{N}(f(n+1)-f(n))\right] \\ &= \lim_{N\to\infty}(f(N+1)-f(0)) \\ &= f(\infty) - f(0)\end{aligned}$$

gdje je pretpostavljeno da $\lim_{N\to\infty} f(N+1) = f(\infty)$ ima konačnu ili nultu vrijednost. Odatle slijedi:

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)] - f(0) = f(\infty) - f(0)$$

$$\lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)] = \lim_{N\to\infty} f(N)$$

Taj uslov je zadovoljen ako $(z-1)F(z)$ ima sve polove unutar jediničnog kruga (ako $f[n]$ odgovara odzivu stabilnog sistema), pa je krajnja vrijednost data relacijom (10.54).

10.3.6 Z-transformacija konvolucije sekvenci u vremenskom domenu

U slučaju Fourierove transformacije i Fourierove transformacije diskretnog signala, konvolucija signala u vremenskom domenu ima za posljedicu množenje signala u drugom domenu. Slična veza postoji i u slučaju z-transformacije. Ako sekvence $f_1[n]$ i $f_2[n]$ imaju z-transformacije $F_1(z)$ i $F_2(z)$ i odgovarajuće oblasti konvergencije, odnosno:

$$F_1(z) = Z\{f_1[n]\}, \quad r_1^1 < |z| < r_2^1 \tag{10.58}$$

$$F_2(z) = Z\{f_2[n]\}, \quad r_1^2 < |z| < r_2^2 \tag{10.59}$$

potrebno je naći z-transformaciju $F(z)$ sekvence $f[n] = f_1[n] * f_2[n]$, gdje $*$ označava operaciju konvolucije. Iz definicije z-transformacije je:

$$\begin{aligned}F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\{f_1[n] * f_2[n]\}z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(k)\cdot f_2[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(k)z^{-k}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_2(n-k)z^{-(n-k)} \\ &= |n-k=r| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_1(k)z^{-k}\sum_{r=-\infty}^{+\infty} f_2(r)z^{-r}\end{aligned}$$

Prema tome:

$$f_1[n] * f_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F_1(z)\cdot F_2(z) \tag{10.60}$$

Da bi z-transformacija egzistirala, z se mora nalaziti u prstenu konvergencije $r_1 < |z| < r_2$. U slučaju konvolucije, oblasti konvergencije mora biti presjek pojedinačnih pstena konvergencije:

$$\max\left(r_1^1, r_1^2\right) < |z| < \min\left(r_2^1, r_2^2\right) \tag{10.61}$$

Iako obje učesnice u konvoluciji $f_1[n]$ i $f_2[n]$ imaju z-transformaciju, može se desiti da konvoluciona suma nema z-transformaciju. Kao i kod osobine linearnosti oblast konvergencije može biti šira od oblasti date relacijom (10.61) ako dolazi do poništavanja polova i nula u proizvodu $F_1(z) \cdot F_2(z)$.

10.3.7 Množenje sekvence sa α^n ili skaliranje u oblasti kompleksne učestanosti

Neka je z-transformacija sekvence $f[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F(z)$, a oblast konvergencije $r_1 < |z| < r_2$. Ako je α kompleksni broj, z-transformacija sekvence $\alpha^n f[n]$ je:

$$Z\left\{\alpha^n f[n]\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n f(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \left(\frac{z}{\alpha}\right)^{-n} = F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

$$\alpha^n f[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} F\left(\frac{z}{\alpha}\right) \tag{10.62}$$

Ako je oblast konvergencije z-transformacije sekvence $f[n]$ u prstenu $r_1 < |z| < r_2$, onda se oblast konvergencije z-transformacije sekvence $\alpha^n f[n]$ određuje iz relacije $r_1 < |z/\alpha| < r_2$, odnosno $|\alpha| r_1 < |z| < |\alpha| r_2$. Ako $F(z)$ sadrži faktor $\left(1 - dz^{-1}\right)$ u nazivniku, tako da je d pol, onda $F(z/\alpha)$ sadrži faktor $\left(1 - \alpha d z^{-1}\right)$ u nazivniku, a pol je αd. Isto tako ako je c nula funkcije $F(z)$, onda $F(z/\alpha)$ ima nulu αc.

Primjer 10.8:

Odrediti z-transformaciju eksponencijalne sekvence $f[n] = A\alpha^n \cdot u[n]$.

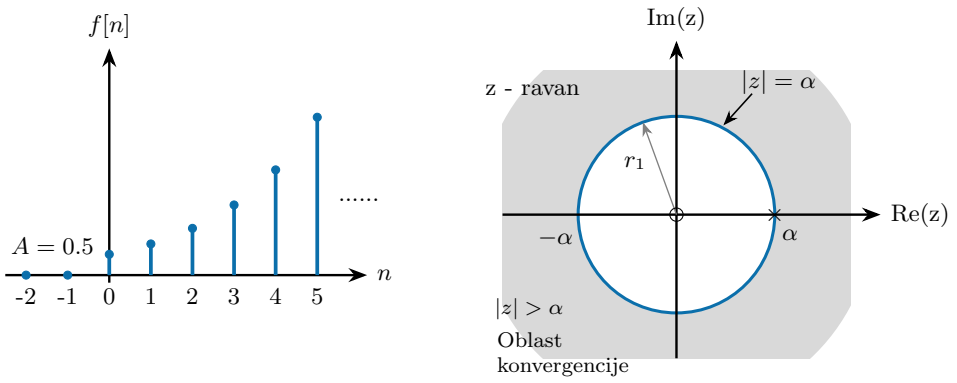
Rješenje:
Eksponencijalna sekvenca (slika 10.9.a) oblika $f[n] = A\alpha^n u[n]$, može se dobiti diskretizacijom eksponencijalne vremenske funkcije oblika: $f(t) = Ae^{at}$, gdje
je kontinualno vrijeme zamijenjeno diskretnim ($t = nT$) i $\alpha = e^{aT}$. Z-transformacija sekvence $f[n] = A\alpha^n \cdot u[n]$ je:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A\alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n = \frac{A}{1 - \frac{\alpha}{z}} = \frac{Az}{z - \alpha}$$

Oblast konvergencije određuje se iz uslova: $|q| = |\alpha/z| < 1$ ili $|z| > |\alpha|$, što je spoljašnost kruga poluprečnika α u z-ravni (slika 10.9.b).

$$A\alpha^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{Az}{z - \alpha} \tag{10.63}$$

Nula funkcije (10.63) nalazi se u tački $z = 0$, a pol u tački $z = \alpha$. Oblast konvergencije je ograničena krugom poluprečnika $|z| = \alpha$ i nalazi se van ovoga kruga.



Slika 10.9: a) Eksponencijalna sekvenca, b) oblast konvergencije (primjer 10.8).

Primjer 10.9:

Za sekvencu $f[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ b^n, & n < 0 \end{cases}$ odrediti prsten konvergencije i z-transformaciju.

Rješenje:
Primjenom z-transformacije na datu sekvencu dobije se:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \cdot z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n \cdot z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot z^{-n} \tag{10.64}$$

Dakle, sekvenca ima nekauzalni dio ($n < 0$) i kauzalni dio ($n \geq 0$). Ako se u prvoj sumi relacije (10.64), koja predstavlja antikauzalni dio, uvede smjena $-n = k$ dobije se:

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n \cdot z^{-n} = |-n = k| = \sum_{k=1}^{+\infty} b^{-k} \cdot z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^k =$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{z}{b}} - 1 = \frac{z}{b - z}, \quad \text{ako je } |z| < |b|$$

Za kauzalni dio je:

$$F_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}, \quad \text{ako je } |z| > |a|$$

Prsten konvergencije postoji ako je zadovoljen uslov $|b| > |a|$, odnosno: $|a| < |z| < |b|$. Z-transformacija sekvence $f[n]$ je tada:

$$F(z) = \frac{z}{b-z} + \frac{z}{z-a} = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

Nula funkcije $F(z)$ je u $z = 0$, a polovi su $z = a$ i $z = b$.

Primjer 10.10:

Za sekvencu $f[n]$ odrediti prsten konvergencije i z-transformaciju:

$$f[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \tag{10.65}$$

Rješenje:
Primjenom z-transformacije na sekvencu (10.65) dobije se:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \cdot z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n u(-n-1) \cdot z^{-n} = F_1(z) + F_2(z)$$

Dakle, i ova sekvenca ima kauzalni i antikauzalni dio. Za kauzalni dio je:

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}, \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \implies |z| > \frac{1}{2}.$$

Za nekauzalni dio je:

$$\begin{aligned} F_2(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) u(-n-1) \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot z^{-n} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{3}{2z}\right)^n = |n = -k| = -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2z}\right)^{-k} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^k = -\left[\frac{1}{1-\frac{2z}{3}} - 1\right] \\ &= \frac{-\frac{2z}{3}}{1-\frac{2z}{3}} \end{aligned}$$

ako je $\left|\frac{2z}{3}\right| < 1$ odnosno $|z| < \frac{3}{2}$. Dakle prsten konvergencije sekvence (10.65) je:

$$\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2} \tag{10.66}$$

a njena z-transformacija je:

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} - \frac{\frac{2z}{3}}{1-\frac{2z}{3}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{3}{2}} = \frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} \tag{10.67}$$

Nule funkcije $F(z)$ su $z = 0$ i $z = 1$, a polovi $z = 1/2$ i $z = 3/2$.

Primjer 10.11:

Za sekvencu $f[n]$ odrediti prsten konvergencije i z-transformaciju:

$$f[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \tag{10.68}$$

Rješenje:
Primjenom z-transformacije na datu sekvencu dobije se:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3z}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} \end{aligned}$$

uz oblast konvergencije:

$$\left|\frac{1}{3z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{3} \wedge \quad \left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

Z-transformacija date sekvence postoji za:

$$r_1 = \max\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad r_2 = \infty$$

Oblast konvergencije je spoljašnost kruga poluprečnika $r_1 = 1/2$, odnosno:

$$|z| > \frac{1}{2}$$

Z-transformacija sekvence $f[n]$ je:

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{z}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z\left(-\frac{1}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \tag{10.69}$$

$F(z)$ ima nulu $z = 0$ i polove $z = 1/3$ i $z = 1/2$.

Primjer 10.12:

Neka su date sekvence $f_1[n]$ i $f_2[n]$, njihove z-transformacije $F_1(z)$ i $F_2(z)$ i oblasti konvergencije:

$$f_1[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{3}{2}\right)^n u[-n-1] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} = F_1(z), \quad \tfrac{1}{2} < |z| < \tfrac{3}{2}$$
$$f_2[n] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z\left(-\frac{1}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} = F_2(z), \quad \tfrac{1}{2} < |z| < \infty$$

Odrediti z-transformaciju sekvence: $af_1[n] + bf_2[n]$.

Rješenje:
Iz osobine linearnosti date relacijom (10.40) je:

$$af_1[n] + bf_2[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} a \cdot \frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} + b \cdot \frac{z\left(-\frac{1}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

U općem slučaju, iz osobine linearnosti, oblast konvergencije je prema relaciji (10.41): $\max\left(r_1^1, r_1^2\right) < |z| < \min\left(r_2^1, r_2^2\right)$, odnosno $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$. Međutim, ako je $a = b$ dobije se:

$$af_1[n] + af_2[n] = f_1[n] = a \cdot \left(-\left(\frac{3}{2}\right)^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\right)$$

Vidi se da se član $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, koji je egsistirao u obje sekvence, izgubio, tako da se iz z-transformacije posljednjeg izraza zaključuje da je oblast konvergencije $\frac{1}{3} < |z| < \frac{3}{2}$. Ta oblast je šira od oblasti koja se dobije nalaženjem pojedinačnih oblasti konvergencije i primjenom osobine linearnosti, jer član $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ više nije prisutan. Kombiniranjem z-transformacija sekvenci $f_1[n]$ i $f_2[n]$, dobije se:

$$\begin{aligned} a \cdot F_1(z) + a \cdot F_2(z) &= a \cdot \frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} + a \cdot \frac{z\left(-\frac{1}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \\ &= a \cdot \frac{2z(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right) + z\left(-\frac{1}{6}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \\ &= a \cdot \frac{z\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(2z-\frac{11}{6}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

Nula $z = \frac{1}{2}$ se krati sa polom $z = \frac{1}{2}$, tako da je:

$$a \cdot F_1(z) + a \cdot F_2(z) = a \cdot \frac{z\left(2z-\frac{11}{6}\right)}{\left(z-\frac{3}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$$

Dakle, oduzimanje članova $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ u vremenskom domenu znači poništavanje pola $z = \frac{1}{2}$ sa nulom $z = \frac{1}{2}$ u z-domenu, kao i širenje oblasti konvergencije na:

$$\frac{1}{3} < |z| < \frac{3}{2}.$$

Primjer 10.13:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije sekvenci:
a) $f[n] = A \sin \omega_0 n \cdot u[n]$
b) $f[n] = A \cdot \alpha^n \cdot \sin \omega_0 n \cdot u[n]$

Rješenje:
a) Z-transformacija sinusne sekvence može se dobiti na osnovu osobine date relacijom (10.63) i koristeći Eulerovu formulu za sinusnu sekvencu:

$$\begin{aligned} Z\left\{A \cdot \sin \omega_0 n \cdot u[n]\right\} &= Z\left\{A \cdot \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} \cdot u[n]\right\} \\ &= \frac{A}{2j}\left(\frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}\right) \\ &= \frac{A}{2j} \cdot \frac{z\left(z - e^{-j\omega_0} - z + e^{j\omega_0}\right)}{z^2 - ze^{j\omega_0} - ze^{-j\omega_0} + 1} \\ &= \frac{A}{2j} \cdot \frac{z \cdot 2j \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \\ &= \frac{Az \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \end{aligned}$$

Oblast konvergencije sekvence $A\alpha^n u[n]$ je $|z| > |\alpha|$, a kako je $\alpha = e^{j\omega_0}$, to je $|z| > \left|e^{j\omega_0}\right| = 1$ oblast konvergencije sekvence $A \sin \omega_0 n \cdot u[n]$.

b) Z-transformacija sekvence $A \cdot \alpha^n \cdot \sin \omega_0 n \cdot u[n]$ je:

$$Z\left\{A \cdot \alpha^n \cdot \sin \omega_0 n \cdot u[n]\right\} = \frac{A\left(\frac{z}{\alpha}\right) \sin \omega_0}{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{\alpha}\right) \cos \omega_0 + 1} = \frac{Az\alpha \sin \omega_0}{z^2 - 2z\alpha \cos \omega_0 + \alpha^2}$$

a oblast konvergencije: $|z| > |\alpha|$.

Primjer 10.14:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije sekvenci:
a) $f[n] = A \cos \omega_0 n \cdot u[n]$
b) $f[n] = A \cdot \alpha^n \cdot \cos \omega_0 n \cdot u[n]$

Rješenje:

a) Z-transformacija kosinusne sekvence može se dobiti na osnovu osobine date relacijom (10.63) i koristeći Eulerovu formulu za kosinusnu sekvencu:

$$\begin{aligned} Z\left\{A\cdot\cos\omega_0 n\cdot u[n]\right\} &= Z\left\{A\cdot\frac{e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}}{2}\cdot u[n]\right\} \\ &= \frac{A}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega_0}}+\frac{z}{z-e^{-j\omega_0}}\right) \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{z\left(z-e^{-j\omega_0}+z-e^{j\omega_0}\right)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \\ &= \frac{A}{2}\cdot\frac{z\cdot(2z-2\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \\ &= \frac{Az\left(z-\cos\omega_0\right)}{z^2-2z\cos\omega_0+1} \end{aligned}$$

Oblast konvergencije sekvence $A\alpha^n u[n]$ je $|z|>|\alpha|$, a kako je $\alpha=e^{j\omega_0}$, to je $|z|>\left|e^{j\omega_0}\right|=1$ oblast konvergencije sekvence $A\cos\omega_0 n\cdot u[n]$.

b) Z-transformacija sekvence $A\cdot\alpha^n\cdot\cos\omega_0 n\cdot u[n]$ je:

$$Z\left\{A\cdot\alpha^n\cdot\cos\omega_0 n\cdot u[n]\right\}=\frac{A\left(\frac{z}{\alpha}\right)\left[\frac{z}{\alpha}-\cos\omega_0\right]}{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2-2\left(\frac{z}{\alpha}\right)\cos\omega_0+1}=\frac{Az\left(z-\alpha\cos\omega_0\right)}{z^2-2z\alpha\cos\omega_0+\alpha^2}$$

a oblast konvergencije je: $|z|>|\alpha|$.

10.3.8 Množenje signala promjenljivom n ili diferenciranje u z-domenu

Množenju sekvence $f[n]$ diskretnim vremenom n, odgovara diferenciranje po promjenljivoj z u z-domenu. Ako je z-transformacija sekvence $f[n]$ jednaka $F(z)$, a oblast konvergencije $r_1<|z|<r_2$, onda operacija diferenciranja u z-domenu neće promijeniti oblast konvergencije z -transformacije sekvence pomnožene diskretnim vremenom n. Npr. ako je z-transformacija kauzalne sekvence $f[n]$ jednaka $F(z)$:

$$f[n]\cdot u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}F(z),\quad r_1<|z|<\infty$$

onda je:

$$\begin{aligned} n\cdot f[n]\cdot u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}\sum_{n=0}^{+\infty}nf(n)z^{-n}&=z\sum_{n=0}^{+\infty}nf(n)z^{-n-1}=z\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)\left[nz^{-n-1}\right]= \\ &=z\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)\left[-\frac{d}{dz}z^{-n}\right]=-z\frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}f(n)z^{-n}\right\}=-z\frac{d}{dz}F(z) \end{aligned}$$

Prema tome važi:

$$n\cdot f[n]\cdot u[n]\overset{z}{\longleftrightarrow}-z\frac{d}{dz}F(z) \tag{10.70}$$

Oblast kovergencije sekvence $n \cdot f[n] \cdot u[n]$ ostaje nepromijenjena, dakle jednaka je: $r_1 < |z|$.

Primjer 10.15:

Odrediti z-transformaciju i oblast konvergencije sekvence $f[n] = A \cdot n \cdot u[n]$.

Rješenje:
Z-transformacija ove sekvence (rampe) može se naći koristeći z-transformaciju konstante A (10.39) i osobinu datu relacijom (10.70):

$$Z\{A \cdot n \cdot u[n]\} = -z\frac{d}{dz} \cdot \frac{Az}{z-1} = \frac{Az}{(z-1)^2}$$

Kako množenje sekvence konstantom, kao ni diferenciranje u z-domenu ne mijenja oblast konvergencije, to je ona jednaka oblasti konvergencije sekvence $u[n]$, odnosno oblast konvergencije je $|z| > 1$.

Primjer 10.16:

Odrediti z-transformaciju sekvence $f[n] = A \cdot n \cdot \alpha^n \cdot u[n]$.

Rješenje:
Koristeći osobine date relacijama (10.63) i (10.70) dobije se:

$$Z\left\{A \cdot n \cdot \alpha^n \cdot u[n]\right\} = -z\frac{d}{dz} \cdot \left[\frac{Az}{z-\alpha}\right] = \frac{A\alpha z}{(z-\alpha)^2}$$

Oblast konvergencije je ista kao za sekvencu $\alpha^n \cdot u[n]$ i data je sa $|z| > |\alpha|$.

Primjer 10.17:

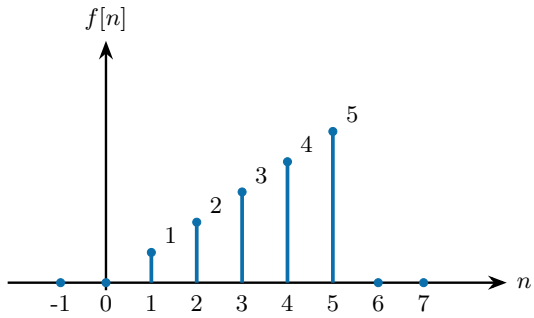
Odrediti z-transformaciju sekvence $f[n]$ prikazane na slici 10.10 .

Rješenje:
Sekvenca $f[n]$ se može napisati kao proizvod rampe $r[n]$ i razlike jediničnih sekvenci $u[n] - u[n-6]$.

$$f[n] = n\{u[n] - u[n-6]\} = nu[n] - nu[n-6]$$

Z-transformacija izraza $nu[n-6]$ ne može se dobiti direktno koristeći osobinu vremenskog pomaka udesno (10.45), nego $f[n]$ treba napisati na slijedeći način:

$$f[n] = nu[n] - (n-6)u[n-6] - 6u[n-6]$$



Slika 10.10: Sekvenca $f[n]$ (primjer 10.17).

Z-transformacija ovako napisanog izraza, na osnovu relacija: (10.70), (10.45) i (10.43) je:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{z^6} \cdot \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{6z}{z^6(z-1)} \\ &= \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{z^5(z-1)^2} - \frac{6}{z^5(z-1)} \\ &= \frac{z^6 - 6z + 5}{z^5(z-1)^2} \end{aligned}$$

Primjer 10.18:

Odrediti z-transformaciju signala:

$$f[n] = n\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n]$$

Rješenje:
Z-transformacija konvolucije sekvenci jednaka proizvodu z-transformacija učesnica u konvoluciji. Sekvenca $f[n]$ može se napisati u obliku:

$$f[n] = n\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] * \left(-\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n] = f_1[n] * f_2[n]$$

Z-transformacija sekvence $f_1[n]$ određuje se iz z-transformacije izraza:

$$Z\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = \frac{z}{z+\frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Zatim treba iskoristiti osobinu datu relacijom (10.70):

$$Z\{f_1[n]\} = Z\left\{n\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right) = -z\frac{z+\frac{1}{2}-z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Kako množenje sekvence promjenljivom n u vremenskom domenu ne mijenja oblast konvergencije, to je oblast konvergencije $F_1(z)$ data sa $|z| > \frac{1}{2}$.

Z-transformacija sekvence $f_2[n]$ dobije se koristeći osobinu refleksije datu relacijom (10.42) i z-transformaciju sekvence $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, koja je:

$$Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]\right\} = \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

tako da je:

$$Z\{f_2[n]\} = Z\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} u[-n]\right\} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{4}} = \frac{-4}{z-4}$$

Oblast konvergencije $F_2(z)$ je: $\frac{1}{|z|} > \frac{1}{4}$, odnosno $|z| < 4$. Konačno je:

$$F(z) = F_1(z)F_2(z) = \frac{-\frac{1}{2}z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \frac{-4}{z-4} = \frac{2z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z-4)}$$

a oblast konvergencije je: $\frac{1}{2} < |z| < 4$.

10.4 Inverzna z-transformacija

Inverzna z-transformacija određuje se iz z-transformacije vremenske sekvence $f[n]$ uz pomoć oblasti konvergencije. Inverzna z-transformacija je posebno korisna u digitalnoj obradi signala, na primjer za nalaženje impulsnog odziva digitalnih filtera. Simbolički se inverzna z-transformaciju obilježava sa:

$$f[n] = Z^{-1}[Z\{f[n]\}] = Z^{-1}[F(z)] \tag{10.71}$$

gdje je $F(z)$ z-transformacija sekvence $f[n]$. Inverzna z-transformacija, čiji je simbol Z^{-1} može se odrediti koristeći više metoda, ali će biti razmotrene tri:

- metoda određivanja $f[n]$ iz Laurentovog reda,
- metoda parcijalnih razlomaka (formula Heavisideovog razvoja),
- metoda koja koristi Laurentovu formulu (račun ostatka - reziduuma).

10.4.1 Određivanje inverzne z-transformacije iz Laurentovog reda

Određivanje vremenske sekvence $f[n]$, ako je poznata z-transformacije $F(z)$ te sekvence, zahtijeva da se $F(z)$ napiše u obliku Laurentovog reda. Koeficijent uz z^{-n}, prema relaciji

(10.6), je vrijednost $f[n]$. Ako $F(z)$ ima oblik količnika dva polinoma:

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots b_M z^{-M}} \tag{10.72}$$

Laurentov red se može dobiti metodom dugog dijeljenja. Prema definiciji (10.6) koeficijent uz z^{-n} je odgovarajuća vrijednost $f(n)$.

Primjer 10.19:

Primjenom Laurentovog reda odrediti $f[n]$ ako je zadata z-transformacija $F(z)$ sekvence $f[n]$, čija je oblast konvergencije $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$:

$$F(z) = \frac{z^2 + 3z + 4 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 2z^3}{z}$$

Rješenje:
U ovom slučaju Laurentov red se dobije dijeljenjem $F(z)$ sa z :

$$F(z) = z + 3 + 4z^{-1} + 2z^{-2} + 5z^{-3} + 2z^2$$

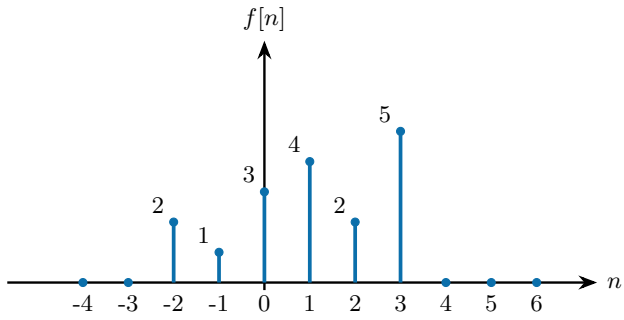
Iz definicije z-transformacije (10.6) dobije se:

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) z^{-n} = f(-1)z^1 + f(0)z^0 + f(1)z^{-l} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + f(-2)z^2$$

Poređenjem ovog izraza sa datim Laurentovim redom dobijaju se vrijednosti $f(n)$:

$$f(-2) = 2, \quad f(-1) = 1, \quad f(0) = 3, \quad f(1) = 4, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 5$$

za $n = -2, ..., 3$, na osnovu čega se može nacrtati sekvenca $f[n]$ (slika 10.11.), koja ima i nekauzalni i kauzalni dio.



Slika 10.11: Sekvenca $f[n]$ (primjer 10.19).

Primjer 10.20:

Neka je zadata z-transformacija kauzalnog LTI sistema $f[n]$. Koristeći metodu dugog dijeljenja odrediti inverznu z-transformaciju.

$$F(z) = \frac{1}{z^3 - z^2}$$

Rješenje:
Dugim dijeljenjem dobije se izraz (10.73):

$$\begin{array}{l} 1 : \left(z^3 - z^2\right) = z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + \ldots \\ \underline{1 \mp z^{-1}} \\ \quad z^{-1} \\ \quad \underline{z^{-1} \mp z^{-2}} \\ \qquad z^{-2} \\ \qquad \underline{z^{-2} \mp z^{-3}} \\ \qquad\quad z^{-3} \\ \qquad\quad \underline{z^{-3} \mp z^{-4}} \\ \qquad\qquad z^{-4} \quad \ldots \end{array} \tag{10.73}$$

odnosno izraz $F(z) = z^{-3} + z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + \ldots$ Koeficijent uz z^{-n} je odgovarajuća vrijednost $f(n)$, odnosno $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 1$, $f(5) = 1$, $f(6) = 1$, $f(7) = 1$, itd. Uočava se da je opći oblik odgovarajuće vremenske sekvence:

$$f[n] = u[n-3]$$

Iz prethodnog primjera se čini da se iz nekoliko vrijednosti $f(n)$ veoma jednostavno može odrediti opći oblik $f[n]$, što je u većini slučajeva nemoguće.

Primjer 10.21:

Koristeći metodu dugog dijeljenja naći inverznu z-transformaciju izraza:

$$F(z) = \frac{z^3 - z^2 + z - \frac{1}{16}}{z^3 - \frac{5}{4}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{16}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Rješenje:
Dugim dijeljenjem se dobije izraz:

$$F(z) = 1 + \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{13}{16}z^{-2} + \frac{57}{64}z^{-3} + \ldots$$

iz koga slijedi da su vrijednosti sekvence:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = \frac{1}{4}, \quad f(2) = \frac{13}{16}, \quad f(3) = \frac{57}{64}, \text{ itd.}$$

Iz dobijenih vrijednosti se ne može lako zaključiti koji je opći oblik sekvence $f[n]$. Koristeći metodu parcijalnih razlomaka, koja se razmatra u narednom dijelu, dolazi se do slijedećeg oblika sekvence $f[n]$:

$$f[n] = \delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 5n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 9\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

10.4.2 Odredivanje inverzne z-transformacije metodom parcijalnih razlomaka (formula Heavisideovog razvoja)

Za primjenu ove metode, prvo izraz za z-transformaciju datu relacijom (10.23) treba napisati tako da koeficijent uz najviši član u nazivniku bude jednak jedinici, tj. u obliku:

$$F(z) = \frac{\frac{a_0}{b_0}\prod_{k=1}^{N}(z - z_k)}{\prod_{k=1}^{M}(z - p_k)} \tag{10.74}$$

Ovaj izraz se može rastaviti na sumu parcijalnih razlomaka, pri čemu se mogu javiti dva slučaja: a) kada izraz sadrži isključivo jednostruke polove, b) kada izraz sadrži i polove višeg reda.

Ako egzistiraju samo jednostruki polovi u nazivniku relacije (10.74), tada se razvoj vrši po formuli:

$$F(z) = B_0 + \frac{C_1 z}{z - p_1} + \frac{C_2 z}{z - p_2} + \ldots + \frac{C_M z}{z - p_M} \tag{10.75}$$

gdje su p_k polovi $F(z)$, a C_k koeficijenti ili ostaci (reziduumi) $F(z)$, ili u općem slučaju:

$$F(z) = B_0 + \sum_{k=1}^{M} \frac{C_k z}{z - p_k}, \quad B_0 = \frac{a_N}{b_M} \tag{10.76}$$

Relacija (10.76) je formula Heavisideovog razvoja. Ako je u relaciji (10.74) $N < M$, onda je u relaciji (10.75) koeficijent $B_0 = 0$. Ako je $N > M$ onda $F(z)$ treba reducirati tako da je $N \leq M$.

Koeficijenti C_k, kojima odgovaraju polovi p_k, mogu se dobiti množeći obje strane relacije (10.76) sa $(z - p_k)/z$, a zatim naći graničnu vrijednost kada $z \to p_k$:

$$C_k = \left.\frac{F(z)}{z}(z - p_k)\right|_{z \to p_k} \tag{10.77}$$

Kako inverzna z-transformacija zavisi od oblasti konvergencije, to ako je oblast konvergencije $|z| > |p_k|$, onda je:

$$\frac{C_k z}{z - p_k} \overset{z}{\longleftrightarrow} C_k (p_k)^n u[n] \tag{10.78}$$

Ako je oblast konvergencije $|z| < |p_k|$, onda je:

$$\frac{C_k z}{z - p_k} \overset{z}{\longleftrightarrow} -C_k (p_k)^n u[-n-1] \tag{10.79}$$

Ako $F(z)$ sadrži jedan ili više višestrukih polova višestrukosti m, onda u izraz (10.76) za svaki od višestrukih polova treba uključiti i član:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i z}{(z-p_k)^i} \tag{10.80}$$

Koeficijenti D_i dobiju se iz relacije:

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!} \frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}} \left[(z-p_k)^m \frac{F(z)}{z} \right]_{z \to p_k} \tag{10.81}$$

Primjer 10.22:

Odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ čija je unilateralna z-transformacija data slijedećim izrazom:

$$F(z) = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)}$$

Rješenje:
Polovi $F(z)$ su prvog reda, te je na osnovu relacije (10.76):

$$F(z) = \frac{z(a-b)}{(z-a)(z-b)} = \frac{C_1 z}{z-a} + \frac{C_2 z}{z-b}$$

Koeficijenti C_1 i C_2 se određuju na osnovu relacije (10.77):

$$\left.\frac{F(z)(z-a)}{z}\right|_{z=a} = \left.\frac{a-b}{z-b}\right|_{z=a} = C_1 + \left.\frac{C_2(z-a)}{z-b}\right|_{z=a} = C_1 = 1$$
$$\left.\frac{F(z)(z-b)}{z}\right|_{z=b} = \left.\frac{a-b}{z-a}\right|_{z=b} = \left.\frac{C_1(z-b)}{z-a} + C_2\right|_{z=b} = C_2 = -1$$

Uvrštavajući vrijednosti za koeficijente C_1 i C_2, dobije se:

$$F(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{-z}{z-b} = F_1(z) + F_2(z)$$

Za nalaženje sekvence $f[n]$ iz $F_1(z)$ i $F_2(z)$ može se koristiti tabela 10.1 ili relacija (10.78), te je kauzalna sekvenca $f[n]$ data sa:

$$f[n] = (a^n - b^n)\, u[n]$$

Primjer 10.23:

Odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ čija je z-transformacija data izrazom:

$$F(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

Rješenje:
Iz tabele 10.1 vidi se da sekvenca $\sin\omega_0 n \cdot u[n]$ ima z-transformaciju:

$$\frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$$

koja je jednaka zadatoj z-transformaciji $F(z)$ pod uslovom $\sin\omega_0 = 1$, odnosno $\omega_0 = \pi/2$. Na osnovu toga nalazi se inverzna z-transformacija:

$$f[n] = \sin\frac{n\pi}{2}u[n]$$

Primjer 10.24:

Odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ ako je njena unilateralna z-transformacija:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)^2}$$

Rješenje:
Kako je $F(z)$ količnik dva polinoma i sadrži pol prvog reda $z = 0.5$ i pol drugog reda $z = 1$, Heavisideov razvoj se dobija iz relacija (10.76) i (10.80):

$$F(z) = \frac{Cz}{z-0.5} + \frac{D_1 z}{z-1} + \frac{D_2 z}{(z-1)^2}$$

Za dobijanje koeficijenta C koristi se postupak koji je pokazan ranije. Obje strane prethodne relacije množe se sa $(z-0.5)/z$. Uvrštavanjem $z = 0.5$ dobije se:

$$C = \left.\frac{(z-0.5)\cancel{z}}{\cancel{(z-0.5)}(z-1)^2}\right|_{z=0.5} = \frac{0.5}{(0.5-1)^2} = 2$$

Za određivanje D_1 koristi se relacija (10.81), sa $i = 1$ i $m = 2$.

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2}{z}F(z)\right]_{z=1} = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2\cancel{z}}{\cancel{(z-0.5)}(z-1)^2}\right]_{z=1} \\ &= \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-0.5}\right)_{z=1} = \left.\frac{z-0.5-z}{(z-0.5)^2}\right|_{z=1} = -2 \end{aligned}$$

Slično, za određivanje D_2 koristi se relacija (10.81), sa $i = 2$ i $m = 2$.

$$D_2 = \left.\frac{(z-1)^2F(z)}{z}\right|_{z=1} = \left.\frac{(z-1)^2\cancel{z}}{\cancel{(z-0.5)}(z-1)^2}\right|_{z=1} = \frac{1}{(1-0.5)} = 2$$

Konačno $F(z)$ je:

$$F(z) = \frac{2z}{z-0.5} - \frac{2z}{z-1} + \frac{2z}{(z-1)^2}$$

Inverzna z-transformacija svakog od članova sa desne strane prethodne relacije dobije se korištenjem tabele 10.1, tako da je:

$$f[n] = \{2(0.5)^n - 2 + 2n\}\, u[n] = 2\,\{(n-1) + (0.5)^n\}\, u[n]$$

Primjer 10.25:

Potrebno je odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ ako je njena z-transformacija:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-3)(z-5)}, \quad 3 < |z| < 5$$

Rješenje:
Kako je $F(z)$ količnik dva polinoma i sadrži polove prvog reda, primjenom relacije (10.76) (pri čemu je stepen polinoma u brojniku funkcije $F(z)$ manji od stepena polinoma u nazivniku) dobija se:

$$F(z) = \frac{2z}{(z-3)(z-5)} = \frac{C_1 z}{z-3} + \frac{C_2 z}{z-5}$$

Za dobivanje koeficijenta C_1 obje strane prethodne relacije se množe sa $\frac{z-3}{z}$ uzimajući da je $z = 3$.

$$F(z)\frac{(z-3)}{z}\bigg|_{z=3} = \frac{2 \not{z}(z-3)}{\not{z}(z-3)(z-5)}\bigg|_{z=3} = C_1 + \frac{C_2(z-3)}{z-5}\bigg|_{z=3} = \frac{2}{3-5} = -1$$

Dakle, koeficijent $C_1 = -1$. Slično se dobije i koeficijent C_2:

$$F(z)\frac{(z-5)}{z}\bigg|_{z=5} = \frac{2z(z-5)}{z(z-3)(z-5)}\bigg|_{z=5} = \frac{C_1(z-5)}{z-3} + C_2\big|_{z=5} = \frac{2}{5-3} = 1$$

pa slijedi:

$$F(z) = \frac{-z}{z-3} + \frac{z}{z-5} = F_1(z) + F_2(z)$$

Analitički oblik sekvence $f[n]$ može se dobiti na osnovu relacija (10.78) za $3 < |z|$ i (10.79) za $|z| < 5$, tako da je:

$$f[n] = \begin{cases} -3^n, & n \geq 0 \\ -5^n, & n < 0 \end{cases} = -3^n u[n] - 5^n u[-n-1]$$

10.4.3 Određivanje inverzne z-transformacije pomoću Laurentove formule

Sekvenca $f[n]$ može se odrediti i pomoću Laurentove formule za određivanje koeficijenata Laurentovog reda. Ako se u definicionoj formuli (10.6) u funkciji $F(z)$ promjenljiva z

zamjeni sa $R \cdot e^{-j\omega_0 t}$, pri čemu je:

$$r_1 < R < r_2$$

što garantuje da je z u prstenu konvergencije, dobije se:

$$F(z) = F\left(R \cdot e^{-j\omega_0 t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) \cdot R^{-n} \cdot e^{jn\omega_0 t} \tag{10.82}$$

Suma ima oblik Fourierovog reda, pa važi:

$$C_n = f(n)R^{-n} = \frac{1}{T}\int_0^T F\left(R \cdot e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{10.83}$$

Ako se izraz (10.83) prvo pomnoži sa R^n, a zatim umjesto $R \cdot e^{-j\omega_0 t}$ ponovo stavi z, od linijskog integrala dobije se integral po zatvorenoj konturi C_1 koja se kompletno nalazi u oblasti konvergencije:

$$z = R \cdot e^{-j\omega_0 t} \implies dz = -j\omega_0 R \cdot e^{-j\omega_0 t} dt \implies dt = \frac{1}{-j\omega_0 R} \cdot e^{j\omega_0 t} dz$$

$$\implies f[n] = \frac{\omega_0}{2\pi}\int_0^T F\left(Re^{-j\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t} \cdot R^n \frac{e^{j\omega_0 t}}{-j\omega_0 R} dz = \int_{C_1\uparrow} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j} dz \tag{10.84}$$

U relaciji (10.84) C_1 je krug poluprečnika R (slika 10.12.), a smjer konture je suprotan od smjera kretanja kazaljke na satu. Izraz (10.84) predstavlja definicioni izraz za inverznu z-transformaciju.

Krivolinijski integral po konturi C_1 može se izračunati po Cauchyevoj teoremi koja tvrdi da je integral analitičke funkcije po zatvorenoj konturi jednak nuli. Ako kontura ima singularnih tačaka, integral se računa po teoremi residuuma (ostataka) poznatoj iz kompleksne analize.

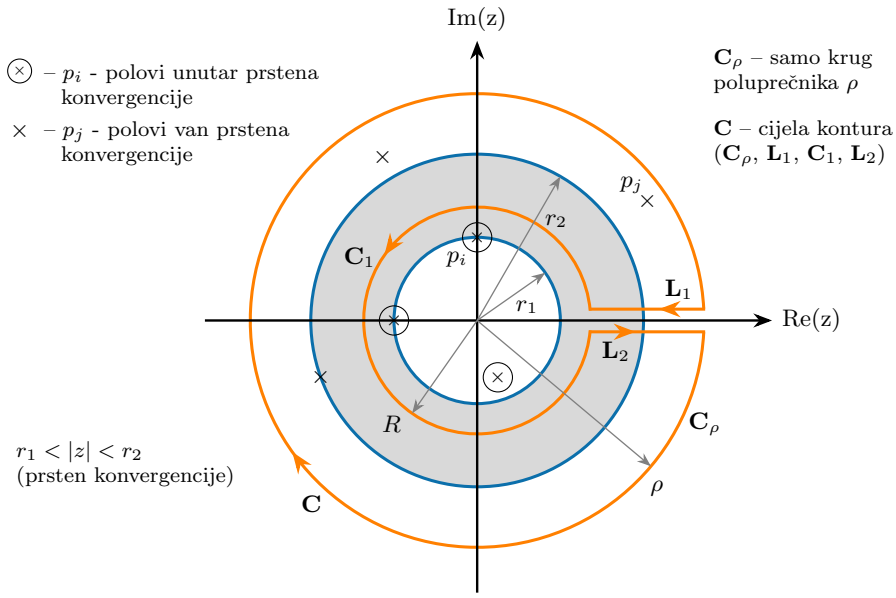
$$f[n] = \int_{C_1\uparrow} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j} dz = \sum_{\substack{\text{u polovima}\\ \text{unutar}\\ \text{konture } C_1}} \operatorname{Res} F(z)z^{n-1} \tag{10.85}$$

Polovi unutar konture C_1 mogu biti ili polovi $F(z)$, obilježeni sa p_i, ili pol $z = 0$, koji može biti višestruk. Vrijednosti n kauzalnog dijela sekvence $f[n]$ se određuje na osnovu višestrukosti nule/pola $z = 0$ u brojniku odnosno nazivniku polinoma $F(z)$. Da nula $z = 0$ ne bi postala pol, mora biti zadovoljen uslov:

$$p_0 + (n-1) \geq 0 \tag{10.86}$$

gdje je sa p_0 označena višestrukost nule $z = 0$.

Za slučaj nekauzalnih sekvenci, pojavljuje se po pravilu pol $z = 0$ koji može imati jako veliku višestrukost, te je računanje inverzne z-transformacije izuzetno teško. Zbog toga se računanje inverzne z-transformacije može sprovesti i korištenjem polova van oblasti konvergencije. Naime, za polove koji nisu unutar konture C_1, u z-ravni (slika 10.12.) uvodi se kontura C koja se sastoji od konture C_1, dvije prave linije L_1 i L_2 i kruga C_ρ,



Slika 10.12: Određivanje inverzne z-transformacije obuhvatanjem polova u z-ravni.

poluprečnika ρ. Poluprečnik ρ je tako odabran da se svi polovi $F(z)$ nalaze unutar kruga C_ρ. Kontura C obuhvata sve polove $F(z)$ koji nisu unutar konture C_1, a njen smjer odgovara smjeru kazaljke na satu. Zbog toga važi:

$$\int_{C\downarrow} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz = -\sum_{\substack{\text{u polovima}\\ \text{van prstena}\\ \text{konvergencije}}} \operatorname{Res} F(z)z^{n-1} \tag{10.87}$$

Negativan znak se pojavljuje jer je smjer obilaska konture C isti kao smjer kretanja kazaljke na satu. Integral (10.87) je pod određenim uslovima jednak $f[n]$. Naime, kako se kontura C može rastaviti na dvije kružne konture C_1 i C_ρ i dvije linije L_1 i L_2 (slika 10.12.), vrijedi:

$$\begin{aligned}\int_{C\uparrow} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz = \int_{C_1\downarrow} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz + \int_{L_1} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz + \\ + \int_{L_2} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz + \int_{C_\rho} \frac{F(z)z^{n-1}}{2\pi j}dz\end{aligned} \tag{10.88}$$

Prvi integral u relaciji (10.88) je jednak $f[n]$, dok se drugi i treći poništavaju, jer linije L_1 i L_2 leže beskonačno blisko jedna drugoj i idu u suprotnim smjerovima. Kada $\rho \to \infty$, četvrti integral po krugu poluprečnika ρ, uz smjenu $z = \rho \cdot e^{j\theta}$, dobija oblik:

$$I_4 = \lim_{\rho\to\infty} \int_{\theta=2\pi}^{0} \frac{F\left(\rho e^{j\theta}\right)\rho^{n-1}e^{j\theta(n-1)}\rho j e^{j\theta}}{2\pi j}d\theta \tag{10.89}$$

Neka je $F(z)$ količnik dva polinoma, pri čemu je stepen polinoma u brojniku p, a stepen polinoma u nazivniku q. Kada je ρ veoma veliko, ovaj količnik se može aproksimirati sa:

$$F\left(\rho e^{j\theta}\right) \cong \frac{a_p \rho^p e^{j\theta \cdot p}}{b_q \rho^q e^{j\theta \cdot q}} = \frac{a_p}{b_q} \rho^{p-q} e^{j\theta(p-q)} \tag{10.90}$$

Ovdje su a_p i b_q koeficijenti uz najviše stepene polinoma u brojniku i nazivniku. Uz relaciju (10.90) integral (10.89) približno postaje:

$$I_4 \cong \lim_{\rho \to \infty} \int_{\theta=2\pi}^{0} \frac{a_p}{b_q} \cdot \frac{\rho^{p-q+n} e^{j\theta(p-q+n)}}{2\pi} d\theta \tag{10.91}$$

Ako je $p - q + n < 0$, ovaj integral teži nuli ako $\rho \to \infty$. Drugačije se ovaj uslov može izraziti na slijedeći način:

$$I_4 = 0 \quad \text{ako je} \quad \lim_{z \to \infty} F(z) z^n = 0 \tag{10.92}$$

Prema tome, vrijednost n nekauzalnog dijela sekvence $f[n]$ određuje se iz uslova (10.92) koji se može napisati i u obliku:

$$p - q + n < 0 \tag{10.93}$$

gdje je p eksponent polinoma u brojniku, a q eksponent polinoma u nazivniku izraza $F(z)$.

Iz ovoga se može zaključiti da se za računanje $f[n]$, u polovima van prstena konvergencije, može koristiti i formula:

$$f[n] = -\sum_{\substack{\text{u polovima} \\ \text{van prstena} \\ \text{konvergencije}}} \operatorname{Res} F(z) z^{n-1} \quad \text{pod uslovom} \lim_{z \to \infty} F(z) z^n = 0 \tag{10.94}$$

Za residuume višestrukosti m važi relacija:

$$\operatorname*{Res}_{\substack{\text{pol } z=p_k \\ \text{višestrukosti } m}} F(z) \cdot z^{n-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to p_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - p_k)^m F(z) \cdot z^{n-1} \right] \tag{10.95}$$

što se za slučaj višestrukosti $m = 1$ svodi na:

$$\operatorname*{Res}_{\text{pol } z=p_k} F(z) \cdot z^{n-1} = \lim_{z \to p_k} \left[(z - p_k) F(z) \cdot z^{n-1} \right] \tag{10.96}$$

Primjer 10.26:

Koristeći Laurentovu formulu odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ ako je data njena z-transformacija i prsten konvergencije:

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z-3)}, \quad 2 < |z| < 3$$

Rješenje:
Funkcija $F(z)$ ima dva pola - pol $z = 2$, u unutrašnjosti prstena konvergencije i pol $z = 3$, van prstena konvergencije.
Kako je $z = 2$ pol u unutrašnjosti prstena konvergencije, $f_1[n]$ kao kauzalni dio sekvence, određuje se iz relacije (10.85). Na osnovu uslova (10.86) vrijednost n se određuje iz $2 + n - 1 \geq 0$ tj. $n \geq -1$. Na osnovu relacije (10.95) dobije se:

$$f_1[n] = \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to 2} \frac{d^0}{dz^0} \left[(z-2)^1 \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} z^{n-1} \right] = \frac{2^{n+1}}{2-3} = -2^{n+1} \quad (10.97)$$

Za pol $z = 3$, koji se nalazi van prstena konvergencije, $f_2[n]$, kao nekauzalni dio sekvence, određuje se iz relacije (10.94):

$$f_2[n] = -\frac{1}{(1-1)!} \lim_{z\to 3} \frac{d^0}{dz^0} \left[(z-3)^1 \frac{z^2}{(z-2)(z-3)} z^{n-1} \right] = -\frac{3^{n+1}}{3-2} = -3^{n+1} \quad (10.98)$$

Za nekauzalni dio sekvence mora biti ispunjen uslov dat relacijom (10.93), i u ovom slučaju n se određuje iz $2 - 2 + n < 0 \Rightarrow n < 0$. Sve vrijednosti sekvence $f[n]$ su određene izrazima (10.97) i (10.98). Vrijednost $f(n)$ za $n = -1$ može se računati i po jednom i po drugom izrazu, te je konačno:

$$f[n] = f_1[n] + f_2[n] = \begin{cases} -2 \cdot 2^n, & n \geq -1 \\ -3 \cdot 3^n, & n < 0 \end{cases} \quad (10.99)$$

Primjer 10.27:

Odrediti analitički oblik sekvence $f[n]$ ako je njena z-transformacija:

$$F(z) = \frac{1}{(z-5)(z-4)z^3}, \quad |z| > 5$$

Rješenje:
Kako za kauzalne sekvence nema polova van kruga poluprečnika $r_2 > 5$, koristi se samo formula:

$$f[n] = \sum_{\substack{\text{u polovima} \\ \text{unutar prstena} \\ \text{konvergencije}}} \operatorname{Res} F(z) z^{n-1} \quad (10.100)$$

Specijalno važi:

$$f[n] = 0 \quad \text{ako je} \quad \lim_{z\to\infty} F(z) z^n = 0 \quad (10.101)$$

Primjenom relacije (10.100), dobija se:

$$\begin{aligned} f[n] &= \lim_{z\to 5} \frac{z-5}{(z-5)(z-4)z^3}\cdot z^{n-1} + \lim_{z\to 4} \frac{z-4}{(z-5)(z-4)z^3}\cdot z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to 5} \frac{z^{n-4}}{z-4} + \lim_{z\to 4} \frac{z^{n-4}}{z-5} \\ &= 5^{n-4} - 4^{n-4} \end{aligned}$$

Za određivanje vrijednosti n koristi se uslov $p_0 + (n-1) \geq 0$, i u ovom primjeru je $p_0 = -3$, odnosno $-3 + n - 1 \geq 0$ ili $n \geq 4$.
Sekvenca $f[n]$ ima vrijednosti koje su jednake nuli za vrijednosti diskretnog vremena n koje se određuje iz $\lim_{z\to\infty} F(z)z^n = 0$ i uslova: $p - q + n < 0 \implies -3 - 2 + n < 0$, tj. $n < 5$. Vidi se da se $f(4)$ može računati na dva načina i u oba slučaja je $f(4) = 0$.

10.5 Analiza diskretnog LTI sistema korištenjem z-transformacije

Z-transformacija ima značajnu ulogu pri analizi i predstavljanju diskretnih LTI sistema. Ako je sistem linearan i stacionaran, onda je njegov odziv $g[n]$ određen konvolucijom:

$$g[n] = f[n] * h[n] \tag{10.102}$$

Ako ulazna sekvenca $f[n]$ ima z-transformaciju $F(z)$, a z-transformacija impulsnog odziva $h[n]$ je $H(z)$ (koja predstavlja funkciju sistema ili prenosnu funkciju), onda se primjenom teoreme o konvoluciji, na relaciju (10.102), dobija:

$$G(z) = F(z)\cdot H(z) \tag{10.103}$$

Neka su poluprečnici konvergencije za $F(z)$ dati sa r_1^f i r_2^f, a poluprečnici konvergencije za $H(z)$ sa r_1^h i r_2^h. Prema teoremi o konvoluciji, poluprečnici konvergencije za $G(z)$ definirani su sa:

$$r_1^g = \max\left(r_1^f, r_1^h\right) \quad \text{i} \quad r_2^g = \min\left(r_2^f, r_2^h\right)$$

Ukoliko su poznati $G(z)$ i poluprečnici konvergencije, $g[n]$ se može naći jednom od već datih metoda. Ako se $g[n]$ traži preko residuuma, onda je:

$$g[n] = \sum_{\substack{\text{u svim}\\ \text{polovima}\\ F(z)H(z)}} \operatorname{Res} G(z)\cdot z^{n-1} \tag{10.104}$$

10.5.1 Kauzalnost i stabilnost LTI sistema

Za većinu primjena interesantni su uslovi koji obezbjeđuju stabilnost i kauzalnost sistema, a oni se mogu definirati na osnovu polova, nula i oblasti konvergencije prenosne funkcije.

Diskretni LTI sistem s impulsnim odzivom $h[n]$ i prenosnom funkcijom:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) z^{-n}$$

je kauzalan ako i samo ako je oblast konvergencije $H(z)$ spoljašnost kruga čiji je poluprečnik određen polom najudaljenijim od koordinatnog početka kompleksne z ravni. Također, eksponent polinoma u brojniku ne smije biti veći od eksponenta polinoma u nazivniku.

Potreban i dovoljan uslov za stabilnost LTI sistema je apsolutna sumabilnost njegovog impulsnog odziva. Taj uslov se svodi na slijedeće: diskretni LTI sistem je stabilan ako i samo ako se svi polovi prenosne funkcije $H(z)$ u z-ravni nalaze u unutrašnjosti jediničnog kruga (centriranog u koordinatnom početku) kompleksne z-ravni, ne uključujući samu kružnicu.

Oblast konvergencije kauzalnog i stabilnog LTI sistema mora obuhvatati jedinični krug, što znači da magnituda svih polova mora biti manja od jedan. Polovi mogu biti jednostruki ili višestruki.

10.5.2 Z-transformacija impulsnih odziva kauzalnih LTI sistema

LTI sistem može se opisati linearnom diferentnom jednačinom N-tog reda s konstantnim koeficijentima:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{10.105}$$

gdje je $x[n]$ ulaz, $y[n]$ izlaz iz sistema, a a_k i b_k su realni konstantni koeficijenti. Ako su svi početni uslovi nula, uzimajući u obzir osobinu linearnosti i vremenskog pomaka, z-transformacija obje strane relacije (10.105) je:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \quad \Longrightarrow \quad Y(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z) \tag{10.106}$$

Ako se definira funkcija sistema $H(z)$ kao:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{10.107}$$

onda $H(z)$ kauzalnog LTI sistema predstavlja količnik dva polinoma po promjenljivoj z ili po z^{-1} sa realnim koeficijentima, tj. predstavlja racionalnu funkciju kompleksne učestanosti. $H(z)$ je z-transformacija impulsnog odziva $h[n]$. Kako se radi o kauzalnom LTI sistemu, to eksponent polinoma u brojniku relacije (10.107) mora biti manji ili jednak od eksponenta polinoma u nazivniku, tj. $M \leq N$. Korijeni polinoma u brojniku su nule prenosne funkcije, a korijeni polinoma u nazivniku su polovi prenosne funkcije. Ako se relacija (10.107) izrazi preko nula i polova, može se napisati u obliku:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N)}{a_0 (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_M)} \tag{10.108}$$

Primjenom

Primjer 10.28:

Neka je LTI sistem opisan diferentnom jednačinom:

$$y[n] = x[n] + ay[n-1]$$

Ova jednačina opisuje rekurzivni sistem kod koga izlaz u sadašnjem trenutku zavisi od izlaza u prethodnom trenutku i ulaza u sadašnjem trenutku. Potrebno je odrediti impulsni odziv.

Rješenje:
Za nalaženje impulsnog odziva LTI sistema $h[n]$ iz diferentne jednačine, prvo treba odrediti prenosnu funkciju $H(z)$. Z-transformacija zadate diferentne jednačine je:

$$Y(z) = X(z) + az^{-1}Y(z)$$

Na osnovu relacije (10.107) prenosna funkcija sistema u z-ravni je:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Za izbor oblasti konvergencije postoje dvije mogućnosti $|z| > a$ i $|z| < a$. Obzirom da zadata diferentna jednačina opisuje kauzalan sistem $|z| > |a|$ se nameće kao jedina prihvatljiva oblast konvergencije. Inverzna z-transformacija daje:

$$h[n] = a^n u[n]$$

Za dati sistem može se razmatrati stabilnost zavisno od parametra a. Tako za $|a| < 1$ sistem je stabilan i kauzalan, a za $|a| > 1$ sistem je nestabilan i kauzalan.

10.5.3 Primjena unilateralne z-transformacije za rješavanje diferentnih jednačina

Diferentnim jednačinama može se opisati svaki diskretni linearni dinamički sistem, a kako se primjenom z-transformacije na diferentne jednačine dobijaju algebarske jednačine, to znači da se analiza diskretnih linearnih dinamičkih sistema svodi na rješavanje sistema algebarskih jednačina. Ako u trenutku primjene kauzalnog pobudnog signala $x[n]$ sistem nije u mirovanju, tj. kada početni uslovi nisu jednaki nuli, za određivanje odziva se može koristiti unilateralna z-transformacija.

Za nalaženje z-transformacije članova oblika $y[n-m]u[n]$ treba tačno utvrditi da li koristiti relaciju (10.47), ili (10.49). Izbor zavisi od toga kako su zadati početni uslovi, jer $y[n]$, preko početnih uslova, egzistira i za $n < 0$, što će biti pokazano na primjerima.

Primjer 10.29:

Primjenom z-transformacije riješiti diferentnu jednačinu:

$$y[n+2] - 0.8y[n+1] + 0.25y[n] = x[n]$$

ako je $x[n] = 10(0.5)^n$ i početni uslovi $y(0) = 4$ i $y(1) = 2$.

Rješenje:
Ako se na datu jednačinu primjeni relacija (10.49), nalazeći z-transformaciju obje strane jednačine, dobije se:

$$z^2\left(Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)\right) - 0.8z(Y(z) - y(0)) + 0.25Y(z) = X(z)$$
$$\left(z^2 - 0.8z + 0.25\right)Y(z) = X(z) + z^2y(0) + zy(1) - 0.8zy(0) = X(z) + 4z^2 - 1.2z$$

Obzirom da je:

$$x[n] = 10(0.5)^n \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{10z}{z - 0.5}$$

dolazi se do:

$$Y(z) = \frac{4z^3 - 3.2z^2 + 10.6z}{(z - 0.5)(z^2 - 0.84z + 0.25)}$$

Kako je $Y(z)$ količnik dva polinoma, Laurentov red se dobije ako se obje strane posljednje relacije podijele sa z, i na $Y(z)/z$ primjeni Heavisideov razvoj:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{4z^2 - 3.2z + 10.6}{(z - 0.5)(z^2 - 0.84z + 0.25)} = \frac{100}{z - 0.5} + \frac{-48 + j16}{z - 0.5e^{j0.6435}} + \frac{-48 + j16}{z - 0.5e^{-j0.6435}}$$

Inverzna z-transformacija daje:

$$y[n] = \{100(0.5)^n - (0.5)^n(96\cos 0.6435n + 32\sin 0.6435n)\}\, u[n]$$

Primjer 10.30:

Koristeći z-transformaciju riješiti diferentnu jednačinu:

$$4y[n+2] + 4y[n+1] + y[n] = x[n+1]$$

s početnim uslovima $y(-1) = 0, y(-2) = 1$, ako je $x[n] = u[n]$,
a) koristeći metodu parcijalnih razlomaka (formula Heavisideovog razvoja),
b) koristeći metodu koja koristi Laurentovu formulu (račun ostatka - reziduuma).

Rješenje:
Z-transformacija jedinične sekvence je: $x[n] = u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z/(z-1)$. Kako su početni uslovi $y(-1) = 0$ i $y(-2) = 1$, to se diskretno vrijeme n zamjenjuje diskretnim vremenom

$n-2$, tako da data diferentna jednačina postaje:

$$4y[n]+4y[n-1]+y[n-2]=x[n-1]$$

Ako se na ovu diferentnu jednačinu primjeni relacija (10.47), z-transformacija obje strane je:

$$4Y(z)+4\left[\frac{1}{z}Y(z)+y(-1)\right]+\frac{1}{z^2}Y(z)+\frac{1}{z}y(-1)+y(-2)=\frac{1}{z}X(z)$$

$$Y(z)\left(4+\frac{4}{z}+\frac{1}{z^2}\right)+1=\frac{1}{z-1}$$

$$Y(z)\left(4z^2+4z+1\right)=z^2\left(\frac{1}{z-1}-\frac{z-1}{z-1}\right)=\frac{z^2(2-z)}{z-1}$$

$$Y(z)=\frac{z^2(2-z)}{(4z^2+4z+1)(z-1)}=\frac{-\frac{1}{4}z^2(z-2)}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)(z-1)} \tag{10.109}$$

a) Kako je $Y(z)$ količnik dva polinoma i sadrži pol prvog reda $z=1$ i pol drugog reda $z=-1/2$, koristeći formulu Heavisideovog razvoja dobije:

$$Y(z)=\frac{-\frac{1}{4}z^2(z-2)}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)(z-1)}=\frac{Cz}{z-1}+\frac{D_1z}{z+\frac{1}{2}}+\frac{D_2z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Za određivanje koeficijenta C koristi se postupak koji je pokazan ranije. Obje strane prethodne relacije množe se sa $(z-1)/z$. Stavljanjem $z=1$ dobije se:

$$C=\left.\frac{-\frac{1}{4}z(z-2)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}\right|_{z=1}=\frac{-\frac{1}{4}(-1)}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{1}{9}$$

Za određivanje koeficijenta D_1 koristi se relacija (10.81), sa $i=1$ i $m=2$.

$$\begin{aligned}
D_1&=\left.\frac{d}{dz}\frac{-\frac{1}{4}z(z-2)}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{d}{dz}\frac{z^2-2z}{z-1}\right|_{z=-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{(2z-2)(z-1)-z^2+2z}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{1}{4}\cdot\left.\frac{z^2-2z+2}{(z-1)^2}\right|_{z=-\frac{1}{2}}\\
&=-\frac{13}{36}
\end{aligned}$$

Slično, za određivanje D_2 koristi se relacija (10.81), sa $i=2$ i $m=2$.

$$D_2=\left.\frac{-\frac{1}{4}z(z-2)}{(z-1)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{3}{2}}=\frac{5}{24}$$

Konačno je:

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{9}z}{z-1} - \frac{13}{36}\cdot\frac{z}{z+\frac{1}{2}} + \frac{5}{24}\cdot\frac{z}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

a odgovarajuća vremenska sekvenca koja predstavlja rješenje zadate diferentne jednačine s početnim uslovima dobije se na osnovu tablica:

$$y[n] = \left\{\frac{1}{9} - \frac{13}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{12}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$$

b) Sekvenca $y[n]$ može se odrediti i pomoću Laurentove formule za određivanje koeficijenata Laurentovog reda. Polazeći od relacije (10.109) za z-transformaciju date diferentne jednačine:

$$Y(z) = \frac{-\frac{1}{4}z^2(z-2)}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)(z-1)}$$

koja ima pol prvog reda u $z=1$, i pol drugog reda u $z=-1/2$, te koristeći relaciju (10.95) za nalaženje residuuma, dobija se:

$$\mathrm{Res}_1 = \lim_{z\to 1}\frac{(z-1)\left(-\frac{1}{4}\right)z^2(z-2)z^{n-1}}{\left(z^2+z+\frac{1}{4}\right)(z-1)} = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)1^2(1-2)1^{n-1}}{\left(1^2+1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_2 &= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{4}\right)z^2(z-2)z^{n-1}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z-1)}\\
&= \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{(z-2)z^{n+1}}{z-1}\right\}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^{n+2}-2z^{n+1}}{z-1}\right\}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\left\{(n+2)z^{n+1}-2(n+1)z^n\right\}(z-1)-\left(z^{n+2}-2z^{n+1}\right)}{(z-1)^2}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{z^n\left(z^2-2z+2\right)+nz^n\left(z^2-3z+2\right)}{(z-1)^2}\\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{13}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{15}{4}\right)}{\frac{9}{4}}\\
&= -\frac{13}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{12}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

Na osnovu relacije (10.85) za određivanje inverzne z-transformacije, dobija se odgovarajuća vremenska sekvenca koja predstavlja rješenje zadate diferentne jednačine s početnim uslovima:

$$y[n] = \left\{\frac{1}{9} - \frac{13}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{12}n\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}u[n]$$

Primjer 10.31:

Koristeći z-transformaciju riješiti diferentnu jednačinu:

$$y[n+2] - 3y[n+1] + 2y[n] = x[n+1]$$

s početnim uslovima $y(-1) = 2, y(-2) = 3$, ako je $x[n] = 3^n u[n]$.

Rješenje:
Kako su početni uslovi $y(-1) = 2$ i $y(-2) = 3$, to se diskretno vrijeme n, kao i u prethodnom primjeru, zamjenjuje diskretnim vremenom $n-2$, tako da data diferentna jednačina postaje:

$$y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n-1]$$

Primjenom z-transformacije dobiva se:

$$\begin{aligned}
&Y(z) - 3\left[\frac{1}{z}Y(z) + y(-1)\right] + 2\left\{\frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{1}{z}y(-1) + y(-2)\right\} = \frac{1}{z}X(z)\\
&Y(z)\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2}\right) - 3\cdot 2 + \frac{2}{z}\cdot 2 + 2\cdot 3 = \frac{1}{z-3}\\
&Y(z)\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{2}{z^2}\right) = \frac{1}{z-3} - \frac{4}{z} = \frac{-3z+12}{z(z-3)}\\
&Y(z) = \frac{-3z(z-4)}{(z-3)\,(z^2-3z+2)} = \frac{C_1 z}{z-1} + \frac{C_2 z}{z-2} + \frac{C_3 z}{z-3}
\end{aligned}$$

Koeficijenti se računaju kao:

$$\begin{aligned}
C_1 &= Y(z)\frac{z-1}{z}\bigg|_{z=1} = \frac{-3(z-4)}{(z-2)(z-3)}\bigg|_{z=1} = \frac{9}{2}\\
C_2 &= Y(z)\frac{z-2}{z}\bigg|_{z=2} = \frac{-3(z-4)}{(z-1)(z-3)}\bigg|_{z=2} = -6\\
C_3 &= Y(z)\frac{z-3}{z}\bigg|_{z=3} = \frac{-3(z-4)}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=3} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Pa slijedi:

$$\begin{aligned}
&Y(z) = \frac{-3z(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{9}{2}\cdot\frac{z}{z-1} - 6\cdot\frac{z}{z-2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-3}\\
&y[n] = \left\{\frac{9}{2} - 6\cdot 2^n + \frac{3}{2}\cdot 3^n\right\} u[n]
\end{aligned}$$

Primjer 10.32:

Kauzalni vremenski invarijantni sistem, opisan je slijedećom diferentnom jednačinom:

$$2y[n+2] - y[n+1] - y[n] = x[n]$$

a) Primjenom z-transformacije naći impulsni odziv sistema.
b) Ako je $y(0) = 1$ i $\lim_{N\to\infty} y(N) = 2$, primjenom z-transformacije naći odziv na ulaz $x[n] = (-2)^{-n}u[n]$.

Rješenje:
a) Impulsni odziv se dobije uzimajući da je $y[n] = h[n]$, a $x[n] = \delta[n]$:

$$2h[n+2] - h[n+1] - h[n] = \delta[n]$$

Primjenjujući z-transformaciju na dobijenu diferentnu jednačinu, prenosna funkcija $H(z)$ je:

$$2z^2H(z) - zH(z) - H(z) = 1 \Rightarrow H(z) = \frac{1}{2z^2 - z - 1} = \frac{1}{(2z+1)(z-1)}$$
$$H(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)} - \frac{2}{3}\frac{1}{(2z+1)} = \frac{1}{3}\frac{z}{(z-1)}z^{-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{(z+1/2)}z^{-1}$$

Iz prenosne funkcije $H(z)$ dobija se impulsni odziv:

$$h[n] = \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)u[n-1] = \frac{1}{3}\left(1 - 2(-2)^{-n}\right)u[n-1]$$

b) Z-transformacija ulaza je:

$$x[n] = (-2)^{-n}u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} X[z] = \frac{2z}{2z+1}$$

Pošto je $y(0) = 1$, to je:

$$2\left(z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)\right) - (zY(z) - zy(0)) - Y(z) = \frac{2z}{2z+1}$$
$$2\left(z^2Y(z) - z^2 - zy(1)\right) - zY(z) + z - Y(z) = \frac{2z}{2z+1}$$
$$Y(z) = \frac{2z}{(2z+1)^2(z-1)} + \frac{2z^2 + z(2y(1)-1)}{(2z+1)(z-1)}$$

Prema teoremi o krajnjoj vrijednosti (10.54) dobije se:

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{2z}{(2z+1)^2(z-1)} + \frac{2z^2 + z(2y(1)-1)}{(2z+1)(z-1)}\right) = 2$$

pa je:

$$\frac{2}{9} + \frac{2 + 2y(1) - 1}{3} = 2 \implies y(1) = \frac{13}{6}$$

Dalje se izvodi:

$$Y(z) = \frac{2z}{(2z+1)^2(z-1)} + \frac{2z^2 + z(10/3)}{(2z+1)(z-1)} = \frac{z}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z-1)} + \frac{z^2 + z(5/3)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

$$Y(z) = \frac{z}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2(z-1)} + \frac{z^2}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)} + \frac{z(5/3)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-1)}$$

Inverzna z-transformacija se određuje iz:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum \operatorname{Res} Y(z) z^{n-1} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^n}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)^2} + \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{d}{dz}\frac{z^n}{2(z-1)} + \\ &\quad + \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{z^{n+1}}{z-1} + \lim_{z\to 1} \frac{z^{n+1}}{z+\frac{1}{2}} + \\ &\quad + \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{z^n \cdot \frac{5}{3}}{z-1} + \lim_{z\to 1} \frac{z^n \cdot \frac{5}{3}}{z+\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \end{aligned}$$

Primjer 10.33:

Signal $x[n]$ je pobudni signal LTI sistema opisanog diferentnom jednačinom $y[n+2] - 5y[n+1] + 6y[n] = 3x[n+1] + 5x[n]$ s početnim uslovima $y(-1) = \frac{11}{6}$, $y(-2) = \frac{37}{36}$. Koristeći z-transformaciju odrediti odziv sistema $y[n]$ ako je ulaz u sistem $x[n] = 2^{-n}u[n]$.

Rješenje:
Kako su početni uslovi $y(-1) = \frac{11}{6}, y(-2) = \frac{37}{36}$, onda je potrebno diskretno vrijeme n zamijeniti sa $(n-2)$, a zatim koristiti pomak udesno.

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 3x[n-1] + 5x[n-2]$$

Za nalaženje z-transformacije članova oblika $y[n-m]$ treba tačno utvrditi da li koristiti relaciju (10.45) ili (10.47). Kako se radi o unilateralnoj z-transformaciji koja egzistira samo za $n \geq 0$, to znači da treba primjeniti relaciju (10.47). Bez obzira što je uzeto $n \geq 0$, $y[n]$ egzistira i za $n < 0$ preko početnih uslova. Sada je:

$$\begin{aligned} y[n]\cdot u[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} Y(z) \\ y[n-1]\cdot u[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}Y(z) + y(-1) = \frac{1}{z}Y(z) + \frac{11}{6} \\ y[n-2]\cdot u[n] &\overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{1}{z}y(-1) + y(-2) = \frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{11}{6z} + \frac{37}{36} \end{aligned}$$

Isto tako je:

$$x[n] = 2^{-n} \cdot u[n] = (0.5)^n \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{z-0.5}$$
$$x[n-1] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z}X(z) + x(-1) = \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-0.5} + 0 = \frac{1}{z-0.5}$$
$$x[n-2] \cdot u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{z^2}X(z) + \frac{1}{z}x(-1) + x(-2) = \frac{1}{z^2} \cdot X(z) + 0 + 0 = \frac{1}{z(z-0.5)}$$

Kako je ulaz $x[n]$ kauzalan, to je:

$$x(-1) = x(-2) = \ldots = x(-r) = 0$$

tako da treba koristiti relaciju:

$$x[n-m]u[n] \overset{z}{\longleftrightarrow} z^{-m}X(z)$$

Na osnovu prethodnih relacija slijedi da je z-transformacija zadate diferentne jednačine:

$$Y(z) - 5\left[\frac{1}{z}Y(z) + \frac{11}{6}\right] + 6\left[\frac{1}{z^2}Y(z) + \frac{11}{6z} + \frac{37}{36}\right] = \frac{3}{z-0.5} + \frac{5}{z(z-0.5)}$$
$$Y(z)\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right) - \left(3 - \frac{11}{z}\right) = \frac{3}{z-0.5} + \frac{5}{z(z-0.5)}$$
$$Y(z)\left(1 - \frac{5}{z} + \frac{6}{z^2}\right) = \left(3 - \frac{11}{z}\right) + \frac{3z+5}{z(z-0.5)} = \frac{3z^2 - 9.5z + 10.5}{z(z-0.5)}$$

Množenjem obje strane sa z^2 dobije se:

$$Y(z)\left(z^2 - 5z + 6\right) = \frac{z\left(3z^2 - 9.5z + 10.5\right)}{(z-0.5)}$$
$$Y(z) = \frac{z\left(3z^2 - 9.5z + 10.5\right)}{(z-0.5)\left(z^2 - 5z + 6\right)} = \frac{z\left(3z^2 - 9.5z + 10.5\right)}{(z-0.5)(z-2)(z-3)} = \frac{C_1 z}{z-0.5} + \frac{C_2 z}{z-2} + \frac{C_3 z}{z-3}$$

Pa se koeficijenti računaju na slijedeći način:

$$C_1 = \left.\frac{Y(z)(z-0.5)}{z}\right|_{z=0.5} = \left.\frac{3z^2 - 9.5z + 10.5}{(z-2)(z-3)}\right|_{z=0.5} = \frac{\frac{13}{2}}{-\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{26}{15}$$
$$C_2 = \left.\frac{Y(z)(z-2)}{z}\right|_{z=2} = \left.\frac{3z^2 - 9.5z + 10.5}{(z-0.5)(z-3)}\right|_{z=2} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2} \cdot (-1)} = -\frac{7}{3}$$
$$C_3 = \left.\frac{Y(z)(z-3)}{z}\right|_{z=3} = \left.\frac{3z^2 - 9.5z + 10.5}{(z-0.5)(z-2)}\right|_{z=3} = \frac{9}{\frac{5}{2} \cdot 1} = \frac{18}{5}$$

Konačno, dobiva se:

$$Y(z) = \frac{26}{15}\left(\frac{z}{z-0.5}\right) - \frac{7}{3}\left(\frac{z}{z-0.2}\right) + \frac{18}{5}\left(\frac{z}{z-0.3}\right)$$
$$y[n] = \left[\frac{26}{15}(0,5)^n - \frac{7}{3}(2)^n + \frac{18}{5}(3)^n\right]u[n]$$

10.6 Rješavanje diferentnih jednačina pomoću Pythona

Koristeći Python moguće je riješiti diferentnu jednačinu direktnim programiranjem rekurentne formule. Važno je primijetiti da za razliku od nekih programskih okruženja (poput npr. Matlaba), u Pythonu je indeksiranje nizova zasnovano na nultom indeksu ($n = 0, 1, 2, \ldots$), pa nije potrebno pomicanje sekvenci – početni uslovi se zadaju direktno kao `y[0]` i `y[1]`.

Specifičnost numeričkog izračunavanja je taj što se može odrediti po volji veliki, ali samo konačan broj uzoraka sekvence $y[n]$, međutim ovo u praktičnim primjenama zapravo ne predstavlja ozbiljan problem.

Primjer 10.34:

Koristeći Python riješiti diferentnu jednačinu:

$$y[n+2] - 0.8\,y[n+1] + 0.25\,y[n] = x[n]$$

ako je $x[n] = 10 \cdot (0.5)^n$, a početni uslovi $y[0] = 4$ i $y[1] = 2$.

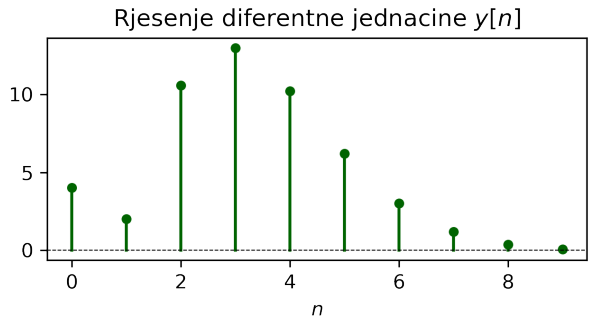
Rješenje:
Rekurentna formula direktno se implementira u petlji, a početni uslovi se zadaju kao `y[0]` i `y[1]`. U nastavku je data programska implementacija.

Programski kod 10.1

```
N = 10                    # broj uzoraka
y = np.zeros(N)
y[0], y[1] = 4, 2          # pocetni uslovi

for n in range(N - 2):
    x_n = 10 * (0.5) ** n
    y[n + 2] = 0.8 * y[n + 1] - 0.25 * y[n] + x_n

sis.dijagram(np.arange(N), y, tip='uzorci',
             naslov='Rjesenje diferentne jednacine $y[n]$')
```



Primjer 10.35:

Koristeći Python riješiti diferentnu jednačinu:

$$y[n+2] - 3\,y[n+1] + 2\,y[n] = x[n+1]$$

s početnim uslovima $y(-1) = 2,\ y(-2) = 3$, ako je $x[n] = 3^n u[n]$.

Rješenje:
Početni uslovi zadani su za negativne indekse $y[-2] = 3$ i $y[-1] = 2$. Budući da Python ne podržava negativne indekse nizova na standardan način, uvodi se parametar `offset=2` koji pomjera sve indekse za 2 mjesta udesno. Ovo je isključivo tehnički detalj implementacije – jednačina u petlji ostaje identična originalnoj matematičkoj notaciji, a početni uslovi se zadaju kao `y[-2+offset]` i `y[-1+offset]`.

Programski kod 10.2

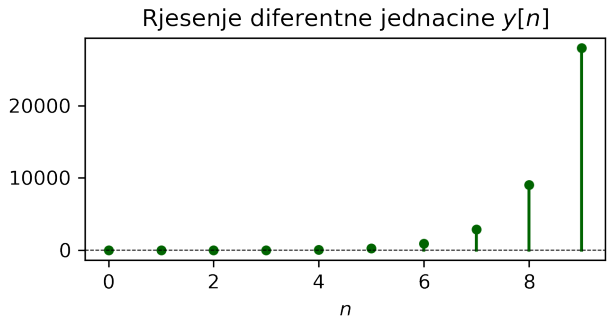
```
N      = 10
offset = 2   # Python ne podrzava negativne indekse: y[n] -> y[n+offset]

y = np.zeros(N + offset + 2)    # +2 zbog indeksa n+2+offset
y[-2 + offset] = 3              # y[-2] = 3
y[-1 + offset] = 2              # y[-1] = 2

for n in range(N):
    x_n1 = 3 ** (n + 1)         # x[n+1] = 3^(n+1)
    y[n+2 + offset] = 3 * y[n+1 + offset] \
                    - 2 * y[n   + offset] + x_n1

y_stem = y[offset:offset + N]

sis.dijagram(np.arange(N), y_stem, tip='uzorci',
             naslov='Rjesenje diferentne jednacine $y[n]$')
```



10.7 Tabele osobina z-transformacije i nekih z-transformacionih parova

U ovom poglavlju i kroz prethodno riješene primjere pokazane su neke od osobina z-transformacije i nađene z-transformacije signala koji se najčešće koriste u teoriji signala. U tabeli 10.1 date su osobine z-transformacije, a neki z-transformacioni parovi u tabeli 10.2.

Tabela 10.1: Osobine z-transformacije.

	Osobina	**Vremenski domen**	**Z-transformacija i oblast konv.**
		$f[n]$	$F(z) \quad r_1 < \|z\| < r_2$ ili R
1.	Linearnost	$a_1 f_1[n] + a_2 f_2[n]$	$a_1 F_1(z) + a_2 F_2(z) \quad R = R_1 \cap R_2$
2.	Refleksija	$f[-n]$	$F\left(z^{-1}\right) \quad \frac{1}{r_2} < \|z\| < \frac{1}{r_1}$
3.	Množenje konst. A	$Af[n]$	$AF(z) \quad r_1 < \|z\| < r_2$
4.	Pomak udesno	$f[n-m] \cdot u[n-m]$	$z^{-m} F(z)$
		$f[n-1] \cdot u[n-1]$	$z^{-1} F(z)$
		$f[n-m] \cdot u[n]$	$z^{-m} F(z) + z^{-m} \sum_{r=1}^{m} f(-r) z^{r}$
		$f[n-1] \cdot u[n]$	$z^{-1} F(z) + f(-1)$
		$f[n-2] \cdot u[n]$	$z^{-2} F(z) + z^{-1} f(-1) + f(-2)$
		$f[n-3] \cdot u[n]$	$z^{-3} F(z) + z^{-2} f(-1) + z^{-1} f(-2) + f(-3)$
5.	Pomak ulijevo	$f[n+r] \cdot u[n]$	$z^{r} F(z) - z^{r} \sum_{k=0}^{r-1} f(k) z^{-k}$
		$f[n+1] \cdot u[n]$	$zF(z) - zf(0)$
		$f[n+2] \cdot u[n]$	$z^2 F(z) - z^2 f(0) - zf(1)$
		$f[n+3] \cdot u[n]$	$z^3 F(z) - z^3 f(0) - z^2 f(1) - zf(2)$
6.	Početna vrijednost	$f(0)$	$\lim_{z \to \infty} F(z)$
7.	Krajnja vrijednost	$\lim_{N \to \infty} f(N)$	$\lim_{z \to 1}(z-1)F(z)$ Polovi $(z-1)F(z)$ unutar jed. kruga
8.	Konvolucija	$f_1[n] * f_2[n]$	$F_1(z) \cdot F_2(z) \quad R = R_1 \cap R_2$
9.	Množenje sa α^n	$\alpha^n f[n]$	$F(z/\alpha), \quad \|\alpha\| r_1 < \|z\| < \|\alpha\| r_2$
10.	Množenje sa n	$nf[n]$	$-z \frac{d}{dz} F(z) \quad r_1 < \|z\| < r_2$

Tabela 10.2: z-transformacioni parovi.

	Vremenski domen $f[n]$	**Z-transformacija $F(z)$**	**Oblast konvergencije**
1.	$\delta[n]$	1	$\forall z \in \mathbb{C}$
2.	$\delta[n-m]$	z^{-m}	$m>0:\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $m<0:\ \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{\infty\}$
3.	$u[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
4.	$u[n-m]$	$\dfrac{z^{-m+1}}{z-1}$	$\lvert z\rvert$ zavisi od m
5.	$A\cdot u[n]$	$\dfrac{Az}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
6.	$A\alpha^n\cdot u[n]$	$\dfrac{Az}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
7.	$-u[-n-1]$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert < 1$
8.	$-A\alpha^n\cdot u[-n-1]$	$\dfrac{Az}{z-\alpha}$	$\lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
9.	$A\cdot n\cdot u[n]$	$\dfrac{Az}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
10.	$A\cdot n\cdot \alpha^n\cdot u[n]$	$\dfrac{A\alpha z}{(z-\alpha)^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
11.	$A\cdot \sin\omega_0 n\cdot u[n]$	$\dfrac{Az\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
12.	$A\cdot \cos\omega_0 n\cdot u[n]$	$\dfrac{z(z-\cos\omega_0)}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\lvert z\rvert > 1$
13.	$A\cdot \alpha^n\cdot \sin\omega_0 n\cdot u[n]$	$\dfrac{Az\alpha\sin\omega_0}{z^2-2z\alpha\cos\omega_0+\alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
14.	$A\cdot \alpha^n\cdot \cos\omega_0 n\cdot u[n]$	$\dfrac{Az(z-\alpha\cos\omega_0)}{z^2-2z\alpha\cos\omega_0+\alpha^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
15.	$n^2u[n]$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$
16.	$n^ku[n]$	$\left(-z\dfrac{d}{dz}\right)^k \dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$

(Nastavlja se na sljedećoj stranici)

(Nastavak sa prethodne stranice)

	Vremenski domen $f[n]$	**Z-transformacija $F(z)$**	**Oblast konvergencije**
17.	$a^{n-1}u[n-1]$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
18.	$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
19.	$n^2 a^n u[n]$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|z\| > \|a\|$
20.	$n^k a^n u[n]$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \frac{z}{z-a}$	$\|z\| > \|a\|$
21.	$a^n \cos \pi n \cdot u[n]$	$\frac{z}{z+a}$	$\|z\| > \|a\|$
22.	$n^k f[n] \cdot u[n]$	$(-z)^k \frac{d^k}{dz^k} F(z)$	Oblast konvergencije od $f[n]$
23.	$\frac{n!}{m!} \cdot u[n]$	$\frac{m!\, z}{(z-1)^{m+1}}$	$\|z\| > 1$
24.	$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} a^n \cdot u[n]$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$\|z\| > \|a\|$

Literatura

- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, Ian T. Young: “Signals and Systems” (1st ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab: “Signals and Systems” (2nd ed.), Prentice Hall, 1997.
- Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer, John R. Buck: “Discrete-Time Signal Processing” (2nd ed.), Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- Allen B. Downey: “Think DSP: Digital Signal Processing in Python”, Green Tea Press, 2012.
- André Quinquis: “A Few Practical Applications of Wavelet Packets”, Digital Signal Processing, 8(1):49–60, 1998.
- Ashok Ambardar: “Analog and Digital Signal Processing”, PWS Publishing Company, 1995.
- Athanasios Papoulis: “Signal Analysis”, McGraw-Hill, New York, 1977.
- B. P. Lathi: “Linear Systems and Signals”, Berkeley-Cambridge Press, Carmichael, California, 1992.
- B. P. Lathi, Roger A. Green: “Linear Systems and Signals” (3rd ed.), Oxford University Press, New York, 2018.
- B. P. Lathi, Zhi Ding: “Modern Digital and Analog Communication Systems” (3rd ed.), Oxford University Press, New York, 1998.
- Branislava Kljuić: “Analiza signala i sistema”, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 1972.
- Branko Kovačević, Milan Milosavljević, Mladen Veinović, Milan Marković: “Robusna digitalna obrada govornog signala”, Akademska Misao, Beograd, 2000.
- C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath, Haitao Guo: “Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms: A Primer”, Prentice Hall, 1998.
- Charles K. Chui: “An Introduction to Wavelets”, Academic Press, 1992.
- Chi-Tsong Chen: “System and Signal Analysis”, Saunders College Publishing, New York, 1989.

- E. L. Johnson, M. A. Karim: "Digital Design: A Pragmatic Approach", PWS-Kent, Boston, Mass., 1987.
- Edward A. Lee, Pravin Pratap Varaiya: "Structure and Interpretation of Signals and Systems", Addison-Wesley, 2003.
- Edward W. Kamen: "Introduction to Signals and Systems" (2nd ed.), Macmillan, New York, 1990.
- Emir Sokić, Almir Salihbegović: "Slučajni signali i procesi", Univerzitet u Sarajevu, Sarajevo, Bosna i Hercegovina, 2025.
- Emmanuel C. Ifeachor, Barrie W. Jervis: "Digital Signal Processing: A Practical Approach" (2nd ed.), Prentice Hall, 2002.
- Eric Matthes: "Python Crash Course" (2nd ed.), No Starch Press, 2019.
- Ferrel G. Stremler: "Introduction to Communication Systems" (3rd ed.), Addison-Wesley, 1990.
- Glenn Zelniker, Fred J. Taylor: "Advanced Digital Signal Processing: Theory and Applications", Marcel Dekker, New York, 1994.
- Harold Kolimbiris: "Digital Communications Systems: With Satellite and Fiber Optics Applications", Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.
- Ismet Traljić: "Multirezolucijska dekompozicija signala govora", Doktorska disertacija, Univerzitet u Sarajevu, Elektrotehnički fakultet, Sarajevo, 2003.
- John G. Proakis: "Digital Communications" (3rd ed.), McGraw-Hill, New York, 1995.
- John G. Proakis, Dimitris G. Manolakis: "Digital Signal Processing" (4th ed.), Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- John G. Proakis, Masoud Salehi: "Contemporary Communication Systems Using MATLAB", Brooks/Cole, 2000.
- K. Deergha Rao: "Signals and Systems", Birkhäuser, Cham, 2018.
- L. R. Rabiner: "A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition", Proceedings of the IEEE, 77(2):257–286, 1989.
- L. R. Rabiner, B. H. Juang: "Fundamentals of Speech Recognition", Prentice Hall, 1993.
- Luis F. Chaparro, Aydin Akan: "Signals and Systems Using MATLAB" (3rd ed.), Academic Press, London, 2018.
- Martin Vetterli, Jelena Kovačević, Vivek K. Goyal: "Foundations of Signal Processing", Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- Maurice Charbit: "Digital Signal Processing (DSP) with Python Programming", Wiley-ISTE, 2017.
- Melita Ahić-Đokić: "Signali i sistemi", Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2010.

- Melita Ahić-Đokić, Branislava Peruničić: “Analiza signala i sistema”, Institut zaštite od požara i eksplozije, 1999.
- Michael J. Roberts: “Signals and Systems: Analysis Using Transform Methods and MATLAB” (3rd ed.), McGraw-Hill, 2018.
- Naresh K. Sinha: “Linear Systems”, John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- Oktay Alkin: “Continuous-Time Signals and Systems: A MATLAB-Integrated Approach” (2nd ed.), CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2025.
- Oktay Alkin: “Discrete-Time Signals and Systems: A MATLAB Integrated Approach” (2nd ed.), CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2025.
- Paul A. Lynn, Wolfgang Fuerst: “Introductory Digital Signal Processing with Computer Applications” (Revised edition), John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
- Paulo S. R. Diniz, Eduardo A. B. da Silva, Sergio L. Netto: “Digital Signal Processing”, Cambridge University Press, 2002.
- Robert G. Winch: “Telecommunication Transmission Systems” (2nd ed.), McGraw-Hill, 1998.
- Rodger E. Ziemer, William H. Tranter, D. Ronald Fannin: “Signals & Systems: Continuous and Discrete” (4th ed.), Prentice Hall, 1998.
- Sweigart A.: “Automate the Boring Stuff with Python”, No Starch Press, San Francisco, 2019.
- S. Soliman, M. Srinath: “Continuous and Discrete Signals and Systems”, Prentice-Hall, New York, 1990.
- Sanjit Kumar Mitra: “Digital Signal Processing: A Computer-Based Approach” (2nd ed.), McGraw-Hill/Irwin, 2002.
- Stéphane Mallat: “A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way” (3rd ed.), Academic Press, Amsterdam, 2009.
- Steven W. Smith: “The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing”, California Technical Publishing, San Diego, 1997.
- Željko Jurić: “Diskretna matematika za studente tehničkih nauka”, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 2011.
- Zoran Salčić, Branislava Kljuić: “Analiza signala i sistema - Problemi”, Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 1973.

Indeks pojmova

Algoritam brze Fourierove transformacije, 295
Aliasing, 253
Amplitudna modulacija, 199
    anvelopa modulisanog signala, 224
    sa dva bočna opsega, 224
    sa jednim bočnim opsegom, 234
Amplitudni spektar, 142
Analitička funkcija, 232
    spektar analitičke funkcije, 236
Analogni signal, 3
Analogno-digitalna konverzija, 4
Anticipativan sistem, 42
Aperiodički signali, 9
Aproksimacija analognih signala, 109
Aproksimacija kompleksnim harmonijskim funkcijama, 139
ARMA sistemi, 91
Asocijativnost, 107
Autokorelaciona funkcija, 214

Beselova nejednakost, 114
Blok dijagram, 64
Brza Fourierova transformacija (FFT), 295

Cikličnost, 181
Cirkularna (ciklična) konvolucija, 330

Delaying operation, 107
Delta sekvenca, 69
Demodulacija, 222
Demodulator, 222
Deterministički signal, 1
Diferencijalna i diferentna jednačina, 5
    u z-domenu, 361
Digitalni procesor (DSP), 4
Digitalni signal, 3
Dinamički sistem, 90

Direktna i inverzna Fourierova transformacija diskretnog signala, 325
Dirichletovi uslovi, 140
Diskretizacija kontinualnog signala, 252
    po amplitudi, 3
Diskretizacija spektra, 273
Diskretna Fourierova transformacija, 285
Diskretni Fourierov red, 290
Diskretni signal, 68
Diskretni sistem, 86
Diskretno vrijeme, 68
Distributivnost konvolucije, 46
Dvostrana (bilateralna) z-transformacija, 335

Eksponencijalni signal, 21

Familija funkcija, 29
Fast Fourier Transform Algorithm - FFT, 295
Fazni spektar, 142
Fazno modulisani signal, 223
Formula Heavisideovog razvoja, 367
Fourierov transformacioni par, 181
    za diskretne signale, 325
    za proizvod sekvenci, 329
Fourierova transformacija, 179
    analitičke funkcije, 233
    autokorelacione funkcije, 214
    delta funkcije u Pythonu, 244
    diskretnih signala, 325
    funkcije $p(t/a)$ u Pythonu, 247
    funkcije $Sa(at)$ u Pythonu, 245
    Hilbertove transformacije, 229
    jedinične funkcije, 195
    kompleksne harmonijske funkcije, 199
    konstante jedan, 192
    kosinusne funkcije, 199
    niza (povorke) impulsa, 201

numeričko računanje, 286
periodičke funkcije, 200
pravougaonog impulsa, 191
signum funkcije, 194
sinusne funkcije, 199
vremenski i frekventno pomjerenog diskretnog signala, 328
Frekventna funkcija sistema, 60
Frekventna konvolucija, 218
Frekventni odziv LTI sistema, 322
Frekventni spektar signala, 141
Funkcija sistema, 103

Grafičko nalaženje konvolucije, 95
Granice oblasti konvergencije, 340
Grupno kašnjenje, 323

Haarova matrica, 125
Haarove funkcije, 123
Heavisideov razvoj, 367
Heavisideova funkcija, 24
Hilbertov filter, 232
Hilbertova transformacija, 229
harmonijskih funkcija, 230

Idealni D/A konvertor, 4
Idealni niskopropusni filter, 159
Imaginarni spektar, 142
Impulsna (delta) sekvenca, 70
Impulsna modulacija, 223
Impulsni modulator, 255
Impulsni odziv, 91
Inverzna diskretna Fourierova transformacija, 290
Inverzna Fourierova transformacija, 181
diskretnog signala, 325
Inverzna z-transformacija, 364
Isprednjačena sekvenca, 80
delta sekvenca, 69
Izbor intervala uzorkovanja, 285
Izvedena periodička funkcija, 273
Izvod lika, 209

Jedinični krug, 336
Jedinično kašnjenje, 107

Kaskadna veza LTI sistema, 64
Kauzalnost, 24
Koeficijenti Fourierovog reda, 141
Kompleksna eksponencijalna sekvenca, 78
Kompleksni Fourierov red, 115
Kompleksnost FFT algoritma, 301

Konjugovanje
konjugovana simetrija, 202
konjugovano antisimetrična sekvenca, 331
konjugovano simetrična sekvenca, 331
Kontinualni signal, 9
Konvoluciona suma, 92
Konvolucioni integral, 45
Korelaciona funkcija aperiodičkih signala, 213
Kosinusna i sinusna sekvenca, 78
Krajnja vrijednost, 353
Kriterij za aproksimaciju, 109
Kvantizirani signal, 3
Kvaziperiodički signal, 18

Laurentov red, 365
Linearna interpolacija, 268
Linearni vremenski invarijantni sistem - LTI, 43
Linearnost
Fourierove transformacije diskretnih signala, 327
z-transformacije, 336
Linijski spektar, 142

MA sistemi, 90
Metod dugog dijeljenja, 365
Množenje periodičkih signala, 19
Modem, 222
Modulacija, 222
sa jednim bočnim opsegom, 233
Modulator, 222
Modulisani signal, 224
Modulišući signal, 222
Moving Average Systems, 90
Multipleksiranje, 227

Negativne učestanosti, 145
Niskopropusni filter, 158
Niži bočni opseg, 224
Nosilac, 222
Nule z-transformacije, 338
Numeričko računanje Fourierove transformacije, 286
Nyquistov opseg diskretizacije, 265
Nyquistov uslov, 265
Nyquistova učestanost, 265

Oblast konvergencije F(z), 339
kauzalne sekvence, 340
nekauzalne sekvence, 340

reflektovanog signala, 349
Određivanje inverzne z-transformacije, 364
Određivanje koeficijenata Fourierovog reda trigonometrijskih polinoma, 306
Odziv linearnog i stacionarnog sistema, 45
Operator prenosa, 6
Ortogonalne kompleksne funkcije, 114
Ortonormirani sistem, 113
Osnovni (fundamentalni) period, 9
Osobine analognih signala, 9
Osobine Fourierove transformacije, 190
Osobine Fourierovog reda, 153
Osobine simetrije Fourierove transformacije diskretnih signala, 331

Paralelna veza LTI sistema, 107
Parsevalova relacija za periodičke kontinualne signale, 154
Parsevalova teorema i teorema o energiji, 215
Period diskretizacije, 68
Periodička ili cirkularna (ciklična) konvolucija, 330
Periodički niz (povorka) impulsa, 35
Poissonova sumaciona formula, 277
Pomak diskretnog signala, 80
Potpun skup ortogonalnih funkcija, 114
Povratna sprega, 65
Početna vrijednost, 352
Pravilo za vremenski pomak, skaliranje i refleksiju, 38
Prenos signala bez distorzije, 220
Prigušenje, 21
Primjena z-transformacije za rješavanje diferentnih jednačina, 377
Prirodni spektar, 145
Proizvod sekvenci, 106
Prozorska funkcija, 29
  prozoriranje, 106
Prsten konvergencije, 340

Radijan-frekvencija, 323
Radiks-2 algoritam, 296
Rampa, 27, 73
Realna eksponencijalna sekvenca, 74
Realni eksponencijalni signal, 21
Realni signal, 10
Realni spektar, 142
Red Kotelnikova, 269
Refleksija, 38
  vremenske sekvence, 348
Rekonstrukcija kontinualnog signala iz uzoraka, 268
Rotacioni faktori, 288

Sekvenca transformacionih koeficijenata DFT, 337
Sekvence konačne dužine, 69
Selektivnost, 70
Serijska i paralelna veza LTI sistema, 65
Signal, 3
  AM signal, 224
  diskretni, 68
  energije, 15
  kauzalan, 24
  kvaziperiodički, 18
  parni i neparni, 10
  periodički diskretni, 290
  periodički i aperiodički, 9
  sinusni i kosinusni, 17
  skoro periodički, 18
  snage, 14
Signum funkcija, 26
Simetrija, 190
Sistem, 4
  anticipativan, 89
  ARMA, 91
  bez memorije, 88
  bezinercijalni, 88
  dinamički, 90
  diskretni, 86
  invarijantan na pomak, 88
  kauzalan, 42
  linearan, 42
  nekauzalan, 42
  nestacionaran, 89
  odziv, 44
  predviđajući, 89
  s pokretnom srednjom vrijednošću (MA), 90
  stabilan, 47
  stabilan i kauzalan, 377
  stacionaran, 88
  trenutan, 42
  ulaz, 4
  vremenski nezavisan, 88
Skaliranje u oblasti kompleksne učestanosti, 355
Sopstvene vrijednosti sistema, 44
Spektar
  magnitudni, 325
  matematički, 145
  snage izlaznog signala, 161

zvjezdaste funkcije, 258
Spektralna gustina energije, 215
Spektralni koeficijenti, 141
Spektralno ograničena interpolacija, 268
Srednja kvadratna greška, 109
Srednja snaga signala, 14
periodičkog signala, 159
Stabilnost LTI sistema, 375
Step odziv LTI sistema, 48
Struktura butterfly, 300
Suma i proizvod sekvenci, 106

Teorema
o diskretizaciji spektra, 273
o energiji, 215
o konvoluciji, 329
o prozorskoj funkciji, 329
o uzimanju uzoraka, 253
Parsevalova, 215
Težinska funkcija sistema, 44
Transformacioni par Fourierovog reda, 141
Trougaoni signal, 28
Twiddle factor, 288

Ugaona frekvencija, 17
Ukupna energija, 14
Unilateralna (jednostrana)
z-transformacija, 335
Unit delay, 107
Uslov ortogonalnosti, 113

Viši bočni opseg, 224
Vremenski aliasing, 273
Vremenski diskretni signal, 2
Vremenski kontinualni signal, 2

Window sequence, 106
Windowing Theorem, 329

Z-transformacija
kauzalnih i nekauzalnih sekvenci, 342
konvolucije signala u vremenskom
domenu, 354
kosinusne sekvence, 361
rampe, 362
sinusne sekvence, 360
vremenski pomjerenog signala, 349
z-transformacija, 335
Zakašnjela sekvenca, 80
Zvjezdasta funkcija, 254