

Emir Sokić
Almir Salihbegović



Slučajni signali i procesi

Sarajevo, 2025.



Slučajni signali i procesi

Emir Sokić
Almir Salihbegović

Sarajevo, 2025.



Izdavač

Univerzitet u Sarajevu - Elektrotehnički fakultet

Za izdavača

Red. prof. dr Jasmin Velagić

Autori

Emir Sokić, Almir Salihbegović

Naziv djela

Slučajni signali i procesi

Recenzenti

Prof. emeritus dr Melita Ahić-Đokić

Prof. dr Jasmin Kevrić

DTP

Emir Sokić, Almir Salihbegović

Godina izdanja i godina štampanja

2025.

Odlukom Senata Univerziteta u Sarajevu broj 01-1-127/25 od 29.01.2025. g. data je saglasnost da se udžbenik "Slučajni signali i procesi" izda kao univerzitetsko izdanje, u otvorenom pristupu na Univerzitetu u Sarajevu.

ISBN 978-9926-575-03-8

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke BiH pod **ID brojem 63543046**

Sadržaj

Predgovor	8
Uvod	10
1 Osnove teorije vjerovatnoće	13
1.1 Osnovni pojmovi	13
1.2 Relacije među događajima	17
1.3 Pojam vjerovatnoće	18
1.3.1 Zajednička i uslovna vjerovatnoća	21
1.3.2 Bayesov teorem	22
2 Slučajna promjenljiva. Modeli raspodjele vjerovatnoće. Očekivane vrijednosti.	28
2.1 Slučajna promjenljiva	28
2.2 Funkcija raspodjele vjerovatnoće	29
2.3 Funkcija gustine vjerovatnoće	30
2.4 Modeli raspodjela vjerovatnoće	31
2.4.1 Uniformna raspodjela	32
2.4.2 Gaussova (normalna) raspodjela	33
2.4.3 Rayleigheva raspodjela	35
2.4.4 Eksponencijalna raspodjela	36
2.4.5 Ostale raspodjele	37
2.5 Očekivane vrijednosti	38
2.5.1 Očekivana vrijednost slučajne promjenljive	39
2.5.2 Srednjekvadratna vrijednost slučajne promjenljive	39
2.5.3 Centralni momenti	39
2.5.4 Određivanje očekivane vrijednosti, srednjekvadratne vrijednosti i varijanse za osnovne distribucije	41
2.5.5 Medijana i najvjerovatnija vrijednost	45
2.6 Analiza slučajnih promjenljivih u Python okruženju	46
2.7 Zajedničke funkcije vjerovatnoće diskretnih slučajnih promjenljivih	51
2.8 Zajedničke funkcije vjerovatnoće kontinualnih slučajnih promjenljivih	54
2.9 Uslovna vjerovatnoća	63
2.10 Crtanje i analiza jednodimenzionalnih funkcija vjerovatnoće korištenjem Pythona	66

2.11	Crtanje i analiza dvodimenzionalnih funkcija vjerovatnoće korištenjem Pythona	70
2.12	Mješoviti momenti	75
2.12.1	Korelacija	76
2.12.2	Kovarijansa	77
2.13	Transformacije slučajnih promjenljivih	81
3	Slučajni vektori	95
3.1	Slučajni vektor. Funkcije vjerovatnoće vektora slučajnih promjenljivih. . .	95
3.2	Očekivane vrijednosti slučajnih vektora. Korelaciona i kovarijantna matrica.	96
3.3	Zakon velikih brojeva	98
3.4	Primjene zakona velikih brojeva	100
3.5	Centralna granična teorema	100
4	Slučajni procesi	105
4.1	Uvodni pojmovi	105
4.2	Funkcije vjerovatnoće slučajnih procesa	107
4.2.1	Stacionarnost slučajnih procesa	109
4.3	Uslovne i zajedničke gustine vjerovatnoće slučajnih procesa	110
4.3.1	Međusobna stacionarnost slučajnih procesa	111
4.4	Očekivane vrijednosti slučajnih procesa	114
4.5	Korelacione funkcije slučajnih procesa	118
4.6	Korelacione funkcije stacionarnih slučajnih procesa	122
4.7	Srednje vrijednosti procesa po vremenu	123
4.8	Ergodičnost	124
4.9	Spektralna gustina stacionarnih slučajnih procesa	128
4.10	Šum i tipovi šuma	128
4.10.1	Bijeli šum	129
4.10.2	Obojeni šumovi	129
4.11	Markovljevi slučajni procesi	130
5	Prolaz slučajnih procesa kroz LTI sisteme	134
5.1	Prolaz slučajnih procesa kroz LTI sistem	134
5.2	Prolaz stacionarnih slučajnih procesa kroz LTI sistem	136
5.3	Spektralna analiza stacionarnih slučajnih procesa	142
5.4	Aplikacije korelacionih i kroskorelacionih funkcija	143
5.4.1	Detekcija kašnjenja	143
5.4.2	Identifikacija sistema	146
6	Sinteza linearnih optimalnih sistema sa stohastičkim ulazima	151
6.1	Uvodna razmatranja	151
6.2	Odnos snage signala i šuma (SNR)	152
6.3	Prilagođeni filter	161
6.4	Transferzalni filter	166
6.5	Wienerov filter	169
6.5.1	Uvodna razmatranja	169
6.5.2	Parametarski optimalan sistem	169
6.5.3	Optimalni sistem tipa I (nekauzalni)	171

6.5.4	Optimalan sistem tipa II (kauzalni)	174
6.5.5	Optimalni filtri za idealne odzive	177
7	Kalmanov filter	183
7.1	Linearni Kalmanov filter	183
7.2	Varijante Kalmanovog filtera	189
8	Primjena slučajnih signala u teoriji informacija	192
8.1	Uvodna razmatranja	192
8.2	Informacija	192
8.3	Entropija	193
8.3.1	Uslovna entropija	196
8.3.2	Entropija zajedničkih događaja	197
8.3.3	Srednja vrijednost informacije	198
8.4	Izvori informacija	201
8.4.1	Entropija sekvence i entropija izvora	201
8.4.2	Markovljevi izvori	202
8.4.3	Redundanca	203
8.5	Prenos informacija kroz komunikacioni kanal	205
9	Markovljevi lanci i Skriveni Markovljevi modeli (HMM)	208
9.1	Markovljevi lanci	208
9.2	Početne i stacionarne vrijednosti Markovljevih lanaca	211
9.3	Skriveni Markovljevi modeli	214
9.4	Evaluacija, dekodiranje i treniranje HMM	215
9.4.1	Problem evaluacije	215
9.4.2	Problem dekodiranja	218
9.4.3	Problem treniranja	220
	Literatura	222
	Indeks pojmova	224

Predgovor

Knjiga „Slučajni signali i procesi“ prvenstveno je namijenjena studentima Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu kao jedan od ključnih udžbenika za kurs „Signali i sistemi II“. Za razliku od predmeta „Signali i sistemi“, koji se izvodi na dodiplomskom studiju Odsjeka za automatiku i elektroniku i fokusira na determinističke signale, linearne vremenski invarijantne (LTI) sisteme i transformacije signala u spektralne domene, predmet „Signali i sistemi II“ predstavlja prirodan nastavak koji obrađuje slučajne signale kao i njihovo procesiranje. U tom kontekstu, knjiga „Slučajni signali i procesi“ ima za cilj pružiti temeljna znanja u vezi sa analizom i opisivanjem slučajnih signala, te ponuditi uvid u njihove potencijalne primjene u stvarnim tehničkim problemima.

Jedan od važnih dijelova knjige posvećen je adaptivnim sistemima i optimalnom procesiranju signala, a autori su, svjesni promjena u obrazovnom sistemu, odlučili prilagoditi knjigu savremenim potrebama studenata. U današnje vrijeme, studentima je teško prenijeti znanje isključivo putem pisanih materijala, te proces učenja mora biti interaktivan i vizualno atraktivan. U skladu s tim, ova knjiga, za razliku od mnogih drugih u istoj oblasti, nastoji smanjiti matematičku rigoroznost gdje god je to moguće. Kroz brojne primjere, vizualizacije i interaktivne programske kodove, knjiga teži omogućiti što dublje razumijevanje sadržaja, kao i poticati kritičku analizu matematičkih koncepata koji se obrađuju. Gradivo se uvodi inkrementalno, pa se tako od elementarnih pojmova kao što je vjerovatnoća, preko slučajne promjenljive i slučajnog vektora dolazi do slučajnog procesa, a potom se predstavljene inženjerski alati koriste kroz potencijalne primjene, od prolaza slučajnih signala kroz LTI sisteme, projektovanja optimalnih filtera do osnovnih primjena u teoriji informacija, analizi Markovljevih lanaca i Skrivenih Markovljevih modela.

Knjiga „Slučajni signali i procesi“ se sastoji od devet poglavlja. Prvo poglavlje se bavi osnovnim pojmovima teorije vjerovatnoće, te se uvode pojmovi kao što su eksperiment, ishod i događaj. Objašnjavaju se relacije među događajima i definira pojam vjerovatnoće. Dodatno se razmatraju zajednička i uslovna vjerovatnoća, a posebna pažnja se posvećuje Bayesovom teoremu.

U drugom poglavlju se obrađuje koncept slučajne promjenljive i funkcije raspodjele vjerovatnoće. Detaljno se analiziraju različiti modeli raspodjele, poput uniformne, normalne, Rayleighove i eksponencijalne raspodjele. Dodatno, uvode se pojmovi kao što su očekivane vrijednosti i varijansa, uz korištenje programskog jezika Python za analizu slučajnih promjenljivih.

U trećem poglavlju se uvode slučajni vektori i funkcije vjerovatnoće u vezi sa istim. Razmatraju se očekivane vrijednosti slučajnih vektora, te korelacione i kovarijantne matrice. Također se obrađuju i poznate teoreme, kao što su „zakon velikih brojeva“ i „centralna granična teorema“.

Pojam slučajnih procesa, stacionarnost, uslovne i zajedničke gustine vjerovatnoće se definiraju u četvrtom poglavlju. Diskutira se ergodičnost i spektralna gustina stacionarnih slučajnih procesa, uz poseban fokus na bijeli šum i obojene šumove, kao i Markovljeve slučajne procese.

Peto poglavlje je posvećeno prolazu slučajnih procesa kroz linearne, vremenski invarijantne sisteme, uključujući spektralnu analizu. Razmatraju se aplikacije korelacionih funkcija, uključujući detekciju kašnjenja i identifikaciju sistema.

U šestom poglavlju se razmatra sinteza linearnih optimalnih sistema sa stohastičkim ulazima, analizira odnos signala i šuma, formiraju prilagođeni filteri, te Wienerovi filteri. Poseban naglasak stavlja se na optimalne sisteme i njihovu implementaciju za različite vrste ulaznih signala.

Sedmo poglavlje se fokusira na Kalmanov filter, važan alat za estimaciju stanja dinamičkih sistema, te njegove varijante koje se koriste u raznim primjenama gdje se analizira vremenski promjenjiv sistem s neizvjesnostima.

U osmom poglavlju dat je kratak uvod u teoriju informacija kroz primjenu slučajnih signala u navedenoj oblasti. U ovom dijelu razmatraju se ključni koncepti teorije informacija poput entropije, uslovne entropije, redundancije i prenosa informacija kroz komunikacijske kanale.

U posljednjem poglavlju knjige se obrađuju osnovni koncepti Markovljevih lanaca, njihovi početni i stacionarni uslovi, te skriveni Markovljevi modeli. Dodatno se analiziraju evaluacija, dekodiranje i treniranje skrivenih Markovljevih modela.

Svako od poglavlja nudi suštinsku analizu odgovarajućih koncepata, uz odgovarajuće analitičke i programske primjere kako bi čitatelj mogao što bolje razumjeti teorijske osnove i njihovu primjenu u stvarnim aplikacijama.

* * * * *

Autori duguju posebnu zahvalnost mnogima na pomoći prilikom pisanja i nastajanja ove knjige.

Knjiga je nastala iz ljubavi prema signalima, koju su nam još kao studentima kroz nastavu na kursu Analiza signala i sistema, popularnom „ASIS“-u, usadile naše drage i uvažene profesorice Melita Ahić-Đokić i Branislava Draženović - Peruničić, te naš uvaženi profesor Željko Jurić. Od tada pa do danas, zajedno s nama i mnoge generacije studenata su direktno učestvovali u oblikovanju ovih materijala, kako kroz način razumijevanja i konstruktivne sugestije na sam tekst dok je bio korišten za učenje, tako i kroz rješavanje mnogih primjera koji su ilustrovani u samoj knjizi.

Dodatno se zahvaljujemo i recenzentima prof. emeritus dr Meliti Ahić-Đokić te prof.dr Jasminu Kevriću, na savjetima i korisnim sugestijama koje su unaprijedile materijal.

Hvala našim porodicama na strpljenju i podršci pri pisanju ove knjige.

Uvod

Signali i sistemi predstavljaju ključne koncepte u proučavanju prirodnih pojava, jer omogućavaju opisivanje i analizu različitih fizičkih procesa. Tipično, signali predstavljaju varijacije fizičkih veličina koje mogu biti mjerene, dok sistemi definišu način na koji se ti signali obrađuju ili prenose. U prirodi, signali su prisutni u različitim oblicima, kao što su zvučni talasi, svjetlost, ili električni impulsi, dok sistemi omogućavaju njihovu transformaciju. Kada se govori iz perspektive elektrotehnike, analiza signala i sistema omogućava razvoj mnogih tehnologija od telekomunikacija, elektroničkih struktura, radarskih sistema pa do prenosa i obrade signala u biomedicini. Temeljitom analizom, inženjeri mogu razviti modele koji olakšavaju dizajn složenih elektroničkih uređaja i optimizaciju performansi dizajniranih ili postojećih sistema. Osim toga, ovladavanje ovim konceptima je od suštinske važnosti za implementaciju novih tehnoloških rješenja u industriji i svakodnevnom životu. Električni signali, kao jedan od najčešće proučavanih oblika, omogućavaju efikasan prenos informacija i primjenu u uređajima kao što su senzori, računari, te sistemi za kontrolu i automatizaciju. Kroz pravilnu analizu, moguće je razumjeti ponašanje različitih tipova signala i primijeniti ih u realnim sistemima, što čini ovu oblast izuzetno važnom kada je u pitanju razvoj savremenih tehnologija.

Deterministički signali su oni signali čije se vrijednosti mogu potpuno predvidjeti u bilo kojem trenutku na osnovu matematičkog modela ili funkcije. Oni su unaprijed definirani i ne sadrže elemente slučajnosti. Primjeri determinističkih signala uključuju sinusoidalne ili pravougaone signale, te impulsne funkcije, koje su često korištene u analizi fenomena koji se pojavljuju u elektrotehničkim primjenama. Za analizu determinističkih signala najčešće se koriste alati kao što su Fourierova i Laplaceova transformacija, koje omogućavaju opisivanje signala u frekventnom domenu, gdje se mogu jednostavnije analizirati i obraditi. S druge strane, slučajni signali (ili stohastički signali) sadrže elemente neizvjesnosti i njihovo ponašanje ne može se sa sigurnošću predvidjeti. Ovi signali su karakteristični za sisteme u kojima su prisutni šumovi ili drugi nepredvidivi utjecaji, poput komunikacionih kanala, radarskih sistema i biomedicinskih aplikacija. Za obradu i analizu slučajnih signala koriste se teorija vjerovatnoće, statistička analiza, te alati poput funkcija gustine vjerovatnoće i korelacionih funkcija. Jedan primjer upotrebe determinističkih i slučajnih signala je u komunikacionim sistemima, gdje se recimo sinusoidni signal koristi kao signal nosioca u postupku amplitudne modulacije, a korisni signal (govor ili muzika) predstavlja slučajni signal koji nosi informaciju. Nadalje, slučajni signali se mogu koristiti i za modeliranje šumova u tim sistemima, kako bi se dizajnirali filteri koji mogu minimizirati neželjene smetnje, poput Wienerovog ili Kalmanovog filtra.

Teorija slučajnih signala nalazi široku primjenu u različitim oblastima, posebno tamo gdje su prisutni nepredvidivi ili varijabilni faktori. Kao primjer, mogu se navesti dva ključna scenarija u kojima je neophodna upotreba alata za obradu slučajnih signala, a to su problemi modeliranja i automatskog prepoznavanje govora, te problem optimalnog otklanjanja šumova. Naime, govorni signal se često tretira kao slučajni signal zbog varijabilnosti koja potiče iz različitih izvora, kao što su govornik, pozadinska buka i akustički uslovi, i skoro nemoguće ga je opisivati konvencionalnim pristupima svojstvenim determinističkim signalima. U skladu s tim, u postupku obrade govornih signala tipično se koriste analize korelacije, spektralne analize i skriveni Markovljevi modeli, koji omogućavaju da se uočene promjene u govornom signalu efikasno modeliraju. To omogućava realizaciju sistema za prepoznavanje glasa u sistemima poput digitalnih asistenata ili sistema za prepoznavanje govora u automobilima, gdje se signal mora razumjeti uprkos prisustvu šuma. Nadalje, u komunikacionim sistemima, šum i eho su neizbježni problemi koji narušavaju kvalitet prenosa signala, posebno u telekomunikacijama i audio sistemima. Adaptivne metode, kao što su Wienerov filter ili algoritam najmanjih kvadrata (LMS) se mogu koristiti za dinamičko prilagođavanje i filtriranje šuma u realnom vremenu. Ove metode se zasnivaju na procjeni statističkih svojstava ulaznih signala i na taj način omogućavaju učenje i optimizaciju filtera za postizanje najboljih performansi. Tako npr. u takozvanim *hands-free* sistemima, algoritmi za uklanjanje eha koriste adaptivne filtre kako bi smanjili povratni zvuk iz zvučnika u mikrofona, poboljšavajući tako kvalitet zvuka tokom poziva.

Teorija vjerovatnoće pruža matematički okvir za razumijevanje i modeliranje nesigurnosti, koja je prisutna u mnogim aspektima života i nauke. Njena primjena postaje neophodna kada je potrebno modelirati događaje čiji ishod nije moguće tačno predvidjeti, već se može opisati samo u domenu vjerovatnoće. Motivacija za uvođenje teorije vjerovatnoće leži u potrebi da se kvantificiraju slučajni događaji u prirodi, društvu i tehnologiji, od predviđanja vremenskih prilika do analize finansijskih tržišta. Historijski gledano, teorija vjerovatnoće je formalno uvedena u 17. stoljeću, prvenstveno kroz radove Blaisea Pascala i Pierre-Simona Laplacea, kako bi se analizirali problemi kockanja i igre na sreću. Tokom vremena, njena primjena se proširila na mnoge naučne discipline, uključujući fiziku, biologiju, statistiku i inženjering. Njeno brzo širenje u nauci i tehnologiji dolazi s industrijskom revolucijom, kada je postalo ključno analizirati složene sisteme sa stohastičkim ponašanjem. Jedna od intrigantnih karakteristika teorije vjerovatnoće je tanka granica između determinizma i vjerovatnoće. Svi eksperimenti, bez obzira na njihovu prirodu, u teoriji se mogu smatrati determinističkim, jer svaki rezultat ima svoj uzrok. Međutim, u praksi, mnogi eksperimenti sadrže složenost ili nepoznate faktore koje se ne mogu direktno kontrolirati, zbog čega se uvodi vjerovatnoća kao alat za opisivanje rezultata. Na primjer, bacanje novčića je deterministički proces u kojem su sve sile i faktori poznati, ali zbog nesposobnosti da se ti faktori precizno izmjere i kontrolišu, tretira se kao slučajan događaj. Kroz ovu granicu između slučajnosti i determinizma, teorija vjerovatnoće ne samo da pruža alat za analizu nesigurnih situacija, već i pomaže da se bolje razumije svijet u kojem uvijek postoji element neizvjesnosti, bez obzira na sposobnosti modeliranja.

Većina numeričkih primjera u knjizi, kao i mnoge teorijske tvrdnje su demonstrirane, provjerene ili ilustrovane korištenjem programskog jezika Python. On predstavlja trenutno jedan od najpopularnijih jezika za računarsku obradu i analizu stohastičkih (slučajnih) signala, zahvaljujući svojoj jednostavnosti, čitljivosti i širokom spektru dostupnih

biblioteka. Jedna od ključnih prednosti Pythona je njegova prilagodljivost i otvorenost, što ga čini dostupnim za različite vrste inženjerskih i naučnih zadataka, uključujući analizu signala, statističku obradu, mašinsko učenje i simulacije. U globalnim razmjerama, Python je jedan od najčešće korištenih jezika u obrazovanju, istraživanju, te u industrijama poput finansija, mašinskog učenja, procesiranja podataka i inženjeringa, što ga čini izvanrednim izborom i za stohastičku analizu signala i modeliranje. U oblasti stohastičkih signala, Python omogućava istraživačima i inženjerima jednostavno modeliranje, simulaciju i analizu slučajnih procesa korištenjem gotovih biblioteka, kao što su „NumPy”, „SciPy”, „Matplotlib”, i „Pandas”. Ove biblioteke pružaju robusne alate za statističku analizu, obradu podataka i vizualizaciju. Osim što je i besplatan, Python je podržan u mnogim aktuelnim okruženjima kao što su Google Colab, Jupyter Notebook, Spyder, Anaconda i slično, koji ga čine jednostavnim za upotrebu i prilagodljivim za različite potrebe. Mnogi od ovih alata omogućavaju korisnicima da pišu i izvršavaju Python kodove direktno iz web pretraživača („na cloud-u”), što je idealno za učenje, istraživanje i brzu analizu i ne zahtijeva dodatna lokalna podešavanja okruženja. Kodovi u ovoj knjizi su pisani u verziji 3 programskog jezika Python, a prilagođeni su za korištenje u Jupyter Notebook ili Google Colabu. Međutim, bilo koja od Python baziranih platformi može biti odgovarajuća za korištenje.

Ova knjiga pruža sveobuhvatan uvod u terminologiju i konceptualne okvire u vezi sa slučajnim signalima i procesima, zajedno s velikim brojem numeričkih i programskih primjera. Cilj knjige je da čitaoci steknu osnovno znanje o stohastičkim procesima i alatima neophodnim za njihovu analizu, dok će pruženi programski kodovi omogućiti praktično testiranje i primjenu naučenog. Svi programski kodovi dostupni su na linku <https://github.com/esokic/ssp>, gdje se nalaze i uputstva za podešavanje programskog okruženja i vođenje kroz korištenje kodova iz svakog poglavlja. Čitaoci se ohrabruju da aktivno prate kodove i koriste ih samostalno, jer će na taj način imati priliku da iste prilagode vlastitim potrebama i eksperimentišu s različitim scenarijima. S obzirom na to da se radi o generisanju slučajnih promenljivih i procesa, kodovi su dizajnirani tako da će često rezultati ponovnog izvršavanja biti različiti, što je suština rada sa slučajnim signalima. Promjena rezultata pri svakom izvršavanju pomaže u razumijevanju prirode stohastičkih procesa, te čini knjigu interaktivnom i dinamičnom za korisnike koji žele dublje istražiti ovu tematiku.

Sretno!

1. Osnove teorije vjerovatnoće

Za determinističke signale se može reći da su jednoznačno određeni svojim analitičkim zapisom. Npr. sinusni signal sa poznatom amplitudom A , kružnom frekvencijom ω i fazom ϕ je u potpunosti određen kao $y(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, te je moguće izračunati (predvidjeti) njegovu vrijednosti u bilo kojem vremenskom trenutku t .

S druge strane, postoje signali čije se ponašanje ne može opisati u zatvorenoj formi (npr. signal govora, signal šuma i sl.), a njihova amplituda djeluje kao da poprima potpuno slučajne vrijednosti. Ovakvi signali su itekako značajni, jer se izuzetno često pojavljuju kako u svakodnevnom životu, tako i u tehničkim primjenama. Ti signali su, po pravilu, do određene mjere nepredvidivi (“slučajni”), pa se nazivaju i slučajni signali. Nerijetko se može primijetiti da kod “slučajnih” signala postoje određene međuzavisnosti između pojedinih realizacija, kao i zavisnosti trenutnih i prethodnih vrijednosti, koje neke signale čine, uslovno rečeno, “manje slučajnim” od drugih. Da bi se ove pojave na određen način opisale, slučajni signali se kvantificiraju statističkim pokazateljima (npr. očekivanom vrijednošću, varijansom, autokorelacionom funkcijom i sl.). Kao što će biti izloženo u narednim poglavljima, neophodno je prvo do određene mjere ovladati matematskim aparatom za opisivanje slučajnih signala, a tek nakon toga opisati kompleksnije postupke njihove analize i obrade, kao što su npr. njihovi prolasci kroz linearne i nelinearne dinamičke sisteme.

Slučajni signali se u svom opisu u velikoj mjeri oslanjaju na teoriju vjerovatnoće. U tu svrhu, u narednim poglavljima će biti obrađeni osnovni pojmovi iz teorije vjerovatnoće, neophodni za opis i analizu slučajnih signala.

1.1 Osnovni pojmovi

U okviru teorije vjerovatnoće se uvodi nekoliko važnih pojmova: eksperiment, ishod, događaj, elementarni događaj i prostor elementarnih događaja.

Eksperiment predstavlja proceduru koja se provodi kako bi se ostvario određeni rezultat. Veoma često se taj postupak provodi hipotetski. Primjer eksperimenta je “bacanje novčića tri puta uzastopno”, “mjerenje temperature u prostoriji”, “brojanje studenata u učionici”.

Postoje dva tipa eksperimenta:

- *slučajni* - kod takvog eksperimenta rezultati nisu jednoznačno određeni uslovima pod kojima se eksperiment provodi. Primjer slučajnog eksperimenta je “bacanje

kockice za igru”. Kod slučajnih eksperimenata nužno je pretpostaviti da se eksperiment može ponoviti pri istim uslovima, za svaku pojedinu realizaciju.

- *deterministički* - kod takvog eksperimenta rezultati su jednoznačno određeni uvjetima pod kojima se isti provodi - npr. eksperiment bacanja lopte u “kosom hicu” predviđa da će pri istim uvjetima lopta uvijek pasti na isto mjesto.

Zanimljivo je primijetiti da se i svaki „deterministički” eksperiment u realnom okruženju može posmatrati i kao slučajni - npr. zbog nepostojanja „idealnih” uslova pri izvođenju eksperimenta, bačena lopta će svaki put završiti na malo drugačijoj poziciji (što se može modelirati kao slučajnost). Također, slučajni eksperiment, kao što je bacanje novčića, bi se uz savršeno tačan model i poznavanje svih uvjeta pod kojim se eksperiment izvodi, mogao predvidjeti, tako da zapravo ne bi bio slučajan već de-facto deterministički.

Ishod (eng. *outcome*) predstavlja mogući rezultat izvršenog eksperimenta. Ishodi eksperimenta se često obilježavaju sa grčkim slovom ξ . Ukoliko je primjer eksperimenta dat sa “bacanje novčića pet puta”, tada ukoliko se pretpostavi da će novčić pasti samo na “glavu” ili “pismo” mogući ishodi eksperimenta su $\xi_1 = \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”pismo”}$, $\xi_2 = \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”pismo”} - \text{”glava”}$ do $\xi_N = \text{”glava”} - \text{”glava”} - \text{”glava”} - \text{”glava”} - \text{”glava”}$ (ukupno $N = 2^5$ kombinacija). Bitno je naglasiti da je pojam ishoda usko vezan sa pojmom kao i načinom definiranja eksperimenta.

Događaj (eng. *event*) predstavlja *skup* ishoda eksperimenta. Važno je naglasiti da događaj predstavlja skup i da u aksiomatskoj teoriji vjerovatnoće zapravo algebra nad događajima predstavlja svojevrsnu repliku Bool-ove algebre nad skupovima. Primjer događaja u eksperimentu bacanja novčića pet puta je $A = \{\text{pismo se pojavilo paran broj puta}\}$, ili $B = \{\xi_1, \xi_2, \xi_7\}$. Svaki događaj predstavlja podskup prostora elementarnih događaja. **Za slučajan događaj A se kaže da se ostvario ako je rezultat eksperimenta jedan od mogućih ishoda koji pripadaju skupu A.** Događaj koji će se sigurno ostvariti predstavlja *siguran/pouzdan/izvjestan* događaj. Događaj koji se neće ostvariti predstavlja *nemoguć* događaj. Događaj koji nije ni siguran ni nemoguć naziva se *slučajan (neizvjestan)*.

Elementarni događaj se može definirati na više načina. Ako se događaj, pri istom eksperimentu, ne može rastaviti na jednostavnije, onda se naziva elementarni događaj, a u protivnom je složeni događaj. Prema drugoj definiciji, elementarni događaj predstavlja događaj koji uključuje samo jedan ishod (npr. $A = \{\xi_3\}$). Prema trećoj definiciji, ako se neki eksperiment može završiti sa n mogućih ishoda, svaki od tih ishoda je elementarni ishod (odnosno događaj). Primjer elementarnog događaja je “pao je broj tri na kockici za igru”, dok je primjer događaja “pao je broj manji od tri” (jer implicira dva elementarna događaja - “pao je broj jedan” i “pao je broj dva”).

Važno je napomenuti da se pojam elementarni ishod i elementarni događaj često koriste u istom kontekstu. Razlika je u tome što je elementarni ishod predstavlja ishod eksperimenta (ξ) dok elementarni događaj zapravo predstavlja događaj (skup) koji sadrži samo jedan element $\{\xi\}$.

Potpun skup ili prostor elementarnih događaja/ishoda (eng. *sample space*) pred-

stavlja skup svih elementarnih događaja (ishoda) koji su međusobno isključivi i sveobuhvatni. Dakle, to predstavlja skup “svih mogućih” ishoda. Obilježava se sa Ω ili S . Prostor elementarnih događaja predstavlja siguran događaj. S druge strane, prazan skup predstavlja nemoguć događaj.

Ansambel - predstavlja skup svih ishoda/događaja sa njima pripadajućim vjerovatnoćama.

Primjer 1.1:

Neka je “bacanje novčića jednom” razmatrani eksperiment. Definirati ishode, prostor elementarnih ishoda, i nekoliko primjera događaja.

Rješenje:

Ishod predstavlja mogući rezultat izvršenog eksperimenta. Kao rezultat bacanja novčića može se dobiti *pismo* ili *glava*. Shodno tome postoje dva moguća ishoda:

$$\xi_1 = \text{pismo} \text{ i } \xi_2 = \text{glava}$$

Prostor elementarnih događaja (ishoda) predstavlja skup „svih mogućih” ishoda. Kako su svi mogući ishodi već prethodno navedeni, može se oformiti i njihov skup:

$$\Omega = \{\xi_1, \xi_2\}$$

Događaj predstavlja skup ishoda eksperimenta. Razlikuje se ostvareni, siguran, nemoguć i slučajni događaj. Neki od primjera događaja su:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{pojavi se ili pismo ili glava}\} \\ B &= \{\text{pismo se pojavilo paran broj puta}\} \\ C &= \{\text{pojavi se pismo}\} \end{aligned}$$

Primjer 1.2:

Neka je eksperiment “bacanje dvije kockice za igru jednom”. Definirati prostore elementarnih događaja ako:

- se posmatra pojavljivanje brojeva na gornjoj strani obje kockice,
- se posmatra zbir brojeva na gornjim stranama kockica,
- redni broj bacanja u kojem su se prvi put pojavile trojke na obje kockice istovremeno,
- ugao između ravnina koje odgovaraju stranicama kockica na kojima se nalaze jedinice.

Za svaki način izvođenja eksperimenta definirati:

- nekoliko slučajnih događaja,
- nekoliko izvjesnih događaja,
- nekoliko nemogućih događaja.

Rješenje:

- Ako se posmatraju brojevi na gornjim stranama kockica, tada se prostor elementarnih događaja Ω sastoji od uređenih parova brojeva 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tj. $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$
 - slučajan događaj: “na kockicama su pali isti brojevi”,
 - siguran događaj: “na prvog kockici je pao broj veći ili jednak od 1, na drugoj isto”,
 - nemoguć događaj: “na jednoj od kockica je pao broj veći od 6”.
- Ukoliko se posmatra zbir brojeva na gornjim stranama kockica skup elementarnih događaja se sastoji od 11 brojeva i ima oblik: $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
 - slučajan događaj: “zbir brojeva na gornjim stranama kockica jednak je 11”,
 - siguran događaj: “zbir brojeva na gornjim stranama kockica je manji od 13”,
 - nemoguć događaj: “zbir brojeva na gornjim stranama kockica je manji od 2”.
- Prilikom određivanja rednog broja bacanja u kojem će se kao ishod pojaviti broj 3 na obje gornje strane kockica, skup elementarnih događaja je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva tj. $\Omega = \mathbf{N}$.
 - slučajan događaj: “redni broj bacanja na kome se ostvario željeni ishod je 3”,
 - siguran događaj: “redni broj bacanja na kome se ostvario željeni ishod je veći ili jednak 1”,
 - nemoguć događaj: “redni broj bacanja na kome se ostvario željeni ishod je negativan”.
- Ako se kao ishod posmatra ugao koji čine strane ravni strana kockica na kojima se nalazi broj 1, skup elementarnih događaja je ekvivalentan skupu $\Omega = [-\pi, \pi)$.
 - slučajan događaj: ugao koji zaklapaju ravni strana kockica je jednak $\pi/2$,
 - siguran događaj: ugao koji zaklapaju ravni strana kockica je manji od 2π ,
 - nemoguć događaj: ugao koji zaklapaju ravni strana kockica je veći od 2π .

Primjer 1.3:

Neka je eksperiment “bacanje novčića dok se ne pojavi pismo”. Predložiti moguće ishode i prostor elementarnih događaja.

Rješenje:

Mogući ishodi eksperimenta su:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \text{pismo} \\ \xi_2 &= \text{glava - pismo} \\ \xi_3 &= \text{glava - glava - pismo} \\ \xi_4 &= \text{glava - glava - glava - pismo} \\ &\dots\end{aligned}$$

Prostor elementarnih događaja se definira kao

$$\Omega = \{\xi_n | \xi_n = \underbrace{(\text{glava} - \dots - \text{glava})}_{n-1 \text{ put}} - \text{pismo}, n \in \mathbf{N}\}.$$

Primjer 1.4:

Neka je eksperiment “mjerenje temperature u prostoriji”. Predložiti moguće ishode i prostor elementarnih događaja.

Rješenje:

Mogući ishodi za mjerenje temperature su: $\xi_1 = 21^\circ C$, $\xi_2 = 32.1^\circ C$, $\xi_3 = -3.22^\circ C$, $\xi_4 = 56.2^\circ C$, itd. Obzirom da postoji beskonačno mnogo mogućih ishoda, i prostor elementarnih događaja za eksperiment mjerenja temperature teoretski predstavlja polusegment $\Omega = [-273.15^\circ C, +\infty)$.

Iz navedenih primjera se može vidjeti da prostor elementarnih događaja/ishoda može biti konačan, prebrojiv ili kontinualan. Ukoliko je prostor elementarnih događaja/ishoda konačan ili prebrojiv tada se prostor elementarnih događaja naziva **diskretnim**, a u protivnom je **kontinualan**.

1.2 Relacije među događajima

Često se za rad nad događajima koristi tzv. „algebra događaja”, koja zapravo predstavlja svojevrsni ekvivalent Bool-ove algebre nad skupovima. U skladu s tim, vrijedi:

1. Ako svako ostvarivanje događaja A povlači (implicira) događaj B tada *A povlači B*, odnosno $A \subseteq B$.

2. Dva događaja su *ista*, akko $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.¹
3. Događaj B je *suprotan* (*komplementaran*) događaju A ako i samo ako se realizuje događaj B, a događaj A se ne realizuje, i obrnuto, te se obilježava sa $B = \bar{A}$.
4. Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje *i događaj A i događaj B*, tada C predstavlja *presjek događaja A i B*, odnosno označava sa $C = A \cap B = AB$.
5. Događaji A i B su *disjunktni* ako se ne mogu ostvariti istovremeno ($AB = \emptyset$). Za događaje A i B kažemo da se isključuju. Više događaja se isključuje ako se uvijek može desiti samo jedan od njih.
6. Ako se događaj C ostvaruje ukoliko se realizuje barem jedan od događaja A ili B tada je C *unija događaja A i B*, odnosno označava sa $C = A \cup B = A + B$.
7. Ako se događaj C ostvaruje samo ukoliko se dogodi događaj A, ali ne i događaj B, tada se C naziva *razlika događaja* $C = A \setminus B$.
8. Posljedica: za svaki događaj $X \subseteq \Omega$ vrijedi $X \cup \bar{X} = \Omega$ i $X \cap \bar{X} = \emptyset$.

1.3 Pojam vjerovatnoće

Kako bi se u dovoljnoj mjeri mogao procijeniti mogući ishod eksperimenta uvodi se pojam vjerovatnoće. U literaturi, postoje četiri pristupa uvođenja teorije vjerovatnoće:

- *Pristup baziran na intuiciji*. To je pristup koji je baziran na iskustvu, a veoma često za njega nema racionalnog objašnjenja, kao npr. izjava “Amila će se vjerovatno udati za Emira”. Drugi karakterističan primjer je sljedeći. Neka se baca novčić 10 puta i svaki put novčić pada na istu stranu. Prirodno je očekivati da će tipičan ispitanik reći da je vjerovatnije da će i 11.put pasti na istu stranu (jer nešto “očigledno nije uredu s novčićem”), iako je padanje ispravnog novčića na istu stranu 10 puta uzastopno jednako vjerovatno kao i bilo koji drugi ishod.
- *Pristup klasične teorije*. Kod ovog pristupa se pretpostavlja da su svi ishodi jednako vjerovatni (ili izgledni - eng. *likelihood*) i da je potpun skup (prostor elementarnih ishoda) konačan. Ovaj pristup omogućava izračunavanje vjerovatnoće da se u dva bacanja novčića barem jednom pojavi pismo.
- *Pristup baziran na frekvenciji pojavljivanja*. Naime, eksperiment se ponavlja n puta i vjerovatnoća da se desi neki događaj se računa kao $P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n}$, pri čemu je n_E broj ostvarivanja događaja E pri ponavljanju eksperimenta n puta.
- *Aksiomska teorija*. Pristup je predložen od strane Kolmogorova tridesetih godina prošlog vijeka, te prevazilazi nedostatke ostalih pristupa (konačnost potpunog skupa, jednaku izglednost) na način da se neophodni pojmovi uvode aksiomatski, a potom se teorija nadgrađuje na uvedenom.

¹Važno je napomenuti da se nekada koriste oznake za podskup (\subseteq) i za pravi podskup (\subset). Razlika je što prva oznaka dozvoljava da A bude jednako B .

U nastavku će kao osnovni pristup biti korištena aksiomska teorija vjerovatnoće, ali će u svrhu što boljeg inženjerskog razumijevanja materije biti izbjegnuta matematska strogost na mjestima na kojima to bude moguće i opravdano.

Vjerovatnoća $P(\cdot)$ se uvodi nad skupom A kao funkcija nad skupom koja svakom događaju pridružuje “vjerovatnoću” događaja takvu da:

- **Aksiom 1** - Za bilo koji događaj A , $P(A) \geq 0$ (tzv. nenegativnost vjerovatnoće).
- **Aksiom 2** - Za potpun skup (prostor elementarnih događaja) Ω vjerovatnoća je data sa $P(\Omega) = 1$ (tzv. normalizacija vjerovatnoće).
- **Aksiom 3** - Ako se dva događaja međusobno isključuju (disjunktni su, odnosno $A \cap B = \emptyset$) tada je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Iz prethodnih aksioma slijede važne posljedice:

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(E\bar{F}) = P(E) - P(EF)$
- $P(E) = 1 - P(\bar{E})$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Bitno je napomenuti da je vjerovatnoća funkcija koja je aksiomatski uvedena **nad skupom, a ne nad pojedinačnim ishodom**. U skladu s tim, ispravno bi bilo pisati $P(\{\xi_1\})$ ili $P(\{\xi_1, \xi_2, \xi_5\})$, ali se vitičaste zagrade $\{\cdot\}$ često ne pišu zbog preglednosti i kraćeg zapisa.

Iz navedenog se jednostavno može zaključiti da ukoliko potpun skup Ω sadrži konačan nenulti broj N jedinstvenih i međusobno isključivih ishoda/događaja tada je vjerovatnoća jednako vjerovatnog događaja/ishoda data sa $P(\xi_n) = 1/N$.

Primjer 1.5:

Izračunati vjerovatnoću da igrača kockica padne na neki od brojeva $\{1, 2, 3\}$ (događaj A).

Izračunati vjerovatnoću da igrača kockica padne na neki od brojeva $\{2, 4, 6\}$ (događaj B).

Izračunati vjerovatnoću da se desi događaj A ili događaj B .

Rješenje:

Eksperiment je bacanje kocke. Mogući ishodi eksperimenta su pojavljivanje brojeva od 1 do 6, što se može označiti sa $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$. Moguće je definirati događaje A i B :

$$A = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

$$B = \{\xi_2, \xi_4, \xi_6\}$$

Uz pretpostavku „savršene” igraće kocke, vjerovatnoća da kocka padne na bilo koji broj iznosi $P(\xi_n) = \frac{1}{6}$ (pristup klasične teorije). Također, može se pretpostaviti da je skup ishoda konačan.

Pošto se ishodi međusobno isključuju, vrijedi:

$$P(A) = P(\xi_1) + P(\xi_2) + P(\xi_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Također, za događaj B vrijedi:

$$P(B) = P(\xi_2) + P(\xi_4) + P(\xi_6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Vjerovatnoća da se desio događaj A ili događaj B se može izračunati kao:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(\xi_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Primjer 1.6:

Izračunati vjerovatnoću da će suma brojeva sa dvije bačene kocke biti jednaka 5.

Rješenje:

Prostor elementarnih događaja je dat sa: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$ koji ima $n_{uk} = 36$ jednako vjerovatnih elementarnih ishoda. Suma brojeva sa dvije bačene kocke će biti jednaka 5 u sljedećim slučajevima:

$$A = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\} \quad (1.1)$$

Prema tome, vjerovatnoća događaja A je: $p(A) = n/n_{uk} = 4/36 \approx 0.11$.

Važno je primijetiti da neadekvatno odabran prostor elementarnih događaja Ω može dovesti do pogrešnog zaključka. Naime, da se u ovom zadatku ishodi tretiraju kao suma brojeva, odnosno $\Omega' = \{2, 3, \dots, 12\}$ sa 11 mogućih ishoda, tada bi se moglo pomisliti da je rješenje $p(A) = n/n_{uk} = 1/11$ što bi bio pogrešan odgovor, jer svi ishodi iz Ω' nisu jednako vjerovatni!

Rješenje ovog zadatka korištenjem Python razvojnog okruženja je ilustrovano programskim kodom 1.1.

PROGRAMSKI KOD 1.1

```
N = 10000          # Definira se broj bacanja kockice

# Generiše se N bacanja kockice
kockica1 = np.random.randint(1, 7, size = N)
kockica2 = np.random.randint(1, 7, size = N)

zbir_brojeva = kockica1 + kockica2

broj_petica = np.sum(zbir_brojeva == 5)
```

```
vjerovatnoca = broj_petica/N
```

```
print(f"Vjerovatnoća da je suma dobijenih cifara 5 je: {vjerovatnoca * 100:.2f}%.")
```

```
Vjerovatnoća da je suma dobijenih cifara 5 je: 11.71%.
```

1.3.1 Zajednička i uslovna vjerovatnoća

Dva događaja A i B su *zavisni* ako vjerovatnoća jednog događaja ovisi od pojavljivanja ili nepojavljivanja drugog događaja u istom eksperimentu. U protivnom događaji su nezavisni.

Ako su događaji A i B nezavisni, tada je vjerovatnoća njihovog presjeka, tzv. *zajednička vjerovatnoća*, jednaka proizvodu vjerovatnoća pojedinih događaja:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (1.2)$$

Ako su događaji A i B zavisni, tada se vjerovatnoća da se desi i događaj A i događaj B mora računati preko tzv. *uslovne vjerovatnoće*. Vjerovatnoća da se desi događaj B ukoliko se već desio događaj A se obilježava sa $P(B|A)$ i čita "vjerovatnoća od B ako je A". Ukoliko su događaji A i B zavisni tada se vjerovatnoća presjeka događaja računa kao (u literaturi poznatiji kao multiplikacijski teorem):

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B) \quad (1.3)$$

Ovaj princip se može proširiti na više događaja, npr.:

$$P(ABC) = P(C|AB)P(AB) = P(C|AB)P(B|A)P(A) \quad (1.4)$$

Primjer 1.7:

Neka je eksperiment "bacanje novčića dok se ne pojavi pismo". Izračunati vjerovatnoću n -tog ishoda ξ_n .

(Zadatak se može riješiti i korištenjem računara.)

Rješenje:

Uz pretpostavku da su pismo i glava jednako vjerovatni, vjerovatnoća pojavljivanja pisma/glave iznosi $P = 0.5$. Događaj „Prilikom n -tog bacanja novčića se pojavilo pismo” se može označiti sa F_n , a njemu suprotan događaj sa G_n .

Događaj $\xi_n =$ "Pismo se prvi put pojavilo prilikom n -tog bacanja novčića" se desio ako i samo ako se prilikom n -tog bacanja pojavilo pismo, dok je u svim prethodnim bacanjima dobivena glava.

Na osnovu toga, vjerovatnoća da je pismo prvi put dobiveno prilikom prvog bacanja iznosi:

$$P(\xi_1) = P(F_1),$$

prilikom drugog bacanja:

$$P(\xi_2) = P(G_1 F_2),$$

itd., što u generalnom slučaju daje:

$$P(\xi_n) = P(G_1 G_2 G_3 \cdots G_{n-1} F_n) \quad (1.5)$$

Ovo se dalje može napisati kao

$$P(\xi_n) = P(G_1)P(G_2/G_1)P(G_3/G_1 G_2) \cdots P(F_n/G_1 G_2 \cdots G_{n-1})$$

Svaka od ovih uslovnih vjerovatnoća iznosi P , jer u konkretnom slučaju, ishod bacanja ne zavisi od ishoda prethodnih bacanja. Tako se dolazi do konačnog rezultata:

$$P(\xi_n) = P^n = (0.5)^n$$

Programskim kodom 1.2 je moguće potvrditi ove analitičke rezultate.

PROGRAMSKI KOD 1.2

```
M = 10000          # Broj ponavljanja eksperimenata
vektor_rezultata = np.zeros(100)

for i in range(M):
    # Baca se novčić dok ne padne pismo
    brojac = 0
    ishodi = ['pismo', 'glava']
    ishod = ''

    while (ishod != 'pismo'):
        # Bacamo novčić
        ishod = np.random.choice(ishodi)
        brojac += 1

    # U ovom eksperimentu je novčić pao na pismo u "brojač" bacanju
    vektor_rezultata[brojac] += 1

# Ispis prvih 5 vjerovatnoća u postocima
vjerovatnoce_5 = vektor_rezultata[0:5]/M*100
print("Vjerovatnoća da je novčić pao na pismo prvih 5 bacanja:")
print("[ " + ", ".join([f"{vj:.2f}%" for vj in vjerovatnoce_5]) + " ]")
```

Vjerovatnoća da je novčić pao na pismo prvih 5 bacanja:
[0.00%, 49.59%, 25.35%, 12.87%, 6.32%]

1.3.2 Bayesov teorem

Neka događaj A može nastupiti ako se pojavi jedan od disjunktnih događaja B_i ($i = 1, 2, \dots, n$) koji čine potpun skup. Tada se vjerovatnoća događaja A može izračunati preko

sljedeće relacije (formula potpune vjerovatnoće):

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i) \quad (1.6)$$

Ukoliko je potrebno izračunati uslovne vjerovatnoće nakon što se desio događaj A , tada se koristi tzv. Bayesov teorem:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)} = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)} \quad (1.7)$$

Važno je primijetiti da se $P(B_k|A)$ naziva još i *aposteriori* vjerovatnoća događaja B_k nakon A , dok se $P(A|B_k)$ zove *apriori* vjerovatnoća događaja A nakon B_k . S druge strane, $P(B_k)$ se zove kauzalna (uzročna) ili *apriori* vjerovatnoća B_k .

Primjer 1.8:

Neka su u eksperimentu bacanja dvije igraće kocke definirana dva događaja. Događaj A je dat sa “zbir vrijednosti je paran broj”, a događaj B je dat sa “zbir vrijednosti je djeljiv sa 5”. Izračunati vjerovatnoću da se dogodio događaj A ako se dogodio događaj B .

Rješenje:

U zadatku se traži uslovna vjerovatnoća, odnosno vjerovatnoća događaja A ukoliko se desio događaj B . To se označava sa $P(A|B)$. Događaj B , „zbir vrijednosti je djeljiv sa 5” važi za sljedeće kombinacije bacanja dvije igraće kocke:

$$(1, 4) \vee (4, 1) \vee (2, 3) \vee (3, 2) \vee (5, 5) \vee (6, 4) \vee (4, 6)$$

To je ukupno 7 povoljnih događaja. Ukupan broj mogućih događaja je 36 pa je vjerovatnoća da se desio događaj B data sa:

$$P(B) = \frac{7}{36} \approx 0.194$$

Događaj A , „zbir vrijednosti je paran broj” važi za sljedeće kombinacije bacanja dvije igraće kocke:

$$\begin{aligned} &(1, 1) \vee (1, 3) \vee (1, 5) \vee (2, 2) \vee (2, 4) \\ &\vee (2, 6) \vee (3, 1) \vee (3, 3) \vee (3, 5) \vee (4, 2) \\ &\vee (4, 4) \vee (4, 6) \vee (5, 1) \vee (5, 3) \vee (5, 5) \\ &\vee (6, 2) \vee (6, 4) \vee (6, 6) \end{aligned}$$

Analogno se može pokazati da je $P(A) = 18/36 = 0.5$. Vidi se da su ishodi: $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$ zajednički za oba događaja, tj.:

$$P(AB) = \frac{3}{36}$$

Do ovog rezultata se može doći ne samo preko zajedničkih ishoda, već i korištenjem unije ishoda. Naime, skup $A \vee B$ sadrži ukupno 22 različita ishoda (skup A i dodatno $(1, 4) \vee (4, 1) \vee (2, 3) \vee (3, 2)$). Obzirom da vrijedi:

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.8)$$

tada je:

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \vee B) = \frac{18}{36} + \frac{7}{36} - \frac{22}{36} = \frac{3}{36}$$

Odatle se zaključuje:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{7}{36}} = \frac{3}{7} \approx 0.4286$$

Analogno se može pokazati:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{3}{18} \approx 0.1666$$

Tumačenje prethodne relacije je sljedeće. Ukoliko se ostvario događaj A , tada je ukupan broj mogućih ishoda 18. S druge strane, ako se ostvario događaj A , tada su se moguće realizacije iz skupa B smanjile sa:

$$(1, 4) \vee (4, 1) \vee (2, 3) \vee (3, 2) \vee (5, 5) \vee (6, 4) \vee (4, 6),$$

na:

$$(5, 5) \vee (6, 4) \vee (4, 6).$$

Prema tome, od ukupno 18 mogućih ishoda iz skupa A , samo 3 ishoda, koja pripadaju i skupu A i skupu B su od interesa. Vjerovatnoća ostvarivanja tog događaja iznosi $P(B|A) = 3/18$.

(Za vježbu, riješiti ovaj zadatak korištenjem simulacionog okruženja.)

Primjer 1.9:

Koliko ljudi se treba skupiti na nekom skupu da bi vjerovatnoća da barem dvije osobe slave rođendan istog dana bila veća od 70%?

(Zadatak je potrebno riješiti korištenjem računara.)

Rješenje:

Radi jednostavnosti, neka se pretpostavi da svaka godina ima $N = 365$ dana (ne uzimaju se u obzir prestupne godine). Neka su događaji A i B definirani kao: $A =$ "dvije ili više osoba slave rođendan na isti dan", $B =$ "ne postoje bar dvije osobe koje slave rođendan na isti dan". Prilikom rješavanja ovog zadatka, neka se posmatra vjerovatnoća događaja B . Time će vjerovatnoća događaja A biti $P(A) = P(\bar{B}) = 1 - P(B)$.

Ukoliko se na jednom skupu se nalazi n osoba, tada postoji N mogućnosti za prvu osobu da ne slavi rođendan na isti dan sa ostalim prisutnim. Analogno, za drugu osobu $N - 1$ mogućnosti i za n -tu osobu $N - n + 1$ mogućnosti. Dan rođenja jedne osobe može se odabrati kao jedna od N mogućnosti, time postoji N^n mogućnosti za dan rođenja za n osoba. U skladu s tim, vrijedi sljedeće:

$$P(B) = \frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+1)}{N^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

Da bi se proračunao minimalan broj osoba na jednom skupu, te da vjerovatnoća bude veća od 70% kako bi bar dvije osobe slavile rođendan na isti dan, potrebno je riješiti nejednakost:

$$P(B) \leq 30\%$$

Ovu nejednakost je najjednostavnije riješiti numeričkim putem. Uz pomenute uslove može se pokazati da je potrebno minimalno 30 osoba da bude na skupu, odnosno da je rješenje zadatka $n_{min} = 30$.

Simulacija 1.3 može izračunati i vjerovatnoću da dvije osobe slave rođendan u isti dan, za proizvoljan broj osoba na skupu.

PROGRAMSKI KOD 1.3

```
N = 80 # Definira se maksimalan broj ljudi na rođendanu

# Za zadani broj ljudi ponavlja se eksperiment M puta
# kako bi se "izmjerila" vjerovatnoća
M = 2000

vjerovatnoce = np.zeros(N)

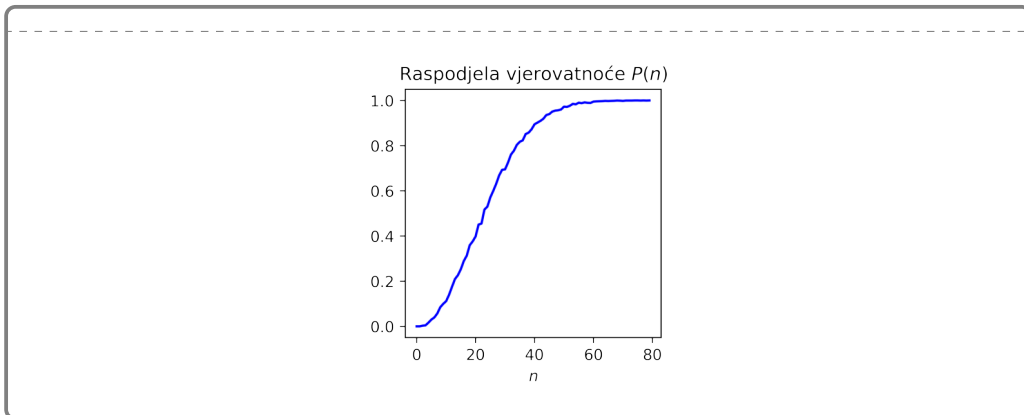
vektor_n = range(N)

for n in vektor_n:
    broj_pozitivnih = 0
    for m in range(M):
        # Generišu se dani u godini kada slave rođendan
        rođendani = np.random.randint(1, 365+1, size = n)

        # Određuje se da li imaju dva ista broja
        if len(rođendani) != len(set(rođendani)):
            # u vektoru postoje dva ista broja
            broj_pozitivnih = broj_pozitivnih + 1

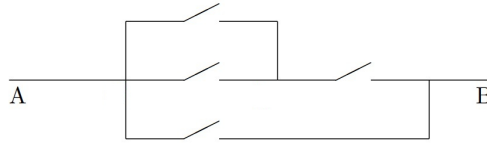
    vjerovatnoce[n] = broj_pozitivnih/M

ssp.slprom1D.grafik(vektor_n, vjerovatnoce,
                    x_labela = "$n$",
                    naslov = "Raspodjela vjerovatnoće $P(n)$")
```



Zadaci za samostalan rad

1. Data je električna shema:



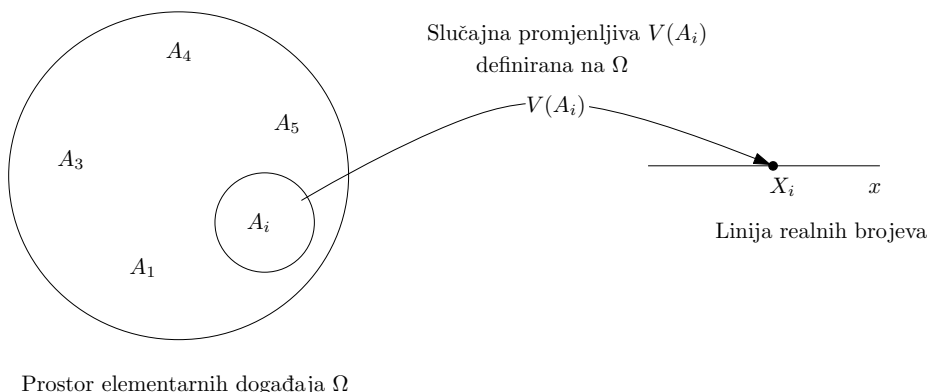
Slika 1.1: Električna shema za Zadatak 1.

- Svaki od prekidača je, nezavisno od drugih, zatvoren sa vjerovatnoćom 0.5. Potrebno je izračunati vjerovatnoću da je mreža AB zatvorena.
2. Domaćica zna pripremiti 4 vrste jela: begovu čorbu, piletinu, pitu i punjene paprike. Sedmicu započinje bilo kojim jelom sa jednakom vjerovatnoćom. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana sa vjerovatnoćom 0.4 ili odabire jedno od preostalih jela, koja su sva jednako vjerovatna. Kolika je vjerovatnoća da će izbor jela biti piletina, piletina, begova čorba, pita, pita?
3. U kutiji se nalaze 3 obična novčića i jedan defektni novčić, koji ima "glavu" na obje strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.
- Potrebno je izračunati vjerovatnoću da će oba puta pasti "glava".
 - Ako je oba puta pala "glava", koliko iznosi vjerovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?
4. Neka su date sljedeće tri karte: crna karta (koja je crna sa obje strane), bijela karta (koja je bijela sa obje strane) i mješovita karta (koja je crna sa jedne, a bijela sa druge strane). Sve karte su stavljene u šešir i jedna je izvučena nasumice i stavljena na sto. Strana okrenuta nagore je crna. Kakve su šanse da je druga strana karte također crna?
5. Tri istraživača Toni, Alen i Ilhana su zarobljeni na udaljenoj planeti Ultrior od strane vanzemaljaca. Vanzemaljci su odlučili da će osloboditi jednog od njih. Glavni vanzemaljac zna ko će biti oslobođen, ali im ne želi direktno reći. Toni, očajnički tražeći informacije, smišlja plan i kaže vanzemaljcu:
- "Ako je Alen izabran da bude oslobođen, reci mi Ilhanino ime. Ako je Ilhana izabrana, reci mi Alenovo ime. A, ako sam ja izabran, baci novčić da odlučiš čije ćeš mi ime od njih dvoje reći." Vanzemaljac sljedećeg dana kaže Toniju da Alen neće biti oslobođen.
- Toni sada misli da su mu šanse porasle sa $1/3$ na $1/2$, jer vjeruje da je sada odluka samo između njega i Ilhane. On tiho prenosi informaciju Ilhani, koja postaje optimistična, jer ona smatra da Toni i dalje ima $1/3$ šanse, ali da su njene šanse sada skočile na $2/3$. Ko je u pravu?
6. Na slučajan način se biraju brojevi a i b iz segmenta $[0, 1]$. Koja je vjerovatnoća da će jednačina $x^2 + ax + b = 0$ imati realna rješenja po nepoznatoj x ?
7. Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka unutar lopte. Koja je vjerovatnoća da će izabrana tačka biti i unutar kocke?

2. Slučajna promjenljiva. Modeli raspodjele vjerovatnoće. Očekivane vrijednosti.

2.1 Slučajna promjenljiva

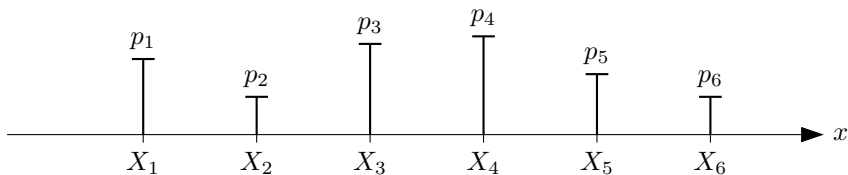
Ukoliko neki eksperiment može kao rezultat imati određen broj (elementarnih) međusobno disjunktних slučajnih događaja A_i , tada se svakom od njih može na neki način pripisati/pridružiti određena numerička vrijednost $V(A_i) = X_i$. Obično se brojevi X_i uzimaju tako da su međusobno različiti brojevi, a događaji aranžiraju na način da se njihovi numerički reprezentivi mogu sortirati, odnosno $X_i > X_{i-1}$. Ovaj princip, praktično, predstavlja svojevršno preslikavanje prostora elementarnih događaja Ω na skup realnih brojeva (slika 2.1).



Slika 2.1: Preslikavanje prostora elementarnih događaja Ω na realnu osu

Vrijednost X_i koju može poprimiti slučajni događaj se naziva slučajna promjenljiva X . U zavisnosti od toga da li je skup Ω diskretan (ili prebrojiv) ili je kontinualan, i slučajna promjenljiva X može biti *diskretna* ili *kontinualna*.

Svakoј slučajnoj promjenljivoј X , koja predstavlja zapravo ostvarivanje jednog od



Slika 2.2: Representacija slučajne promjenljive

mogućih događaja, se može pridružiti vjerovatnoća u skladu sa definicijom navedenom u prethodnom poglavlju. Neka se pretpostavi da je vjerovatnoća slučajne promjenljive data sa $p(X_i) = p_i$. Tada je moguće sintetizirati reprezentaciju “slučajna promjenljiva - vjerovatnoća” poput one na slici 2.2.

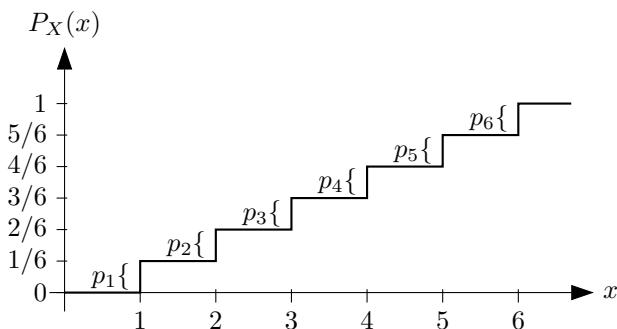
2.2 Funkcija raspodjele vjerovatnoće

Nedostatak reprezentacije prikazane na slici 2.2 je taj što je ona pogodna samo za diskretne skupove Ω . Naime, ukoliko se pretpostavi da je slučajna promjenljiva predstavljena kontinualnim skupom mogućih vrijednosti, tada je vjerovatnoća realizacije slučajne promjenljive praktično jednaka nuli. Npr. ukoliko je eksperiment mjerenje temperature u učionici, tada je prirodno očekivati da ishod eksperimenta može biti bilo koja vrijednost temperature u intervalu $[10, 30][^{\circ}C]$. Ukoliko se slučajna promjenljiva koristi za reprezentaciju ovog eksperimenta, tada je vjerovatnoća da će se izmjeriti tačno $21.456[^{\circ}C]$ praktično jednaka nuli (jer je broj “mogućih” ishoda beskonačan, a samo jedan ishod je povoljan). Iz tog razloga se uvodi **funkcija raspodjele vjerovatnoće** (eng. *probability distribution function - PDF*):

$$P_X(x) = \text{vjerovatnoća}(X \leq x), \tag{2.1}$$

koja predstavlja vjerovatnoću da su se desili događaji čije su vrijednosti „mapirane” sa X , pri čemu je $X \leq x$.

Funkciju raspodjele vjerovatnoće je najbolje objasniti na primjeru. Neka je eksperiment bacanje igraće kocke. Tada se može razlikovati 6 elementarnih događaja (padanje



Slika 2.3: Funkcija raspodjele vjerovatnoće za eksperiment bacanja igraće kocke

kočke na “1”, “2”, ..., “6”). U skladu s tim, moguće je svakom događaju dodijeliti jednu vrijednost koju poprima slučajna promjenljiva, pa npr. vrijednost slučajne promjenljive $X = 1$ predstavlja ostvarivanje događaja „padanja kočke na 1”, vrijednost slučajne promjenljive $X = 2$ predstavlja ostvarivanje „padanja kočke na 2” i tako redom. U tom slučaju funkcija raspodjele vjerovatnoće se može izračunati za svaku vrijednost slučajne promjenljive X (koja ovdje poprima praktično samo 6 mogućih vrijednosti), te vizualizirati kao na slici 2.3. U skladu s tim, $P_X(3.42) = P_X(x)|_{x=3.42}$ predstavlja vjerovatnoću da su se realizovali događaji označeni sa $X = 1$, $X = 2$ i $X = 3$, odnosno vjerovatnoću da je kocka pala na “1”, “2” ili “3”.

Iz ovog izlaganja je i intuitivno jasno da je $P_X(x)$:

- neopadajuća funkcija,
- neprekidna s desna ($P_X(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_X(x + \epsilon)$), i
- da vrijedi $P_X(-\infty) = 0$, i $P_X(+\infty) = 1$.

Na slici 2.3 je prikazana funkcija raspodjele vjerovatnoće za eksperiment bacanja igraće kočke. Bitno je još napomenuti i da se funkcija raspodjele vjerovatnoće u literaturi koristi i pod terminom kumulativna funkcija vjerovatnoće (eng. *cumulative density function - CDF*), naročito kod diskretnih slučajnih promjenljivih.

2.3 Funkcija gustine vjerovatnoće

Druga funkcija koja se koristi za analizu slučajnih promjenljivih je **funkcija gustine vjerovatnoće** (eng. *probability density function - pdf*). Ova funkcija predstavlja izvod funkcije raspodjele vjerovatnoće po slučajnoj promjenljivoj:

$$p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx} \quad (2.2)$$

odnosno

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx \quad (2.3)$$

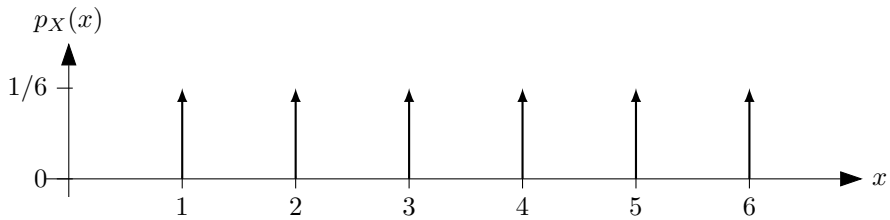
Iz prethodnih razmatranja je jasno da za funkciju gustine vjerovatnoće vrijedi:

- $p_X(x) \geq 0$, $\forall x$, pri čemu je važno primijetiti da funkcija gustine vjerovatnoće, za razliku od “obične” vjerovatnoće, ne mora biti nužno manja ili jednaka jedan,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) dx = 1$,
- $\int_a^b p_X(x) dx = P(b) - P(a) =$ vjerovatnoća ($a < X \leq b$), što zapravo predstavlja vjerovatnoću da su se desili događaji predstavljeni vrijednostima slučajne promjenljive $a < X \leq b$.

Na slici 2.4 je prikazana funkcija gustine vjerovatnoće za eksperiment bacanja igraće kočke.

S druge strane, ukoliko se razmatraju funkcije raspodjele vjerovatnoće za *diskretnu slučajnu promjenljivu* x , tada je moguće definirati i sljedeću funkciju vjerovatnoće:

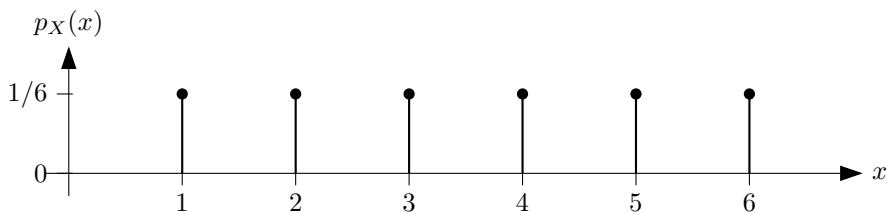
$$p_X(x) = \text{vjerovatnoća}(X = x), \quad (2.4)$$



Slika 2.4: Funkcija raspodjele vjerovatnoće za eksperiment bacanja igraće kocke

koja se označava terminom *masena*, odnosno naziva funkcija vjerovatnoće mnoštva/mase (eng. *probability mass function*).

Napomena: u nastavku teksta će se, radi preglednosti, indeks koji označava slučajnu promjenljivu u funkcijama vjerovatnoća povremeno izostavljati ukoliko je jasno o kojoj slučajnoj promjenljivoj se radi (npr. umjesto $p_X(x)$ ili $P_Y(y)$ će se jednostavno pisati $p(x)$ odnosno $P(y)$).



Slika 2.5: PMF za diskretnu promjenljivu (eksperiment bacanja igraće kocke)

Karakteristična funkcija slučajne promjenljive se definira na sljedeći način. Ako je X slučajna promjenljiva, tada se funkcija:

$$\phi_X(u) = E[e^{juX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)e^{jux} dx \quad (2.5)$$

naziva *karakterističnom funkcijom* slučajne promjenljive X . Iz relacije (2.5) se vidi da karakteristična funkcija zapravo predstavlja Fourierovu transformaciju funkcije gustine vjerovatnoće. Važno je napomenuti da se ova definicija razlikuje od uobičajenog izraza za Fourierovu transformaciju, zbog predznaka varijable transformacije.

2.4 Modeli raspodjela vjerovatnoće

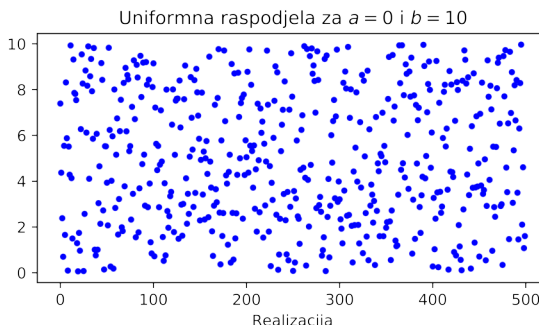
Prilikom analize slučajnih promjenljivih uočilo se da postoje mnogi “reprezentativni” oblici određenih “slučajnosti” koje se pojavljuju, kako u svakodnevnom životu, tako i u tehničkim primjenama. Takvi oblici se zovu teoretski modeli raspodjela vjerovatnoće. U nastavku će biti prikazani neki od najpoznatijih modela raspodjela vjerovatnoće za slučajne promjenljive.

2.4.1 Uniformna raspodjela

PROGRAMSKI KOD 2.1

```
# Generiranje slučajne promjenljive iz uniformne raspodjele:
N = 500; n = np.arange(N);
a = 0; b = 10; X = np.random.uniform(a,b, N)

ssp.slprom1D.realizacije(n, X,
                          naslov = "Uniformna raspodjela za $a=0$ i $b=10$")
```

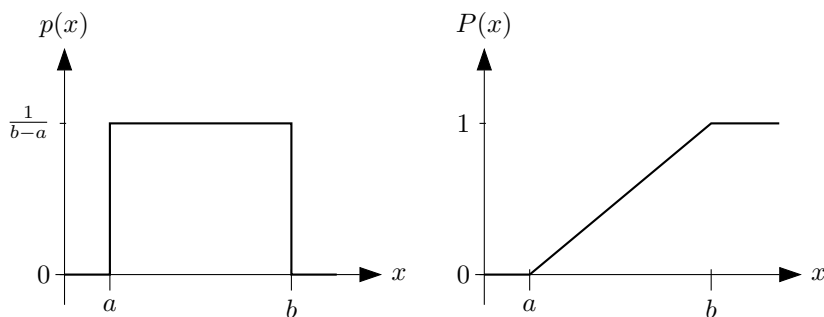


Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće za slučajnu promjenljivu koja se podvrgava **uniformnoj** raspodjeli su prikazane na slici 2.6, a analitički zapis je dat sa:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad (2.6)$$

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}(x - a), & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \quad (2.7)$$

Ova raspodjela govori da su praktično sve realizacije slučajne promjenljive na segmentu $[a, b]$ jednako vjerovatne. Uniformna raspodjela je značajna jer se uz pomoć nje mogu formirati ostale raspodjele. Ova raspodjela ima veliku primjenu u teoriji komunikacija. Također, uniformna raspodjela se najčešće koristi kada se modeliraju promjenljive kod kojih ne postoje apriori informacije o njenoj raspodjeli.



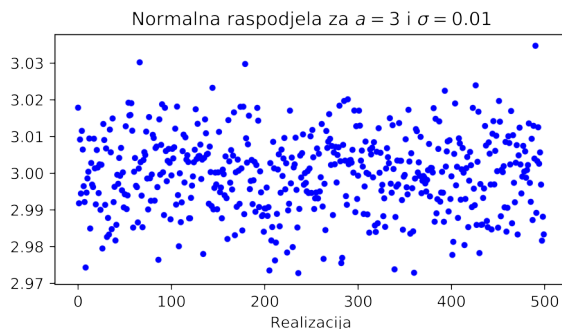
Slika 2.6: Funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ i funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x)$ za uniformnu raspodjelu slučajne promjenljive

2.4.2 Gaussova (normalna) raspodjela

PROGRAMSKI KOD 2.2

```
# Generiranje slučajne promjenljive iz normalne (Gaussove) raspodjele:
a = 3; sigma = 0.01; X = np.random.normal(a,sigma, N)

ssp.slprom1D.realizacije(n ,X,
                        naslov = "Normalna raspodjela za $a=3$ i $\sigma=0.01$")
```



Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće za slučajnu promjenljivu koja se podvrgava Gaussovoj, ili tzv. **normalnoj** raspodjeli su prikazane na slici 2.7, a analitički zapis je dat sa:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (2.8)$$

$$P(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (2.9)$$

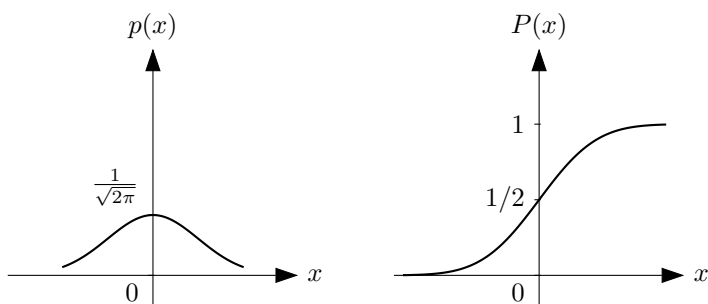
U literaturi postoji nekoliko različitih funkcija koje opisuju funkciju raspodjele vjerovatnoće za Gaussovu normalnu raspodjelu, i to (nerijetko i u nešto drugačijim oblicima!):

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (2.10)$$

koja se naziva funkcija greške (eng. *error function*), te:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.11)$$

poznata i kao normalna kumulativna funkcija gustine vjerovatnoće (eng. *normal cumulative density function*).



Slika 2.7: Funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ i funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x)$ za Gaussovu (normalnu) raspodjelu slučajne promjenljive

Za razliku od uniformne raspodjele (ilustrovanu programskim kodom 2.1) Gaussova raspodjela pokazuje veću tendenciju nagomilavanja vrijednosti slučajne promjenljive oko srednje vrijednosti (što se vidi programski kodom 2.2). Ova raspodjela modelira jako veliki broj prirodnih fenomena, npr. raspodjelu visine ljudi u velikoj grupi, veličinu lišća na drveću, ocjene studenata i sl. Funkcija gustine vjerovatnoće data relacijom (2.8) opisuje ono što se naziva *standardna normalna raspodjela*.

Gaussova raspodjela se češće daje u nešto opštijem obliku:

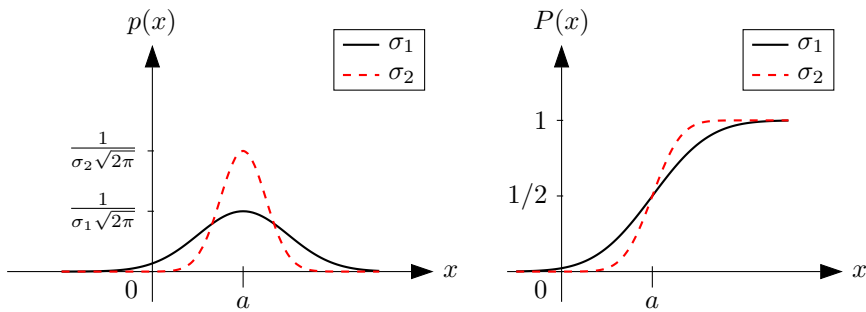
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} \quad (2.12)$$

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \quad (2.13)$$

pri čemu se:

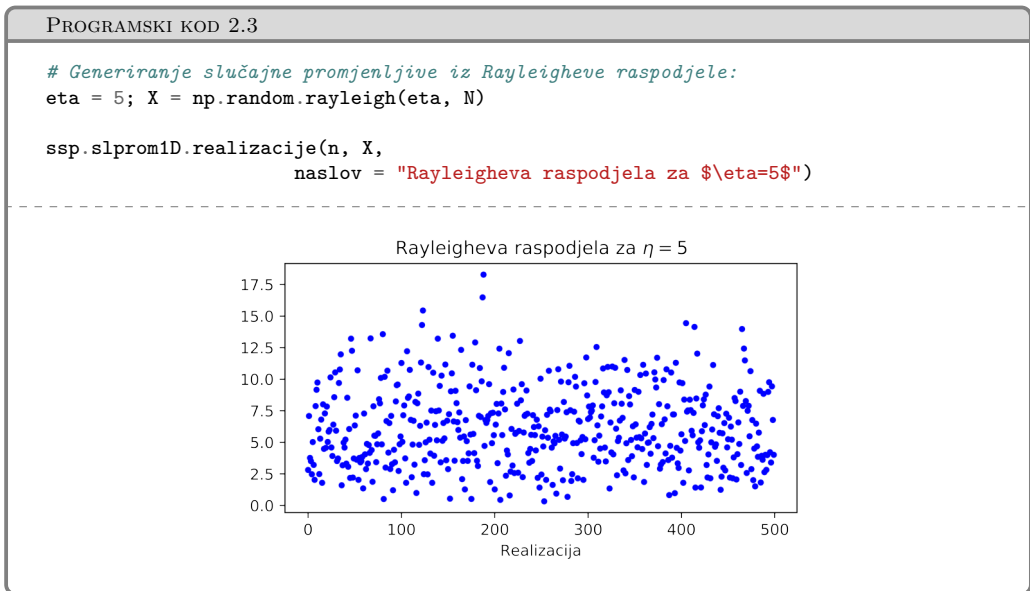
- a - naziva *aritmetička sredina*, *srednja vrijednost*, *očekivana vrijednost*, *matematičko očekivanje* (eng. *mean*) i govori oko koje vrijednosti slučajne promjenljive je “centrirana” navedena raspodjela,
- σ - predstavlja tzv. *standardnu devijaciju* i govori koliko se slučajna promjenljiva “rasipa” oko očekivane vrijednosti,
- σ^2 - predstavlja tzv. *varijansu*. Varijansa za normalnu raspodjelu predstavlja kvadrat standardne devijacije.

Na slici 2.8 su prikazane dvije normalne raspodjele sa različitim vrijednostima standardne devijacije/varijanse. Jasno je da raspodjela sa većom varijansom ima veće rasipanje oko očekivanih vrijednosti.



Slika 2.8: Usporedba funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ i funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x)$ za Gaussovu (normalnu) raspodjelu slučajne promjenljive ($\sigma_1 > \sigma_2$)

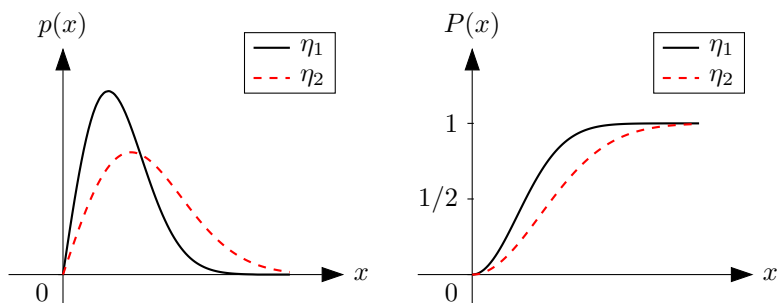
2.4.3 Rayleigheva raspodjela



Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće za slučajnu promjenljivu koja se podvrgava tzv. Rayleighovoj raspodjeli su prikazane na slici 2.9, a analitički zapis je dat sa:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\eta}\right)^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\eta}\right)^2}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.15)$$



Slika 2.9: Funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ i funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x)$ za Rayleighovu raspodjelu slučajne promjenljive ($\eta_1 < \eta_2$)

Parametar η određuje stepen nagomilavanja slučajne promjenljive oko očekivane vrijednosti. Ovom raspodjelom se npr. može modelirati radijalna distribucija pogodaka prilikom eksperimenta “gađanje u metu strelicama pikada”.

2.4.4 Eksponencijalna raspodjela

PROGRAMSKI KOD 2.4

```

# Generiranje slučajne promjenljive iz eksponencijalne raspodjele:
a = 4; X = np.random.exponential(a, N)

ssp.slprom1D.realizacije(n, X,
                          naslov = "Eksponencijalna raspodjela za $a=4$")
    
```

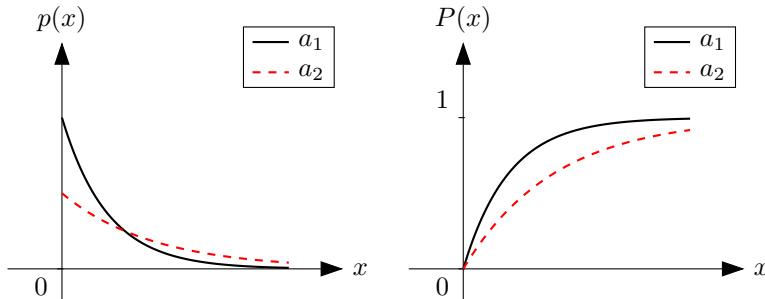
Eksponencijalna raspodjela za $a = 4$

Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće za slučajnu promjenljivu koja se podvrgava eksponencijalnoj raspodjeli su prikazane na slici 2.10, a analitički zapis je dat sa:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ ae^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-ax}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

gdje a predstavlja parametar eksponencijalne raspodjele.



Slika 2.10: Funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ i funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x)$ za eksponencijalnu raspodjelu slučajne promjenljive ($a_1 > a_2$)

Eksponencijalnom raspodjelom se modeliraju problemi kašnjenja, radni vijek uređaja/mašina i sl.

2.4.5 Ostale raspodjele

U tabeli 2.1 date su neke od ostalih važnijih kontinualnih raspodjela. U obradi signala se često koristi Laplaceova raspodjela, posebno za modele sa većim šumom. Chi-kvadrat raspodjela se primjenjuje u testiranju statističkih hipoteza, procjeni razlika između uzoraka, kao i analizi varijanse. Gamma raspodjela se obično koristi u analizi trajanja sistema, npr. modeliranju vremena otkaza. Beta raspodjela nalazi značajnu primenu u Bayesovskoj statistici i procjeni vjerovatnoće, dok se Cauchyjeva raspodjela koristi za modeliranje sistema sa ekstremnim ili vanrednim događajima, kao što su finansijski šokovi.

Raspodjela	$p_X(x)$	$P_X(x)$
Laplaceova raspodjela	$\frac{1}{2b} e^{-\frac{ x-\mu }{b}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \mu) \left(1 - e^{-\frac{ x-\mu }{b}}\right)$
Chi-kvadrat raspodjela	$\frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} x^{k/2-1} e^{-x/2}$	$\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$
Beta raspodjela	$\frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}$	$\int_0^x \frac{t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} dt$
Gamma raspodjela	$\frac{x^{k-1} \lambda^k e^{-\lambda x}}{\Gamma(k)}$	$P(k, \lambda x)$
Cauchyjeva raspodjela	$\frac{1}{\pi \gamma \left[1 + \left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right]}$	$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$

Tabela 2.1: Pregled nekih važnih kontinualnih raspodjela

U tabeli 2.2 date su i neke od važnijih diskretnih raspodjela. Bernulijeva raspodjela se koristi za modeliranje binarnih događaja, poput uspjeha ili neuspjeha, dok se binomijalna

Raspodjela	$p_X(x)$	$P_X(x)$
Bernulijeva raspodjela	$p^k(1-p)^{1-k}$	p za $k = 1$, $1-p$ za $k = 0$
Binomijalna raspodjela	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$
Poissonova raspodjela	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	$\sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$
Geometrijska raspodjela	$(1-p)^{k-1}p$	$1 - (1-p)^k$
Hipergeometrijska raspodjela	$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\sum_{i=0}^k \frac{\binom{K}{i}\binom{N-K}{n-i}}{\binom{N}{n}}$

Tabela 2.2: Pregled nekih važnih diskretnih raspodjela

raspodjela tipično primjenjuje u eksperimentima sa konačnim brojem pokušaja, npr. broj uspjeha u seriji testova. Za modeliranje događaja koji se dešavaju tokom fiksnih vremenskih intervala, npr. broj kvarova u jedinici vremena, zgodna je Poissonova raspodjela. Geometrijska raspodjela modelira broj pokušaja do prvog uspjeha, korisna u situacijama kada se čeka na prvi uspješan događaj, dok hipergeometrijska raspodjela nalazi primjenu u procjeni broja defektnih komponenti u proizvodnoj seriji.

2.5 Očekivane vrijednosti

Iako su funkcije raspodjele vjerovatnoće i funkcije gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive zgodne za analizu slučajnih događaja, ponekad se umjesto ovih funkcija zahtijeva poznavanje određenih skalara koji bi omogućili jednostavniju analizu i upoređivanje istih. U skladu s tim, definira se **očekivana vrijednost funkcije** $f(X)$ (od slučajne promjenljive X sa funkcijom gustine vjerovatnoće $p(x)$):

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx \tag{2.18}$$

Može se jednostavno pokazati da vrijedi:

$$E[c_1f_1(X) + c_2f_2(X)] = c_1E[f_1(X)] + c_2E[f_2(X)], \tag{2.19}$$

što predstavlja ekvivalent koncepta linearnosti kod determinističkih signala.

Specijalno, ukoliko se za funkciju slučajne promjenljive $f(X)$ odabere polinomijalni oblik $f(X) = X^n$ ($n \in \mathbf{N}$), tada se očekivane vrijednosti nazivaju **momenti slučajnih promjenljivih**. Ako se za funkciju $f(X)$ odabere $f(X) = (X - \eta_X)^n$ ($n \in \mathbf{N}$), pri čemu je η_X očekivana vrijednost slučajne promjenljive, tada se očekivane vrijednosti nazivaju **centralni momenti slučajnih promjenljivih**.

2.5.1 Očekivana vrijednost slučajne promjenljive

Moment prvog reda ($n = 1$) se naziva **očekivana vrijednost** slučajne promjenljive. Drugi termini su matematičko očekivanje ili srednja vrijednost (eng. *mean, average, expected value*). Očekivana vrijednost slučajne promjenljive se računa kao:

$$E[X] = \bar{X} = \eta_X = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \quad (2.20)$$

Primjer 2.1:

Ako funkcija gustine vjerovatnoće $p(x)$ ima osu simetrije datu sa $x = a$ tada je očekivana vrijednost te slučajne promjenljive data sa $\eta_X = a$.

Rješenje:

Uvrštavanjem:

$$\begin{aligned} \eta_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)p(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} ap(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x + a)dx + a \\ &= 0 + a \\ &= a \end{aligned}$$

se dokazuje tražena tvrdnja.

2.5.2 Srednjekvadratna vrijednost slučajne promjenljive

Moment drugog reda ($n = 2$) se naziva **srednjekvadratna vrijednost** slučajne promjenljive (eng. *mean-square*). Računa se korištenjem sljedećeg izraza:

$$E[X^2] = \overline{X^2} = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx \quad (2.21)$$

2.5.3 Centralni momenti

Očekivane vrijednosti funkcije slučajne promjenljive $f(X) = (X - \eta_X)^n$ se nazivaju **centralni momenti**. Oni daju odstupanja od “srednje” vrijednosti.

Centralni moment prvog reda se definira kao:

$$c_1 = E[X - \eta_X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)p(x)dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx - \eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \eta_X - \eta_X \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Centralni moment drugog reda se naziva **disperzija** ili **varijansa**:

$$\begin{aligned}
 c_2 = \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^2 p(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - 2\eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx + \eta_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx \\
 &= \sigma_X^2 - 2\eta_X^2 + \eta_X^2 \\
 &= \sigma_X^2 - \eta_X^2
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

odnosno:

$$E[(X - \bar{X})^2] = \text{Var}[X] = E[X^2] - [E[X]]^2 = \overline{X^2} - (\bar{X})^2 \tag{2.24}$$

Disperzija/varijansa je zapravo razlika izmedju srednjekvadratne vrijednosti i kvadrata očekivane vrijednosti.

Primjer 2.2:

Za eksperiment bacanja kocke izračunati očekivanu vrijednost, srednjekvadratnu vrijednost i varijansu.

Rješenje:

Očekivana vrijednost za ekperiment bacanja kocke se računa kao:

$$\begin{aligned}
 \eta_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - k) dx \\
 &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x - k) dx = \frac{\sum_{k=1}^6 k}{6} = 3.5
 \end{aligned}$$

Također, srednjekvadratna vrijednost se računa kao:

$$\begin{aligned}
 \sigma_X^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \delta(x - k) dx \\
 &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(x - k) dx \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^6 k^2}{6} = 15.16
 \end{aligned}$$

odakle slijedi $\sigma_x = \sqrt{E[X^2]} = 3.89$. Nadalje:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 - \eta_X^2 = 15.16 - 3.5^2 = 2.91$$

Može se izračunati $\sigma = 1.70$.

Dobiveni rezultati se mogu provjeriti i programskim kodom 2.5.

PROGRAMSKI KOD 2.5

```
N = 10000 # Definira se broj bacanja kockice

# Generise se N bacanja kockice
kockica = np.random.randint(1, 7, size = N)

print("Očekivana vrijednost: {:.2f}".format(np.mean(kockica)))
print("Srednjekvadratna vrijednost: {:.2f}".format(np.mean(kockica**2)))
print("Varijansa: {:.2f}".format(np.var(kockica)))
```

```
Očekivana vrijednost: 3.51
Srednjekvadratna vrijednost: 15.22
Varijansa: 2.91
```

2.5.4 Određivanje očekivane vrijednosti, srednjekvadratne vrijednosti i varijanse za osnovne distribucije

U nastavku će biti određene očekivane vrijednosti, srednjekvadratne vrijednosti i varijanse za osnovne distribucije (uniformnu, normalnu, Rayleighovu i eksponencijalnu).

Uniformna raspodjela

Očekivana vrijednost se računa korištenjem:

$$\begin{aligned} E[X] = \eta_X &= \int_a^b xp(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{b+a}{2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tačnost rezultata se može provjeriti ukoliko se iskoristi osobina simetričnosti funkcije gustine vjerovatnoće. Početna tačka je a , a krajnja tačka je b . Sredina segmenta ili osa simetrije se dobije kao $\frac{a+b}{2}$. S obzirom da je u slučaju simetrične funkcije gustine vjerovatnoće $p(x)$ (vidjeti Primjer 2.1), η_X jednaka osi simetrije, slijedi da je $\eta_X = \frac{a+b}{2}$. Srednjekvadratna vrijednost je data sa:

$$\begin{aligned} E[X^2] = \sigma_X^2 &= \int_a^b x^2 p(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \end{aligned}$$

$$= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \quad (2.26)$$

Varijansa slučajne promjenljive koja dolazi iz uniformne raspodjele:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \sigma_X^2 - \eta_X^2 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Normalna raspodjela

Očekivana vrijednost se računa kao:

$$\begin{aligned} E[X] = \eta_X &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-a)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-a) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx}_{=0} + a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx}_{=1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$= a \quad (2.29)$$

Poznavajući osobinu funkcije gustine vjerovatnoće normalne raspodjele da je simetrična u odnosu na tačku $x = a$ i množenjem te funkcije sa pravcem oblika $(x - a)$ dobiva se neparna funkcija simetrična u odnosu na pravac $x = a$. Primjenjujući navedeno dolazi se do zaključka da je prvi integral iz relacije (2.28) jednak nuli.

Srednjekvadratna vrijednost se računa na sljedeći način.

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx \\ &= \left| x = t\sqrt{2}\sigma + a, \quad t = \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma}, \quad dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dx \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sqrt{2}\sigma t)^2 e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a^2 + 2\sqrt{2}a\sigma t + 2\sigma^2 t^2) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{I_1} + \frac{2\sqrt{2}a\sigma}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} dt}_{I_2} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt}_{I_3} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Iz izraza (2.30) integral I_2 je jednak nuli, jer je ovo integral proizvoda parne i neparne funkcije, što daje u konačnici integral neparne funkcije u simetričnim granicama, a on je

jednak nuli. Izraz (2.30) postaje:

$$E[X^2] = \sigma_X^2 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{I_1} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt}_{I_3} \quad (2.31)$$

Integral I_1 se može riješiti uz poznavanje:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx = 1 \quad (2.32)$$

Naime:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} dx = \left| x = t, a = 0, \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt \quad (2.33)$$

odnosno:

$$1 = \frac{I_1}{\sqrt{\pi}} \implies I_1 = \sqrt{\pi} \quad (2.34)$$

Integral I_3 iz izraza (2.31) se rješava primjenom parnosti podintegralne funkcije i parcijalne integracije.

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \left| \begin{array}{l} u = -\frac{1}{2}t, \quad dv = -2te^{-t^2} dt \\ du = -\frac{1}{2}dt, \quad v = e^{-t^2} \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{2}te^{-t^2} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \left(-\frac{1}{2}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Uvrštavajući izraze (2.34) i (2.35) u izraz (2.31) dobiva se:

$$E[X^2] = \sigma_X^2 = \frac{a^2}{\sqrt{\pi}} I_1 + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} I_3 = a^2 + \sigma^2 \quad (2.36)$$

Varijansa slučajne promjenljive iz normalne raspodjele se računa kao:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 - \eta_X^2 = \sigma^2 + a^2 - a^2 = \sigma^2 \quad (2.37)$$

Rayleigheva raspodjela

Očekivana vrijednost se može izračunati na sljedeći način.

$$\begin{aligned} E[X] &= \eta_X = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\eta}\right)^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \frac{x}{\eta^2}, \quad dv = xe^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\eta}\right)^2} dx \\ du = \frac{1}{\eta^2} dx, \quad v = -\eta^2 e^{-\frac{x^2}{2\eta^2}} \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{x}{\eta^2} (-\eta^2) e^{-\frac{x^2}{2\eta^2}} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\eta^2}} dx \quad (2.38)$$

Prvi član je jednak nuli dok je drugi član moguće odrediti i izračunati preko Gauss-ove (normalne) raspodjele, pa vrijedi:

$$E[X] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx = \left| \frac{x}{\eta} = t \right| = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{\eta}{2} \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \eta \quad (2.39)$$

Srednjekvadratna vrijednost se računa:

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \int_0^\infty x^2 \frac{x}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} u = -x^2, \quad dv = -\frac{x}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx \\ du = -2x dx, \quad v = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} \end{array} \right| \\ &= \underbrace{-x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2}}_{=0} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx \end{aligned} \quad (2.40)$$

Pošto je prvi član pri rješavanju parcijalne integracije jednak nuli nakon uvrštavanja granica, vrijedi:

$$E[X^2] = \int_0^\infty 2x e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx = 2\eta^2 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{\eta^2} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\eta})^2} dx}_{=1} = 2\eta^2 \quad (2.41)$$

Varijansa se računa korištenjem:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 - \eta_X^2 = 2\eta^2 - \frac{\pi}{2}\eta^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\eta^2 \quad (2.42)$$

Eksponencijalna raspodjela

Očekivana vrijednost se računa na sljedeći način:

$$E[X] = \eta_X = \int_0^{+\infty} ax e^{-ax} dx = a \int_0^{+\infty} x e^{-ax} dx \quad (2.43)$$

Izraz se rješava parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned} E[X] &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{-ax} dx \\ du = dx, \quad v = -\frac{e^{-ax}}{a} \end{array} \right| \\ &= a \left(-\frac{x e^{-ax}}{a} \Big|_0^\infty + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{a} dx \right) \\ &= a \left(-\frac{x e^{-ax}}{a} \Big|_0^\infty - \frac{e^{-ax}}{a^2} \Big|_0^\infty \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left(x e^{-ax} + \frac{e^{-ax}}{a} \right) \Big|_0^{\infty} \\
 &= \frac{1}{a}
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Srednjekvadratna vrijednost se računa kao:

$$E[X^2] = \sigma_X^2 = \int_0^{+\infty} ax^2 e^{-ax} dx = a \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx \tag{2.45}$$

Primjenom parcijalne integracije se dobiva:

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = e^{-ax} dx \\ du = 2x dx, \quad v = -\frac{e^{-ax}}{a} \end{array} \right| \\
 &= a \left(-\frac{x^2 e^{-ax}}{a} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2x e^{-ax}}{a} dx \right) \\
 &= a \left(-\frac{x^2 e^{-ax}}{a} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{a} \int_0^{\infty} x e^{-ax} dx \right) \\
 &= \frac{2}{a^2}
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Varijansa iznosi:

$$\sigma^2 = \sigma_X^2 - \eta_X^2 = \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2} \tag{2.47}$$

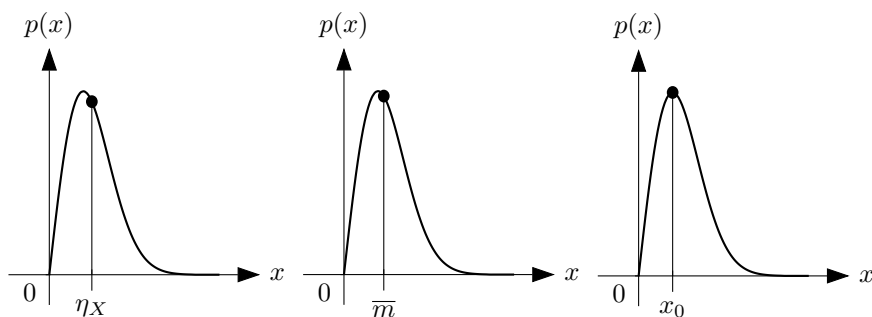
2.5.5 Medijana i najvjerovatnija vrijednost

Nedostatak “srednjih” vrijednosti je taj što izuzetno ovise od tzv. *outliera*, odnosno od vrijednosti koje imaju malu vjerovatnoću, ali imaju veliku vrijednost i nalaze se relativno daleko od “centralnih” vrijednosti. Jedan od načina prevazilaženja ovog problema je korištenje tzv. isječenih srednjih vrijednosti (eng. *trimmed mean*). Međutim bolji uvid u “tipične” vrijednosti slučajne promjenljive daje **medijana**. Medijana \bar{m} predstavlja vrijednost slučajne promjenljive za koju vrijedi da je:

$$\text{vjerovatnoća}(\{X \leq \bar{m}\}) = \text{vjerovatnoća}(\{X \geq \bar{m}\}) \tag{2.48}$$

odnosno, funkcija raspodjele vjerovatnoće ima vrijednost $P(\bar{m}) = 1/2$.

Vrijednost slučajne promjenljive za koju događaj ima najveću vjerovatnoću se naziva **najvjerovatnija vrijednost ili modalna tačka**. Na slici 2.11 je pokazana razlika između očekivane vrijednosti, medijane i modalne tačke na primjeru Rayleighove raspodjele.



Slika 2.11: Očekivana vrijednost, medijana i modalna tačka

2.6 Analiza slučajnih promjenljivih u Python okruženju

Primjer 2.3:

Za slučajnu varijablu generisanu korištenjem Rayleigheve raspodjele korištenjem simulacionog okruženja (npr. Python Jupyter) analizirati:

- slučajnu promjenljivu,
- očekivanu vrijednost,
- srednjekvadratnu vrijednost,
- varijansu,
- modalnu tačku, medijanu
- funkcije raspodjele vjerovatnoće i funkcije gustine vjerovatnoće.

Ponoviti postupak za ostale raspodjele (uniformna, normalna, eksponencijalna).

Python biblioteke kao što su *numpy* i *scipy* nude gotova rješenja za generiranje, analizu i obradu slučajnih promjenljivih. U nastavku će, uz rješavanje samog zadatka, biti ukratko objašnjena i Python sintaksa koja omogućava čitaocu implementacije i ostalih raspodjela.

Svi zadaci u knjizi se mogu rješavati izvornim Python bibliotekama i modulima. Da bi to bilo moguće, prvo je potrebno uključiti neke od važnijih biblioteka za analizu slučajnih promjenljivih. Nadalje, radi jednostavnosti pri korištenju, nazivi biblioteka koje će se koristiti su skraćeni. Npr. biblioteka *matplotlib.pyplot* omogućava crtanje i prikazivanje vektora u „MATLAB” stilu. Radi lakšeg korištenja u samom programu, preimenovanjem *matplotlib.pyplot* u *plt*, umjesto *matplotlib.pyplot.stem()* dovoljno je pisati *plt.stem()*, čime se povećava i preglednost koda.

PROGRAMSKI KOD 2.6

```
# Uključivanje često korištenih modula
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Uključivanje nekih rjeđe korištenih modula
from scipy.stats import norm
from matplotlib.pyplot import hist
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d

# Uključivanje modula koji prate knjigu
# "Slučajni signali i procesi"
import ssp
```

Međutim, kodovi i funkcije koje npr. podrazumijevaju izračunavanje i vizualizaciju određenih vrijednosti ili grafika, u suštini, koriste mnogo linija koda, i odvlače pažnju čitaoca pri razumijevanju koncepata predstavljenih u ovoj knjizi. U tu svrhu, implementiran je poseban Python modul *ssp*, koji je sastavni dio ove knjige i slobodan je za korištenje. Modul *ssp* se u fazi pisanja ove knjige sastoji od tri podmodula - *slprom1D* (za korištenje nad jednodimenzionalnim slučajnim promjenljivim), *slprom2D* (koji se koristi za parove slučajnih promjenljivih, odnosno dvodimenzionalne slučajne promjenljive), te *slproc* (koji se koristi za slučajne procese). Više detalja o *ssp* modulu se može naći na linku <https://github.com/esokic/ssp>. Jedan od primjera upotrebe je dat programskim kodom 2.7.

PROGRAMSKI KOD 2.7

```
# Uobičajeni Python kod:
plt.figure()
plt.plot(n, X, '.')
plt.title("Normalna raspodjela")
plt.xlabel("Realizacija")
plt.ylabel("")
plt.show()

# Korištenjem ssp modula:
ssp.slprom1D.realizacije(n, X,
                        naslov = "Normalna raspodjela")
```

Prednosti korištenja *ssp* modula leže u tome što smanjuju broj linija koda, te nerijetko imaju mnogo podrazumijevanih vrijednosti, kao što su pojedine labele na osama, načini formatiranja dijagrama i slično.

Vrijednosti slučajne promjenljive u okviru Python okruženja se sintetiziraju pomoću generatora slučajnih brojeva iz odgovarajuće raspodjele. Primjer generiranja slučajne promjenljive iz Rayleighove raspodjele sa $\eta = 5$ je dat u programskom kodu 2.8.

PROGRAMSKI KOD 2.8

```
# Generiranje slučajne promjenljive iz Rayleighove raspodjele

N = 100 # Broj generiranih realizacija
eta = 5 # Parametar raspodjele
```

```

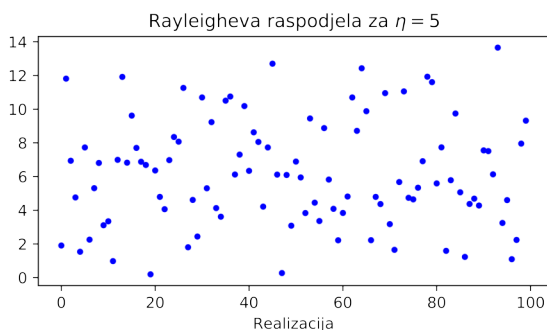
# Vektor od N realizacija slučajne promjenljive:
n = np.arange(N)
X = np.random.rayleigh(eta, N)

print("Nekoliko vrijednosti slučajne promjenljive X: ", end="")
for x in X[0:5]:
    print("{:.2f}".format(x), end=" ")

ssp.slprom1D.realizacije(n, X,
                          naslov = "Rayleigheva raspodjela za  $\eta=5$ ")

```

Nekoliko vrijednosti slučajne promjenljive X: 1.91 11.81 6.94 4.76 1.53



U nastavku su prikazane i nacrtane realizacije slučajne promjenljive iz Rayleighove raspodjele, kao i odstupanja promjenljive od očekivane vrijednosti, te kvadrati slučajne promjenljive (izvorne i centrirane).

PROGRAMSKI KOD 2.9

```

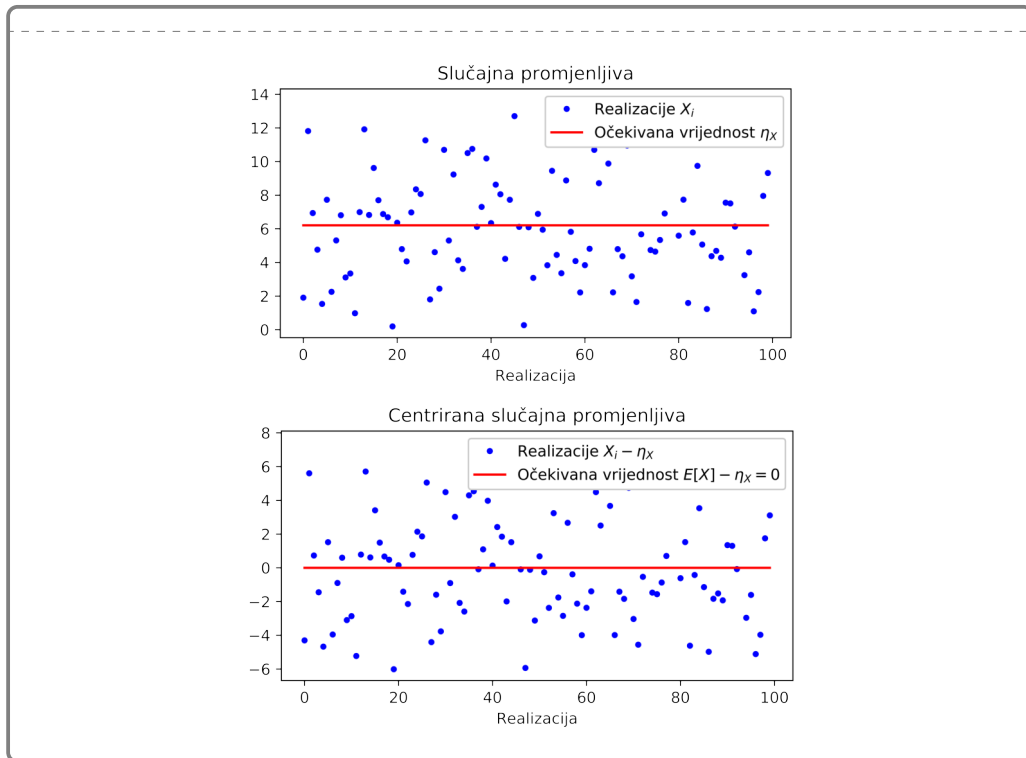
# Očekivana vrijednost slučajne promjenljive:
eta_X = np.mean(X)

#Vektor nad kojim se crta signal
n = np.arange(N)

ssp.slprom1D.realizacije(n, X, n, eta_X,
                          naslov = "Slučajna promjenljiva",
                          legenda = ['Realizacije  $X_i$ ',
                                      'Očekivana vrijednost  $\eta_X$ ']);

ssp.slprom1D.realizacije(n, X-eta_X, n, np.mean(X)-eta_X,
                          naslov = "Centrirana slučajna promjenljiva",
                          legenda = ['Realizacije  $X_i - \eta_X$ ',
                                      'Očekivana vrijednost  $E[X] - \eta_X = 0$ ']);

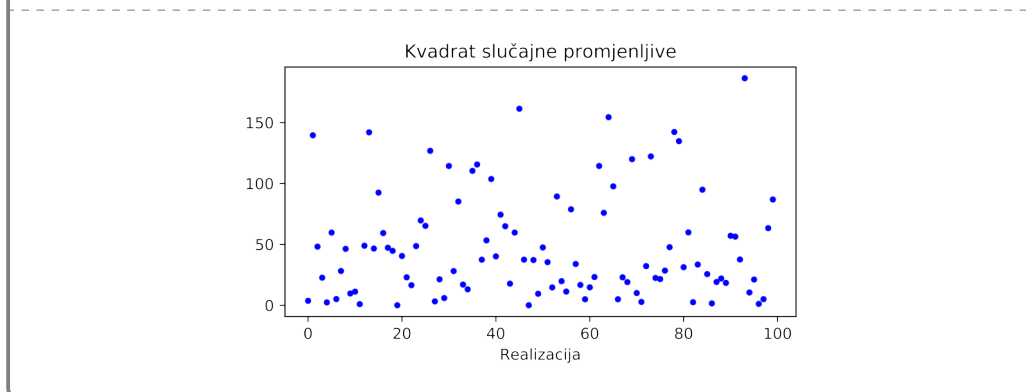
```

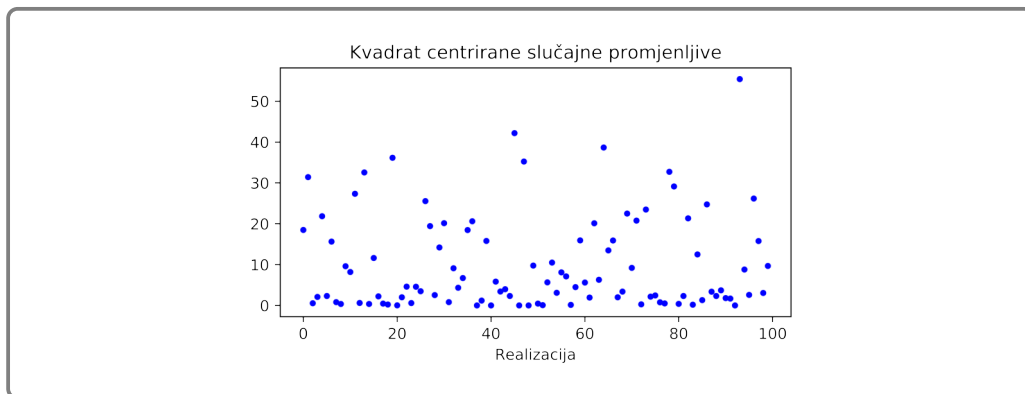



PROGRAMSKI KOD 2.10

```
ssp.slprom1D.realizacije(n, X**2,
                        naslov = "Kvadrat slučajne promjenljive")

ssp.slprom1D.realizacije(n, (X - eta_X)**2,
                        naslov = "Kvadrat centrirane slučajne promjenljive")
```





Korištenjem koda 2.11, moguće je generirati i slučajne promjenljive i iz drugih raspodjela.

PROGRAMSKI KOD 2.11

```
# Primjeri:

# Generiranje slučajne promjenljive iz uniformne raspodjele:
a = 0; b = 10; X = np.random.uniform(a,b, N)

# Generiranje slučajne promjenljive iz normalne (Gaussove) raspodjele:
a = 3; sigma = 0.1; X = np.random.normal(a,sigma, N)

# Generiranje slučajne promjenljive iz eksponencijalne raspodjele:
a = 4; X = np.random.exponential(a, N)

# Generiranje slučajne promjenljive iz Rayleigheve raspodjele:
eta = 5; N = 2000; X = np.random.rayleigh(eta, N)
```

Očekivana vrijednost za Rayleighovu raspodjelu se može izračunati kao srednju vrijednost svih realizacija, korištenjem gotove Python funkcije *mean*, ili korištenjem relacije (2.39).

PROGRAMSKI KOD 2.12

```
eta = 5; N = 2000; X = np.random.rayleigh(eta, N)

suma = 0.0;
for i in range(0, N):
    suma = suma + X[i]

print("Očekivana vrijednost (numerički, 1. način): {:.2f}".format(suma/N))
print("Očekivana vrijednost (numerički, 2. način): {:.2f}".format(np.mean(X)))
print("Očekivana vrijednost (analitički): {:.2f}".format(eta * np.sqrt(np.pi/2)))
```

```
Očekivana vrijednost (numerički, 1. način): 6.22
Očekivana vrijednost (numerički, 2. način): 6.22
Očekivana vrijednost (analitički): 6.27
```

Vidi se da se prva dva načina ne razlikuju, dok se rezultat dobiven relacijom (2.39) nešto razlikuje, zbog relativno malog broja realizacija *N*.

Analogno, srednjekvadratna vrijednost se može izračunati bilo srednjom vrijednošću kvadrata realizacija, bilo relacijom (2.41).

PROGRAMSKI KOD 2.13

```
print("Srednjekvadratna vrijednost (numerički): {:.2f}".format(np.mean(X*X)))
print("Srednjekvadratna vrijednost (analitički): {:.2f}".format(2*(eta**2)))
```

```
Srednjekvadratna vrijednost (numerički): 49.30
Srednjekvadratna vrijednost (analitički): 50.00
```

Varijansa se može izračunati korištenjem funkcija (bilo gotovih, bilo vlastitih) nad realizacijama, bilo korištenjem relacije (2.42) ukoliko je η poznato (programski kod 2.14).

PROGRAMSKI KOD 2.14

```
eta_X = np.mean(X)
sigma_X_2 = np.mean(X**2)

print("Varijansa (numerički, 1.način): {:.2f}".format(np.var(X)))
print("Varijansa (numerički, 2.način): {:.2f}".format(np.mean((X - eta_X)**2)))
print("Varijansa (numerički, 3.način): {:.2f}".format(sigma_X_2 - (eta_X**2)))
print("Varijansa (analitički): {:.2f}".format((2 - np.pi/2)*(eta**2)))
```

```
Varijansa (numerički, 1.način): 10.58
Varijansa (numerički, 2.način): 10.58
Varijansa (numerički, 3.način): 10.58
Varijansa (analitički): 10.73
```

Medijana se može izračunati gotovim funkcijama u okviru Python biblioteka, kao u programskom kodu 2.15.

PROGRAMSKI KOD 2.15

```
print("Medijana: {:.2f}".format(np.median(X)))
```

```
Medijana: 5.77
```

2.7 Zajedničke funkcije vjerovatnoće diskretnih slučajnih promjenljivih

Neka su ishodi jednog eksperimenta opisani slučajnim događajima A_i ($i = 1, \dots, n$), a ishodi drugog eksperimenta sa B_j ($j = 1, \dots, m$). Neka se svakom od tih događaja pridruže numeričke vrijednosti $V(A_i) = X_i$ i $V(B_j) = Y_j$. Vjerovatnoća da ishod prvog eksperimenta bude X_i a drugog Y_j se označava sa:

$$\text{vjerovatnoća}(X = X_i, Y = Y_j) = P_{X,Y}(X_i, Y_j) \quad (2.49)$$

Iz definicije vjerovatnoće date u sekciji 1.3, jasno je da mora vrijediti:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P_{X,Y}(X_i, Y_j) = 1 \quad (2.50)$$

U zavisnosti od odabranih eksperimenata, navedeni slučajni događaji mogu biti **međusobno zavisni ili nezavisni**. Npr. neka se iz skupa studenata nasumično bira jedan student. Neka je prvi eksperiment definiran kao „određivanje visine studenta”, a drugi eksperiment „određivanje dužine prezimena (broj slova u prezimenu)”. Ukoliko se u svrhu jednostavnosti pretpostavi da visina studenta može poprimiti samo cjelobrojne vrijednosti, tada se svakoj izmjerenoj visini može pridružiti jedan događaj, pa tako npr. $X_1 = 150[\text{cm}]$, $X_2 = 151[\text{cm}]$, ..., $X_{50} = 200[\text{cm}]$. Također, ishodi drugog eksperimenta se mogu opisati kao $Y_1 = 2[\text{slova}]$, $Y_2 = 3[\text{slova}]$, ... $Y_{22} = 23[\text{slova}]$. U skladu s tim, vrijednost $P_{X,Y}(X = 170[\text{cm}], Y = 7[\text{slova}]) = P(X_{21}, Y_6)$ predstavlja vjerovatnoću da je proizvoljno odabran student visok 170 [cm] i da se njegovo prezime sastoji od 7 [slova]. Očigledno je i intuitivno jasno da su ova dva događaja (ili bolje reći, slučajne promjenljive koje ih predstavljaju) međusobno nezavisna, jer visina studenta nema nikakve veze sa njegovim prezimenom. Međutim, ukoliko bi se umjesto dužine prezimena, analizirala težina (masa) studenta, tada bi se evidentno pojavila neka zavisnost između visine i težine, jer je vjerovatnije da su studenti koji su „teži” obično i nešto „viši”.

Primjer 2.4:

Na stolu se nalaze dvije crne i jedna bijela kutija, a pored njih pet crnih i pet bijelih kuglica.

1. Ukoliko se (bez gledanja) sa stola uzme jedna kutija i jedna kuglica, kolika je vjerovatnoća da je uzeta bijela kutija i crna kuglica?
2. Ukoliko se sve bijele kuglice stave u bijelu kutiju, a crne kuglice stave u jednu od crnih kutija, kolika je vjerovatnoća da se uzimanjem jedne kutije uzme bijela kutija i crna kuglica?

Rješenje:

1. U prvom slučaju se radi o nezavisnim događajima pa je:

$$\begin{aligned} P(\text{bijela kutija, crna kuglica}) &= P(\text{bijela kutija})P(\text{crna kuglica}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{10} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

2. U drugom slučaju se radi o zavisnim događajima pa je:

$$\begin{aligned} P(\text{bijela kutija, crna kuglica}) &= P(\text{bijela kutija})P(\text{crna kuglica u bijeloj kutiji}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Iz prethodnog primjera je jasno da se u zavisnosti od tipa eksperimenta i analiziranih događaja, vjerovatnoća zajedničkog događaja može računati na različite načine. Ako su događaji nezavisni tada vrijedi:

$$P_{X,Y}(X_i, Y_j) = P_X(X_i)P_Y(Y_j) \quad (2.51)$$

a ukoliko su događaji zavisni tada vrijedi (Bayesova teorema):

$$P_{X,Y}(X_i, Y_j) = P_{X|Y}(X_i|Y_j)P_Y(Y_j) = P_{Y|X}(Y_j|X_i)P_X(X_i) \quad (2.52)$$

Primjer 2.5:

Neki komunikacioni kanal veze prenosi digitalne vrijednosti, logičku nulu odnosno jedinicu $\{\text{log. } 0, \text{log. } 1\}$. Neka je predajna strana komunikacionog kanala označena sa X , a prijemna sa Y . Predajnik generira logičke vrijednosti 0 i 1, ali na način da je vjerovatnoća generiranja log. 0 data sa 70%, a log. 1 sa 30%. S druge strane, komunikacioni kanal unosi šumove i grešku u prenosu, tako da je vjerovatnoća da će se log. 1 prenijeti kao log. 0 data sa 10%, a vjerovatnoća da će se log. 0 prenijeti kao log. 1 data sa 30%. Odrediti vjerovatnoću pojave log. 1 i log. 0 na prijemnoj strani.

Rješenje:

U zadatku je definirano:

- $P_X(1) = 0.3 = p$
- $P_X(0) = 0.7 = 1 - p = \bar{p}$

Također:

- $P_{Y|X}(1|0) = 0.3 = r$
- $P_{Y|X}(0|0) = 0.7 = 1 - r = \bar{r}$
- $P_{Y|X}(0|1) = 0.1 = q$
- $P_{Y|X}(1|1) = 0.9 = 1 - q = \bar{q}$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} P_Y(1) &= P_{Y|X}(1|0)P_X(0) + P_{Y|X}(1|1)P_X(1) \\ &= r\bar{p} + \bar{q}p = 0.3 \cdot 0.7 + 0.9 \cdot 0.3 \\ &= 0.48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_Y(0) &= P_{Y|X}(0|0)P_X(0) + P_{Y|X}(0|1)P_X(1) \\ &= \bar{r}\bar{p} + qp = 0.7 \cdot 0.7 + 0.1 \cdot 0.3 \\ &= 0.52 \end{aligned}$$

Također, ukoliko se analiziraju vjerovatnoće pojavljivanja zajedničkih događaja:

- $P_{X,Y}(0,0) = P_X(0)P_{Y|X}(0|0) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$ (tačan prenos)
- $P_{X,Y}(1,1) = P_X(1)P_{Y|X}(1|1) = 0.3 \cdot 0.9 = 0.27$ (tačan prenos)
- $P_{X,Y}(0,1) = P_X(0)P_{Y|X}(1|0) = 0.7 \cdot 0.3 = 0.21$ (netačan prenos)
- $P_{X,Y}(1,0) = P_X(1)P_{Y|X}(0|1) = 0.3 \cdot 0.1 = 0.03$ (netačan prenos)

Odavde se može i zaključiti da će vjerovatnoća pogrešnog prenosa biti 24%, što praktično predstavlja reprezentaciju pogrešnog prenosa od 10% i 30% datu u zadatku, ali uzimajući u obzir nejednaku vjerovatnoću pojavljivanja log. 0 i log. 1.

2.8 Zajedničke funkcije vjerovatnoće kontinualnih slučajnih promjenljivih

U prethodnoj sekciji su na intuitivan način uvedene zajedničke i uslovne funkcije vjerovatnoće za diskretne slučajne promjenljive. Međutim, za dalja razmatranja u okviru ovog kursa biti će od interesa uvesti ove funkcije za kontinualne slučajne promjenljive. U skladu s tim, slijedeći metodologiju uvođenja funkcija vjerovatnoće za jednodimenzionalnu slučajnu promjenljivu X iz prethodnog poglavlja, moguće je uvesti funkciju raspodjele vjerovatnoće za zajedničke događaje opisane sa dvije slučajne promjenljive X i Y , tzv. **zajedničku funkciju raspodjele vjerovatnoće** (eng. *joint probability distribution function*):

$$P_{X,Y}(x,y) = \text{vjerovatnoća da } (X \leq x, Y \leq y). \quad (2.53)$$

Za ovu funkciju važi:

- $P_{X,Y}(-\infty, y) = P_{X,Y}(x, -\infty) = P_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$,
- $P_{X,Y}(x, y)$ je neopadajuća po x i y osi,
- $P_{X,Y}(+\infty, +\infty) = 1$.

Nadalje, definiiraju se i tzv. **marginalne funkcije raspodjele vjerovatnoće** na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P_X(x) &= P_{X,Y}(x, +\infty) \\ &= \text{vjerovatnoća da } (X \leq x, Y \leq +\infty) \\ &= \text{vjerovatnoća da } (X \leq x) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} P_Y(y) &= P_{X,Y}(+\infty, y) \\ &= \text{vjerovatnoća da } (X \leq +\infty, Y \leq y) \\ &= \text{vjerovatnoća da } (Y \leq y) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Analogno funkciji gustine vjerovatnoće za jednodimenzionalne slučajne promjenljive, moguće je definirati i **zajedničku funkciju gustine vjerovatnoće**:

$$p_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 P_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.56)$$

pri čemu vrijedi:

- $p_{X,Y}(x, y) \geq 0, \forall(x, y)$,
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$,
- $P_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{X,Y}(u, v) du dv = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x p_{X,Y}(x, y) dx dy$,
- vjerovatnoća da $(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_{X,Y}(u, v) du dv$.

Nadalje, uvode se **marginalne gustine vjerovatnoće** slučajne promjenljive kao:

- $p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, v) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dy$,
- $p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u, y) du = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx$.

Jasno je da vrijedi:

$$\begin{aligned} P_{X,Y}(x, +\infty) = P_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x p_{X,Y}(u, v) du dv = \\ &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(u, v) dv \right] du \\ &= \int_{-\infty}^x p_X(u) du \end{aligned} \quad (2.57)$$

što zapravo znači da vrijedi:

$$p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx} \quad (2.58)$$

odnosno:

$$p_Y(y) = \frac{dP_Y(y)}{dy} \quad (2.59)$$

Primjer 2.6:

Neka su date slučajne promjenljive X i Y na oblasti $D = \{(X, Y) | 1 \leq X \leq 3 \text{ i } 0 \leq Y \leq 4\}$. Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće ovih promjenljivih je data sa $p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{8}$ na oblasti D , a $p_{X,Y}(x, y) = 0$ van te oblasti. Odrediti:

- zajedničku funkciju raspodjele vjerovatnoće $P_{X,Y}(x, y)$,
- marginalnu funkciju raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$,

- marginalnu funkciju raspodjele vjerovatnoće $P_Y(y)$,
- marginalnu funkciju gustine vjerovatnoće $p_X(x)$,
- marginalnu funkciju gustine vjerovatnoće $p_Y(y)$.

Rješenje:

a) Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x, y)$:

1. $x < 1 \vee y < 0$

$$P_{X,Y}(x, y) = 0$$

2. $(x, y) \in D$

$$\begin{aligned} P_{X,Y}(x, y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(u, v) \, du \, dv = \int_1^x \int_0^y \frac{1}{8} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{8} \int_1^x \left(\int_0^y \, dv \right) \, du = \frac{1}{8} \int_1^x y \, du \\ &= \frac{(x-1)y}{8} \end{aligned}$$

3. $x > 3 \wedge 0 \leq y \leq 4$

$$P_{X,Y}(x, y) = \int_0^y \left(\int_1^3 \frac{1}{8} \, du \right) \, dv = \frac{1}{4} \int_0^y \, dv = \frac{y}{4}$$

4. $1 \leq x \leq 3 \wedge y > 4$

$$P_{X,Y}(x, y) = \int_1^x \left(\int_0^4 \frac{1}{8} \, dv \right) \, du = \frac{1}{2} \int_1^x \, du = \frac{x-1}{2}$$

5. $x > 3 \wedge y > 4$

$$P_{X,Y}(x, y) = \int_1^3 \int_0^4 \frac{1}{8} \, du \, dv = 1$$

Objedinjavanjem prethodnih rezultata se dobiva:

$$P_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \vee y < 0 \\ \frac{(x-1)y}{8}, & 1 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq 4 \\ \frac{y}{4}, & x > 3 \wedge 0 \leq y \leq 4 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \wedge y > 4 \\ 1, & x > 3 \wedge y > 4 \end{cases}$$

b) Marginalna funkcija raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(u,v) dv \right)}_{p_X(u)} du$$

Razlikuje se nekoliko slučajeva:

- za $x < 1$ vrijedi $p_{X,Y}(x,y) = 0$ pa je:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} 0 dv \right) du = 0$$

- za $1 \leq x < 3$ je $p_{X,Y}(x,y) = p_{X,Y}(x,v)$ za $(v \in (-\infty, +\infty))$, pa je:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_0^4 p_{X,Y}(u,v) dv \right) du = \int_1^x \left(\int_0^4 \frac{1}{8} dv \right) du = \frac{1}{2}(x-1)$$

- za $3 \leq x$ vrijedi:

$$P_X(x) = \int_1^3 \left(\int_0^4 p_{X,Y}(u,v) dv \right) du = 1$$

Shodno tome, rezultat je:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

c) Marginalna funkcija raspodjele vjerovatnoće $P_Y(y)$:

$$P_Y(y) = \int_{-\infty}^y \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} p_{X,Y}(u,v) du \right)}_{p_Y(v)} dv$$

Rezonujući kao u slučaju pod b) dobiva se:

$$P_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{4}, & 0 \leq y \leq 4 \\ 1, & y > 4 \end{cases}$$

d) Marginalna funkcija gustine vjerovatnoće $p_X(x)$:

$$p_X(x) = \frac{dP_X(x)}{dx}$$

Primjenom ove relacije na svaki od karakterističnih intervala se dobija:

$$p_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

e) Marginalna funkcija gustine vjerovatnoće $p_Y(y)$:

$$p_Y(y) = \frac{dP_Y(y)}{dy}$$

Primjenom ove relacije na svaki od karakterističnih intervala se dobija:

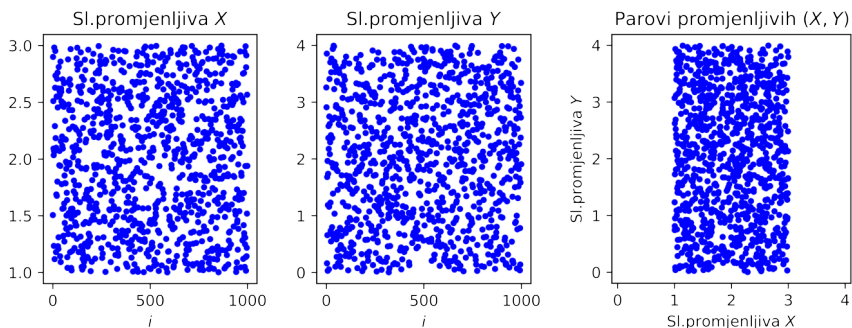
$$p_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq y \leq 4 \\ 0, & y > 4 \end{cases}$$

U nastavku je ilustrovano rješenje zadatka korištenjem Python baziranog razvojnog okruženja.

PROGRAMSKI KOD 2.16

```
N = 1000
X = np.random.uniform(1, 3, N)
Y = np.random.uniform(0, 4, N)

ssp.slprom2D.realizacije(X,Y)
```

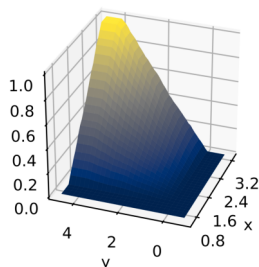


PROGRAMSKI KOD 2.17

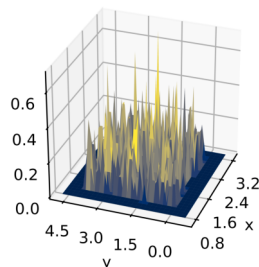
```
x, y, Pxy = ssp.slprom2D.PDF(X,Y, step = 0.1)
x_ , y_ , pxy = ssp.slprom2D.pdf(X,Y, step = 0.1)
```

2. Slučajna promjenljiva. Modeli raspodjele vjerovatnoće. Očekivane vrijednosti.

Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x,y)$



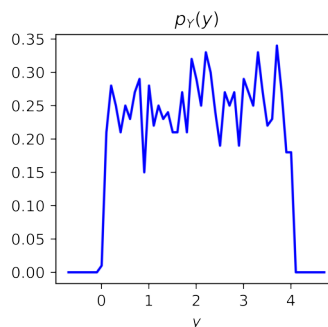
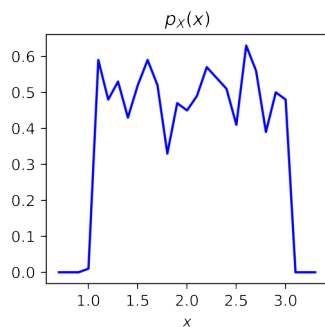
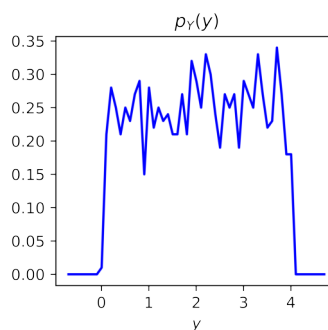
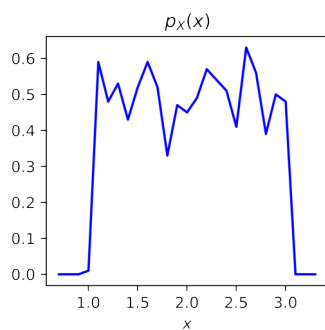
Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće $p(x,y)$



PROGRAMSKI KOD 2.18

```
# Računanje marginalnih funkcija gustine vjerovatnoće iz parova (X,Y):  
ssp.slprom2D.pdf_marg(X,Y);
```

```
# Računanje marginalnih funkcija gustine vjerovatnoće na osnovu p(x,y):  
ssp.slprom2D.pdf_marg(x = x_ , y = y_ , p_xy = pxy);
```



Primjer 2.7:

Neka su date slučajne promjenljive X i Y slučajno raspoređene na krugu:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odrediti:

- konstantu $c \in \mathbf{R}$,
- marginalnu funkciju gustine vjerovatnoće $p_X(x)$,
- marginalnu funkciju gustine vjerovatnoće $p_Y(y)$,
- zajedničku funkciju raspodjele vjerovatnoće $P_{X,Y}(x, y)$.

Rješenje:

Da bi se odredila konstanta c najjednostavnije je izračunati visinu tijela koje za bazu ima krug $x^2 + y^2 = 1$, a zapremina mu je 1 (zbog uslova $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$).

$$P_{baze} = r^2 \pi = \pi$$

$$V = c \cdot P_{baze} \implies c = \frac{1}{\pi}$$

Marginalne funkcije gustine vjerovatnoće se računaju kao:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, v) dv \tag{2.60}$$

Za tačke na zadanoj oblasti $(x, y) \in D$, moguće je ograničiti vrijednost y :

$$-\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \tag{2.61}$$

Izraz (2.61) se može iskoristiti za promjenu granica integracije u relaciji (2.60):

$$p_X(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dv$$

$$p_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} \quad (-1 < x < 1)$$

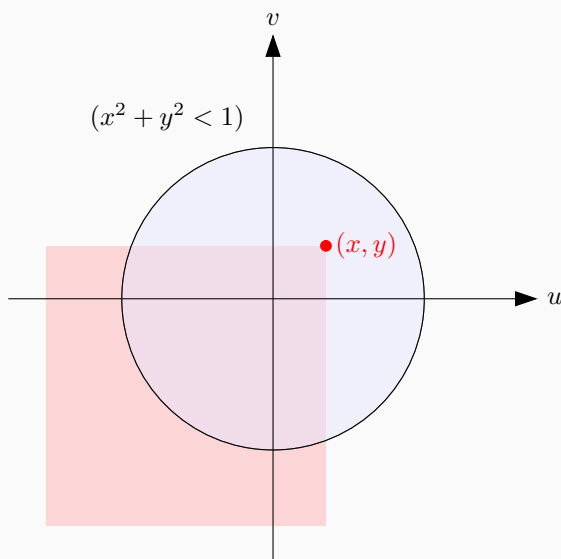
Zbog simetrije vrijedi:

$$p_Y(y) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} \quad (-1 < y < 1)$$

Za $x \leq -1$, $x \geq 1$, $y \leq -1$ ili $y \geq 1$ marginalne funkcije su jednake nuli $p_X(x) = p_Y(y) = 0$. Jasno je da zbog $p_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\pi} \neq p_x(x)p_y(y) = \frac{4}{\pi^2} \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ varijable x i y nisu nezavisne, ali kao što će se vidjeti kasnije, ipak su nekorelirane.

Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće se računa pomoću:

$$P_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_{X,Y}(u,v) du dv$$



Posmatrajući oblast integracije, jasno je da izračunavanje $P_{X,Y}(x,y)$ ovisi od položaja (x,y) u odnosu na jediničnu kružnicu, jer se granice integracije mijenjaju. Čitaocu se ostavlja da analitički riješi ovaj zadatak. Grafička reprezentacija rješenja je data programskim kodovima 2.19 - 2.21. Jasno se vidi sa dijagrama da marginalne funkcije raspodjele i gusline vjerovatnoće pojedinih slučajnih promjenljivih (programski kod 2.21) više ne prate uniformne raspodjele iz kojih su generirane, zbog uslova da parovi (X,Y) moraju ležati unutar jediničnog kruga.

PROGRAMSKI KOD 2.19

```
N = 5000
step = 0.1

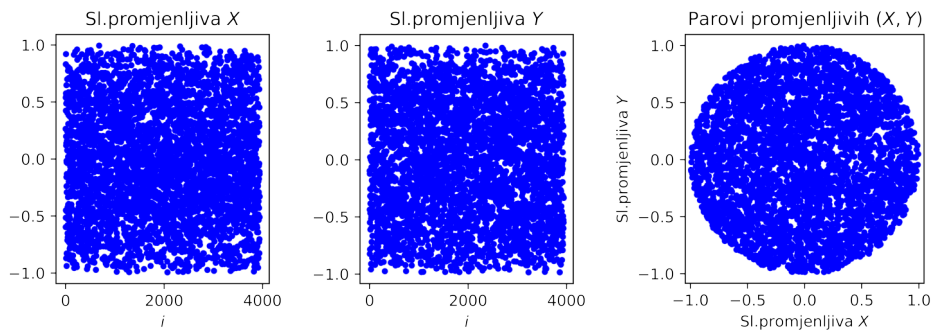
X_init = np.random.uniform(-1, 1, N)
Y_init = np.random.uniform(-1, 1, N)

X = []; Y = [];

for i in range(N):
    if ((X_init[i])**2+(Y_init[i])**2<=1):
        X.append(X_init[i])
        Y.append(Y_init[i])

X = np.array(X)
Y = np.array(Y)
```

`ssp.slprom2D.realizacije(X,Y)`

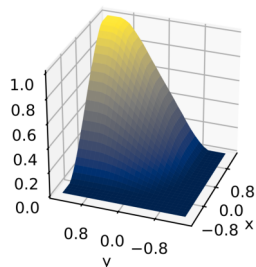


PROGRAMSKI KOD 2.20

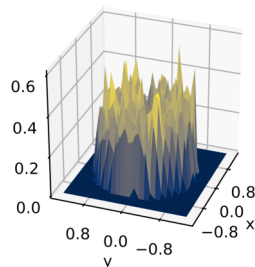
```
# Određivanje funkcije raspodjele vjerovatnoće:
x, y, Pxy = ssp.slprom2D.PDF(X, Y)

# Određivanje funkcije gustine vjerovatnoće:
x_, y_ , pxy = ssp.slprom2D.pdf(X, Y);
```

Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x,y)$



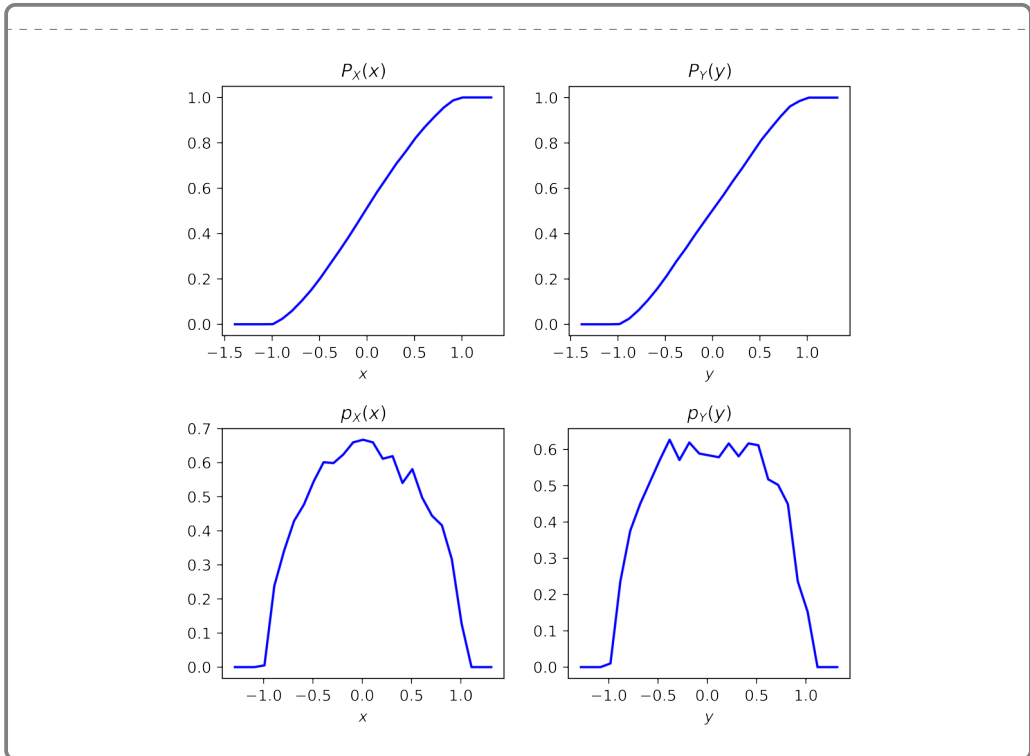
Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće $p(x,y)$



PROGRAMSKI KOD 2.21

```
# Određivanje marginalne PDF iz zajedničke PDF
ssp.slprom2D.PDF_marg(x = x, y = y, P_xy = Pxy);

# Računanje marginalnih funkcija gustine vjerovatnoće na osnovu p(x,y):
ssp.slprom2D.pdf_marg(x = x_ , y = y_ , p_xy = pxy);
```



2.9 Uslovna vjerovatnoća

Uslovna vjerovatnoća za slučaj diskretne slučajne promjenljive je empirijski uvedena u prethodnom poglavlju. U ovoj sekciji će se opisani koncept proširiti na vezu između slučajne varijable i slučajnog događaja (ili neke druge slučajne varijable) u kontekstu funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće. Npr. ako se želi odrediti distribucija ocjena među studentima uzimajući u obzir neku drugu slučajnu varijablu (kao što je recimo broj sati koje je student proveo spremajući ispit) neophodno je raditi sa tzv. uslovnim vjerovatnoćama. Drugi ilustrativan primjer je određivanje gustine raspodjele vjerovatnoće vanjske temperature ukoliko je poznato da je vlažnost zraka manja od 50%.

Funkcija raspodjele uslovne vjerovatnoće slučajne promjenljive X , uslovljena događajem A predstavlja:

$$P_{X|A}(x) = \text{vjerovatnoća da } (X \leq x|A) = \frac{\text{vjerovatnoća da } (X \leq x, A)}{\text{vjerovatnoća da } (A)} \quad (2.62)$$

Ovaj koncept se može jednostavno proširiti na raspodjelu uslovne vjerovatnoće između dvije slučajne promjenljive X i Y :

$$\text{vjerovatnoća da } (X \leq x|Y \leq y) = \frac{\text{vjerovatnoća da } (X \leq x, Y \leq y)}{\text{vjerovatnoća da } (Y \leq y)} \quad (2.63)$$

pa se **funkcija raspodjele uslovne vjerovatnoće** definira kao:

$$P_{X|Y}(x|y) = \frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)} \quad (2.64)$$

Funkcija gustine uslovne vjerovatnoće se definira kao:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} \quad (2.65)$$

Primjer 2.8:

Neka je slučajna promjenljiva X data kao slučajna promjenljiva uniformno raspoređena na segmentu $[0, 1]$. Odrediti funkciju raspodjele uslovne vjerovatnoće za slučajnu promjenljivu ako je događaj A definiran kao $A = \{X < 1/2\}$

Rješenje:

Ova funkcija se može analizirati u tri intervala:

- $x < 0$

$$P_{X|\{X < 1/2\}}(x) = \frac{\text{vj}(X \leq x, X < 1/2)}{\text{vj}(X < 1/2)} = 0$$

- $0 \leq x \leq 1/2$

$$P_{X|\{X < 1/2\}}(x) = \frac{\text{vj}(X \leq x, X < 1/2)}{\text{vj}(X < 1/2)} = \frac{x}{1/2} = 2x$$

- $x > 1/2$

$$P_{X|\{X < 1/2\}}(x) = \frac{\text{vj}(X \leq x, X < 1/2)}{\text{vj}(X < 1/2)} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

PROGRAMSKI KOD 2.22

```
N = 5000 #Broj realizacija

X = np.random.uniform(0, 1, N) #Slučajna promjenljiva iz uniformne raspodjele
X_ako_A = []                    #Vektor za smještanje slučajnih promjenjivih
                                #iz uslovne vjerovatnoće

for i in range(len(X)):        #Glavna petlja
    if (X[i] < 0.5):
        X_ako_A.append(X[i])

X_ako_A = np.array(X_ako_A)

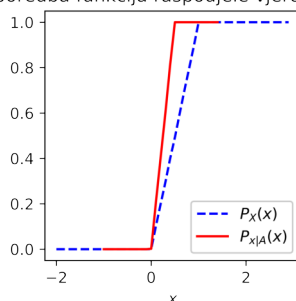
# Proracun raspodjela vjerovatnoce
x, Px = ssp.slprom1D.PDF(X,
                          prosirenje_opsega = 2.0,
                          prikaz = False)
```



```
x_ako_A, Px_ako_A = ssp.slprom1D.PDF(X_ako_A,
                                     prosirenje_opsega = 2.0,
                                     prikaz = False)

# Usporedba raspodjela
ssp.slprom1D.grafik(x, Px, x_ako_A, Px_ako_A,
                   naslov = "Usporedba funkcija raspodjele vjerovatnoće",
                   legenda = ['$P_X(x)$', '$P_{X|A}(x)$'],
                   lokacija_lgd = 'lower right', x_labela = '$x$', still = 'b--')
```

Usporedba funkcija raspodjele vjerovatnoće

**Primjer 2.9:**

Par slučajnih promjenljivih ima zajedničku funkciju gustine vjerovatnoće datu sa:

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{2abc}{(ax + by + c)^3} u(x)u(y)$$

za neke pozitivne konstante a , b i c . Odrediti $p_{X|Y}(x|y)$ i $p_{Y|X}(y|x)$.

Rješenje:

Marginalne funkcije gustine vjerovatnoće se određuju kao:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{2abc}{(ax + by + c)^3} u(x)dy = \frac{ac}{(ax + c)^2} u(x)$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2abc}{(ax + by + c)^3} u(y)dx = \frac{bc}{(by + c)^2} u(y)$$

Funkcije raspodjele uslovne vjerovatnoće su:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{\frac{2abc}{(ax+by+c)^3} u(x)u(y)}{\frac{bc}{(by+c)^2} u(y)} = \frac{2a(by+c)^2}{(ax+by+c)^3} u(x)$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{\frac{2abc}{(ax+by+c)^3} u(x)u(y)}{\frac{ac}{(ax+c)^2} u(x)} = \frac{2b(ax+c)^2}{(ax+by+c)^3} u(y)$$

2.10 Crtanje i analiza jednodimenzionalnih funkcija vjerovatnoće korištenjem Pythona

U nastavku će biti pokazani neki od načina formiranja i crtanja funkcija gustine i raspodjele vjerovatnoće za jednu ili više promjenljivih.

Pristup 1 - korištenje histograma

Jedan od intuitivnijih načina za vizualizaciju oblika funkcije gustine vjerovatnoće je raspoređivanje realizacija slučajne promjenljive X u okviru histograma. Jednostavnim post-procesiranjem moguće je izdvojiti i obvojnica histograma za dalje korištenje.

PROGRAMSKI KOD 2.23

```
# PRISTUP 1 - korištenje histograma
N = 10000
broj_binova = 50

# Vektor od N realizacija slučajne promjenljive:
eta = 5; X = np.random.rayleigh(eta,N)

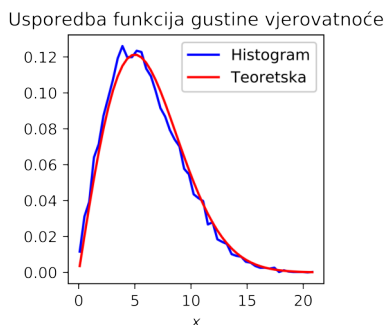
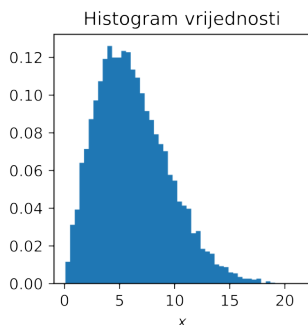
# Razvrstavanje realizacija u histograme
plt.figure(figsize=(3, 3))
pdf_hist = hist(X, bins = broj_binova, density = True);
plt.title("Histogram vrijednosti"); plt.xlabel('$x$')

# Zatim se iz histograma izdvaja obvojnica
pdf_x = []
for i in range(len(pdf_hist[2])):
    pdf_x.append(pdf_hist[2][i].get_height());

X_bin = pdf_hist[1][0:broj_binova];

def rayleigh(x):
    y = (x/eta**2)*np.exp(-0.5*(x/eta)**2)
    return y

ssp.slprom1D.grafik(X_bin, pdf_x, X_bin, rayleigh(X_bin),
    x_labela = '$x$',
    naslov = "Usporedba funkcija gustine vjerovatnoće",
    legenda = ['Histogram', 'Teoretska'])
```



Ovaj pristup daje dovoljno dobar rezultat za veliki broj uzoraka i za povoljno odabran broj binova histograma, u protivnom dobivena funkcija nije dovoljno glatka.

Nadalje, moguće je numeričkom integracijom odrediti i funkciju raspodjele vjerovatnoće prema sljedećem obrascu:

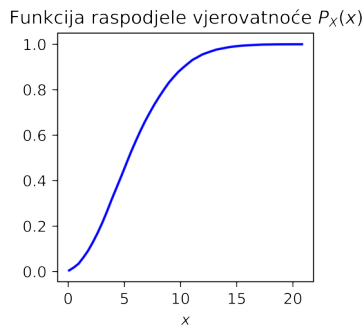
$$P_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(x) dx \approx \sum p(k\Delta x)\Delta x \quad (2.66)$$

Realizacija je data programskim kodom 2.24.

PROGRAMSKI KOD 2.24

```
# PRISTUP 1 - korištenje histograma
Delta_X = X_bin[1]-X_bin[0]
PDF_X = Delta_X * np.cumsum(pdf_x)

ssp.slprom1D.grafik(X_bin, PDF_X,
                   naslov = "Funkcija raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$",
                   x_labela = "$x$")
```



Pristup 2 - korištenje definicione relacije

Drugi način za određivanje funkcije raspodjele je korištenje definicione relacije:

$$P_X(x) = \text{vjerovatnoća}(X \leq x) \approx \frac{\text{broj realizacija } (X \leq x)}{\text{ukupan broj realizacija}} \quad (2.67)$$

To znači da je za svako x iz domena na kojem se određuje funkcija potrebno „prebrojati” broj realizacija $X \leq x$. To se može jednostavno odrediti i „sumiranjem” jedinica u izrazu $U(x - X)$ (gdje $U(\cdot)$ označava Heavisideovu step-odskočnu funkciju). Realizacija je pokazana u programskom kodu 2.25.

Funkcija gustine vjerovatnoće se računa numeričkim diferenciranjem funkcije raspodjele vjerovatnoće. Važno je uočiti da je dobivena funkcija jako zašumljena zbog diferenciranja, te da vektor diferencija ima jedan element manje od polaznog vektora (programski kod 2.26).

PROGRAMSKI KOD 2.25

```

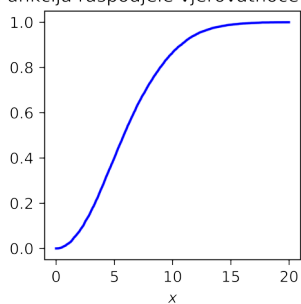
# PRISTUP 2 - korištenje definicionog izraza
step = 0.01; x_min = 0; x_max = 20
x = np.arange(x_min, x_max, step)

P_x = np.zeros((len(x)))

for i in range(len(x)):
    P_x[i] = sum(np.heaviside(x[i]-X, 1))/N

ssp.slprom1D.grafik(x, P_x,
    naslov = "Funkcija raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$",
    x_labela = "$x$")

```

Funkcija raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$ 

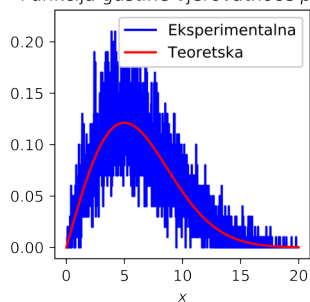
PROGRAMSKI KOD 2.26

```

# PRISTUP 2 - korištenje definicionog izraza
pdf_x = np.diff(P_x)/step

ssp.slprom1D.grafik(x[1:], pdf_x,
    x, (x/(eta**2))*(np.exp(-x**2/(2*eta**2))),
    naslov = "Funkcija gustine vjerovatnoće $p_X(x)$",
    legenda = ['Eksperimentalna', 'Teoretska'],
    x_labela = "$x$")

```

Funkcija gustine vjerovatnoće $p_X(x)$ 

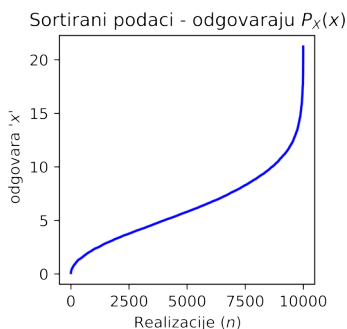
Pristup 3 - korištenjem sortiranja realizacija

Ovaj pristup je zapravo je veoma sličan prvom pristupu, odnosno baziran je na formiranju histograma, ali ima i svoje fizikalno značenje. Ukoliko se sve realizacije vektora sortiraju, uočava se da se zbog prirode formiranja ovog dijagrama, funkcija raspodjele vjerovatnoće za veliki broj realizacija zapravo dobiva transponovanjem navedenog grafika, te skaliranjem broja realizacija sa brojem uzoraka N . Radi dalje upotrebe funkcije raspodjele vjerovatnoće, funkcija se interpolira na vektoru x , kojeg je korisnik već definirao. Implementacija je data kodovima 2.27-2.28.

PROGRAMSKI KOD 2.27

```
# PRISTUP 3 - korištenje sortiranja
sort_X = np.sort(X)
realizacije = np.arange(len(X))

ssp.slprom1D.grafik(realizacije, sort_X,
                    naslov = "Sortirani podaci - odgovaraju  $P_X(x)$ ",
                    x_labela = "Realizacije ( $n$ )",
                    y_labela = "odgovara ' $x$ '")
```



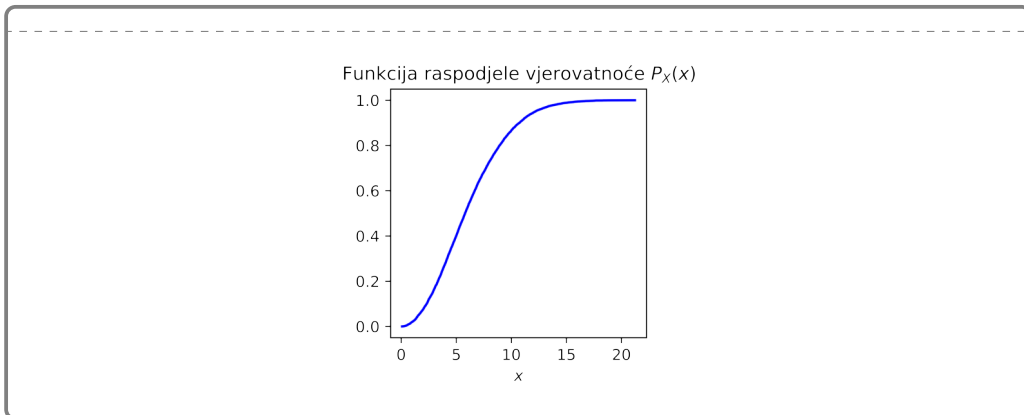
PROGRAMSKI KOD 2.28

```
# PRISTUP 3 - korištenje sortiranja
from scipy import interpolate
f = interpolate.interpld(sort_X, realizacije/len(X))

step = 0.01; x_min = min(X); x_max = max(X)
x = np.arange(x_min, x_max, step)

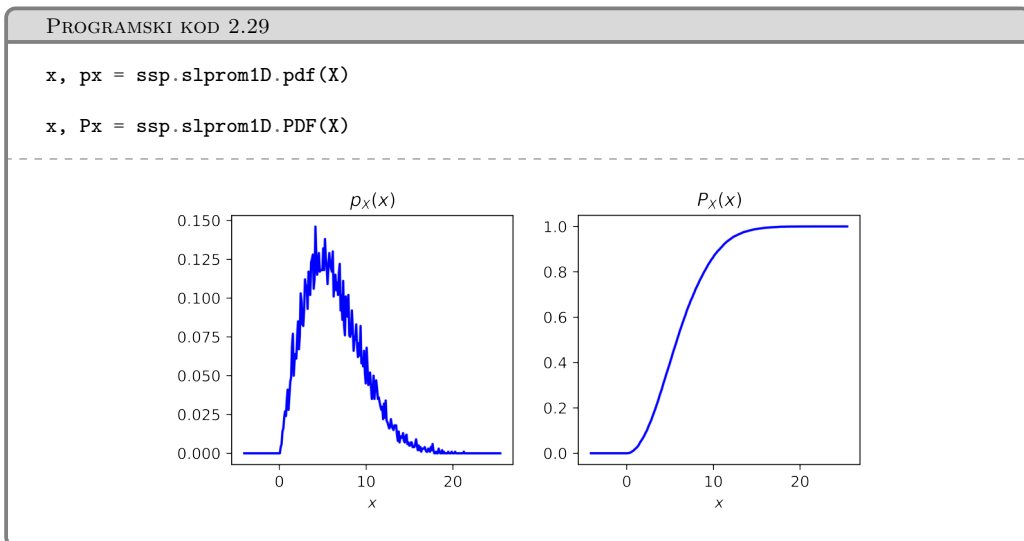
P_x = f(x) # interpolacija u novom vektoru

ssp.slprom1D.grafik(x, P_x,
                    naslov = "Funkcija raspodjele vjerovatnoće  $P_X(x)$ ",
                    x_labela = " $x$ ")
```



Pristup 4 - korištenjem ssp biblioteke

Korištenjem gotovog *ssp* modula, crtanje i određivanje jednodimenzionalnih funkcija raspodjele i gustine vjerovatnoće se može obaviti kodom 2.29.



2.11 Crtanje i analiza dvodimenzionalnih funkcija vjerovatnoće korištenjem Pythona

Obzirom da su sada funkcije raspodjele i gustine vjerovatnoće zapravo funkcije dvije promjenljive, tada se vizualizacija funkcija mora obaviti u trodimenzionalnom prostoru. Prije nego se pređe na objašnjavanje načina izračunavanja funkcija vjerovatnoće, bit će ukratko opisan način samog crtanja funkcija u Python okruženju.

U prvom koraku je neophodno unaprijed definirati funkciju $p(x, y)$ koja se želi vizualizirati, bilo u analitičkoj formi (npr. $p(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$), ili mora biti zadana u

formi matrice diskretnih vrijednosti. Nakon toga se crtanje obavlja pozivom odgovarajućih komandi, vrlo slično sintaksi poznatog programskog paketa MATLAB. Jedan od načina kako se u Pythonu mogu analitički opisati funkcije više promjenljivih je prikazan kodom 2.30.

PROGRAMSKI KOD 2.30

```
# definiranje funkcije dvije promjenljive
def F(x, y):
    return np.sin(np.sqrt(x ** 2 + y ** 2))
```

Vizualizacija funkcija dvije promjenljive se može obaviti korištenjem koda 2.31.

PROGRAMSKI KOD 2.31

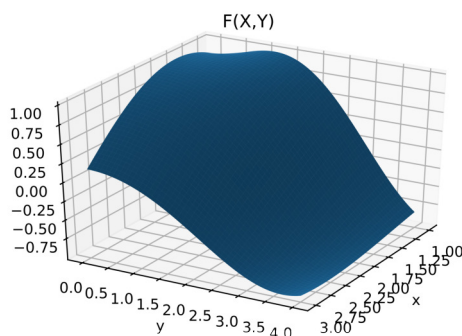
```
# Priprema x-y vrijednosti za crtanje:
step = 0.01; xmin = 1; xmax =3; ymin = 0; ymax = 4;
x = np.arange(xmin, xmax, step)
y = np.arange(ymin, ymax, step)
X, Y = np.meshgrid(x, y)

# Računa se željena funkcija:
p = F(X, Y)

# Prikaz:
plt.figure()

ax = plt.axes(projection='3d');
ax.view_init(elev=30, azim=30)
ax.set_xlabel("x");
ax.set_ylabel("y");
ax.set_title("F(X,Y)");
ax.plot_surface(X, Y, p);

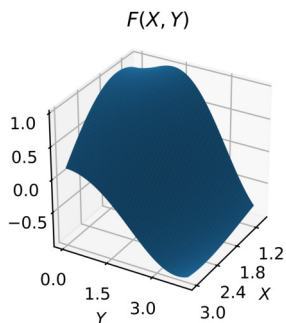
plt.show()
```



Ukoliko je pak matrica koja predstavlja funkciju već izračunata (u slučaju programskog koda 2.31 to je matrica p), tada se vizualizacija može napraviti i korištenjem modula *ssp*, kao u kodu 2.32.

PROGRAMSKI KOD 2.32

```
ssp.slprom2D.grafik(X,Y,p,
                    elevacija = 30, azimut = 30)
```



Funkcije zajedničke raspodjele i gustine vjerovatnoće se mogu dobiti na način kao i u slučaju jednodimenzionalnih funkcija, odnosno određivanjem raspodjele vjerovatnoće, a potom pravljenjem parcijalnih izvoda kako bi se dobile zajedničke funkcije gustine vjerovatnoće. Prvo je moguće odrediti funkciju raspodjele vjerovatnoće korištenjem funkcija iz programskog koda, a potom numeričkim diferenciranjem doći do funkcije gustine vjerovatnoće („isječki” programskog koda 2.33).

PROGRAMSKI KOD 2.33

```
# Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće
def PDF(X, Y):
    # ...
    # ...

    raspon_x = np.max(X) - np.min(X)
    raspon_y = np.max(Y) - np.min(Y)

    x = np.arange(np.min(X)-prosirenje_opsega*raspon_x ,
                  np.max(X)+prosirenje_opsega*raspon_x ,step)
    y = np.arange(np.min(Y)-prosirenje_opsega*raspon_y,
                  np.max(Y)+prosirenje_opsega*raspon_y,step)

    Xm, Ym = np.meshgrid(x, y)
    P = np.zeros((len(x),len(y)))

    N = len(X)

    #Formiranje funkcije raspodjele vjerovatnoće
    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(y)):
            P[i,j]= sum(np.heaviside(x[i]-X,1) * np.heaviside(y[j]-Y,1))/N

    # ...
    # ...
    return x, y, P
```



```

# Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće
def pdf(X, Y):
    # ...
    # ...

    p = np.diff(np.diff(P,1, axis = 0)/step,1, axis = 1)/step
    x = x[1:]
    y = y[1:]

    # ...
    # ...
    return x, y, p

```

U nastavku je pokazana jedna specifičnost kod izračunavanja funkcije gustine vjerovatnoće. Naime, funkcija raspodjele vjerovatnoće se može lako izračunati i vizualizirati kao dovoljno glatka funkcija, zbog činjenice da uključuje operator integracije, što se vidi iz sljedećeg programskog koda.

PROGRAMSKI KOD 2.34

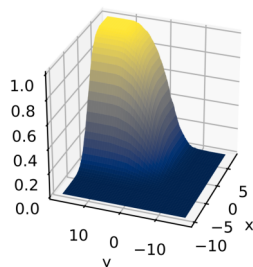
```

N = 1000

X = np.random.normal(0, 2, N)
Y = np.random.normal(0, 4, N)

# Određivanje funkcije raspodjele vjerovatnoće:
x, y, P_xy = ssp.slprom2D.PDF(X,Y)

```

Zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće $P(x, y)$ 

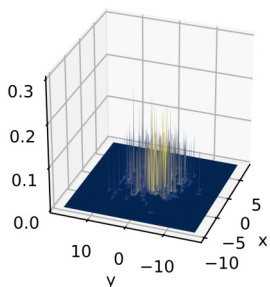
Međutim, direktnim numeričkim diferenciranjem, baš kao i u slučaju jedne slučajne promjenljive, dobivena funkcija gustine vjerovatnoće je jako zašumljena kada se radi o malom broju realizacija. Radi toga je moguće, prije diferenciranja funkcije raspodjele vjerovatnoće, istu „zagladiti” npr. korištenjem filtera. Iako na prvi pogled to može djelovati kao dobro rješenje, filtriranje može i narušiti informacije sadržane u signalu raspodjele vjerovatnoće, te korisnika dovesti u zabludu pri analizi funkcija raspodjele. U skladu s tim, preporučuje se oprez prilikom filtriranja ili interpoliranja funkcija raspodjele vjerovatnoće.

PROGRAMSKI KOD 2.35

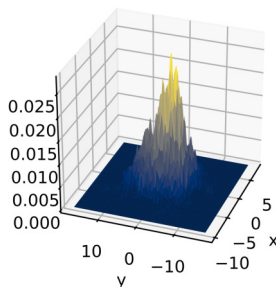
```
# Određivanje funkcije gustine vjerovatnoće:
x_ , y_ , p_xy = ssp.slprom2D.pdf(X,Y,
                                naslov = "Zajednička pdf(x,y) bez filtriranja");

x_ , y_ , p_xy = ssp.slprom2D.pdf(X,Y,
                                koef_filtriranja = 3.0,
                                naslov = "Zajednička pdf(x,y) sa filtriranjem");
```

Zajednička pdf(x,y) bez filtriranja



Zajednička pdf(x,y) sa filtriranjem



Marginalne funkcije gustine i raspodjele vjerovatnoće se mogu dobiti na sljedeće načine. Marginalne funkcije gustine vjerovatnoće se mogu dobiti numeričkim integriranjem funkcije zajedničke gustine vjerovatnoće po odgovarajućim osama, što odgovara sumiranju elemenata u matrici p_{XY} koja predstavlja gustinu vjerovatnoće. S druge strane, određivanje marginalnih funkcija raspodjele vjerovatnoća $P_X(x)$ i $P_Y(y)$ za $y = +\infty$ odnosno $x = +\infty$, odgovara odabiru posljednje vrste odnosno kolone u matrici koja predstavlja funkciju raspodjele $P_{X,Y}$. Ovaj princip je prikazan isječkom programskog koda 2.36.

PROGRAMSKI KOD 2.36

```
def pdf_marg(X = None, Y = None, p_xy = None):
    # ...
    # ...
    px = np.sum(p_xy, axis=1)*step
    py = np.sum(p_xy, axis=0)*step
    # ...
    # ...

def PDF_marg(X = None, Y = None, step = 0.1, prosirenje_opsega = .2,
            x = None, y = None, P_xy = None,
            prikaz = True,
            promjenljiva1 = 'X', promjenljiva2 = 'Y',
            naslov = None):
    # ...
    # ...

    Px = P_xy[:, -1]
    Py = P_xy[-1, :]

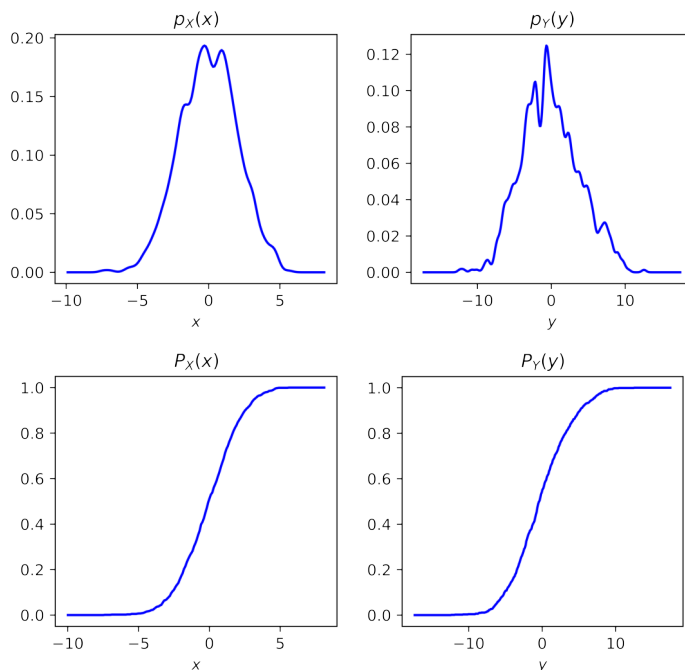
    # ...
```

...

Primjer ekstrakcije marginalnih funkcija vjerovatnoće pomoću modula *ssp* je dat programskim kodom 2.37.

PROGRAMSKI KOD 2.37

```
ssp.slprom2D.pdf_marg(x = x_, y = y_, p_xy = p_xy);
ssp.slprom2D.PDF_marg(x = x, y = y, P_xy = P_xy);
```



2.12 Mješoviti momenti

Ispitivanje međusobne nezavisnosti slučajnih promjenljivih se može uraditi korištenjem zajedničkih funkcija raspodjele odnosno gustine vjerovatnoće, te korištenjem marginalnih funkcija vjerovatnoće. Naime, ukoliko vrijedi:

$$p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad (2.68)$$

odnosno:

$$P_{X,Y}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y) \quad (2.69)$$

tada se za slučajne promjenljive X i Y kaže da su **nezavisne**. Drugi način interpretacije da su X i Y nezavisne slučajne promjenljive jeste da realizacija jedne nema utjecaja na realizaciju druge, ili ne može pomoći u predviđanju druge.

Međutim, određivanje marginalnih vjerovatnoća, kao i ispitivanje navedenih uslova može biti analitički i numerički zahtjevno. Iz toga razloga se nezavisnost događaja može analizirati korištenjem tzv. **mješovitih momenata**. Mješoviti momenti se nazivaju i *indikator*, a definiraju se slično kao i momenti za jednu slučajnu promjenljivu. Definira se **očekivana vrijednost funkcije dvije slučajne promjenljive** $f(X, Y)$:

$$E[f(X, Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)p_{X,Y}(x, y)dx dy \quad (2.70)$$

Od posebnog interesa su funkcije $f(X, Y)$ polinomijalnih oblika, odnosno $f(X, Y) = X^m Y^n$, tzv. momenti (m, n) -tog reda :

$$E[X^m Y^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^m y^n p_{X,Y}(x, y)dx dy \quad (2.71)$$

Analogno, definiraju se i *centralni momenti* (m, n) -tog reda:

$$E[(X - \eta_X)^m (Y - \eta_Y)^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)^m (y - \eta_Y)^n p_{X,Y}(x, y)dx dy \quad (2.72)$$

2.12.1 Korelacija

Mješoviti moment prvog reda se definira uvrštavajući $f(X, Y) = XY$ kako slijedi:

$$E[XY] = R_{X,Y} = \eta_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{X,Y}(x, y)dx dy \quad (2.73)$$

Mješoviti moment prvog reda (η_{XY}) se još naziva i **korelacija**. Ako je korelacija jednaka nuli ($\eta_{XY} = 0$), tada se za dvije slučajne promjenljive kaže da su *ortogonalne*. Može se primijetiti da je pojam ortogonalnosti vrlo sličan pojmu ortogonalnosti kod determinističkih signala, pri čemu je kod determinističkih signala vjerovatnoća realizacije zapravo jednaka jedinici.

Korelacija se pojavljuje kao izraz i prilikom određivanja srednjekvadratne vrijednosti sume slučajnih promjenljivih:

$$E[(X + Y)^2] = E[X^2] + E[Y^2] + E[2XY] \quad (2.74)$$

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\eta_{XY} \quad (2.75)$$

Korištenje mješovitih momenata omogućava i ispitivanje nezavisnosti slučajnih varijabli. Naime, za razliku od ispitivanja nezavisnosti slučajnih promjenljivih korištenjem zajedničkih funkcija vjerovatnoća, mnogo je jednostavnije odrediti očekivane vrijednosti slučajnih promjenljivih X , Y i XY . Ukoliko ne vrijedi da je:

$$E[XY] = E[X]E[Y] \quad (2.76)$$

tada slučajne promjenljive X i Y nisu nezavisne. Važno je primijetiti da ne vrijedi suprotno, odnosno da ukoliko vrijedi relacija (2.76) to ne znači nužno da su X i Y nezavisne slučajne promjenljive.

2.12.2 Kovarijansa

Kovarijansa između dvije slučajne varijable se dobiva iz centralnog momenta (relacija (2.72) za $m = 1$ i $n = 1$):

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \eta_X)(y - \eta_Y) p_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.77)$$

Ako dvije varijable imaju kovarijansu jednaku nuli, kaže se da su *nekorelirane*. Korelacija i kovarijansa su povezane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)] \\ &= E[XY] - E[\eta_X Y] - E[X \eta_Y] + E[\eta_X \eta_Y] \\ &= \eta_{XY} - \eta_X \eta_Y - \eta_X \eta_Y + \eta_X \eta_Y \\ &= \eta_{XY} - \eta_X \eta_Y \end{aligned} \quad (2.78)$$

Ako neka promjenljiva X ili Y ima očekivanu vrijednost (srednju vrijednost) jednaku nuli, kovarijansa i korelacija su zapravo ekvivalentne.

Također, bitno je primijetiti da:

$$\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) = \sigma^2 \quad (2.79)$$

Osim kovarijanse i korelacije, postoje još neki (normalizovani) parametri koji pokazuju veze između slučajnih promjenljivih. Jedan od njih je (*Pearsonov*) *korelacioni koeficijent*:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{E[(X - \eta_X)(Y - \eta_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.80)$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$|\rho_{XY}| \leq 1 \quad (2.81)$$

Ukoliko je korelacioni koeficijent jednak nuli, tada su dvije varijable nekorelirane. Ukoliko je korelacioni koeficijent jednak jedinici (ili minus jedinici) tada su slučajne promjenljive u potpunosti korelirane.

Primjer 2.10:

Posljedica: Ako su dvije slučajne promjenljive X i Y međusobno nezavisne, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \eta_{XY} &= \eta_X \eta_Y \\ \text{Cov}(X, Y) &= \rho_{XY} = 0 \end{aligned}$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \eta_{XY} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y p_{X,Y}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_X(x) p_Y(y) dx dy \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy \\
 &= E[X] E[Y] \\
 &= \eta_X \eta_Y
 \end{aligned}$$

Iz navedenog slijedi da nezavisnost implicira nekoreliranost. Međutim, važno je napomenuti da nužno ne vrijedi suprotno, odnosno da slučajne varijable koje nisu korelirane ne moraju nužno biti nezavisne.

Kako bi se bolje ilustrovao pojam korelacije, u nastavku će biti razmotren jedan specifičan primjer. Neka su X_1 i X_2 dvije slučajne promjenljive koje su međusobno nekorelirane, dolaze iz normalne raspodjele i imaju identičnu varijansu ($\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2)$). Tada se može sintetizirati slučajna promjenljiva Y kao njihova linearna kombinacija:

$$Y = \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2 \quad (2.82)$$

gdje je ρ realan broj $-1 \leq \rho \leq 1$. Bit će pokazano da su Y i X_1 korelirane i da je njihov korelacioni koeficijent ρ .

Naime:

$$\begin{aligned}
 \rho_{Y X_1} &= \frac{\text{Cov}(X_1, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(Y)}} \\
 &= \frac{\text{Cov}(X_1, \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(\rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2)}} \\
 &= \frac{\overbrace{\rho \text{Cov}(X_1, X_1)}^{\text{Var}(X_1)} + \sqrt{1 - \rho^2} \overbrace{\text{Cov}(X_1, X_2)}^{=0}}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(\rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2)}} \\
 &= \frac{\rho \text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}(X_1) \text{Var}(\rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} X_2)}} \\
 &= \frac{\rho \text{Var}(X_1)}{\sqrt{\rho^2 \text{Var}^2(X_1) + (1 - \rho^2) \text{Var}^2(X_2)}} \\
 &= \frac{\rho \text{Var}(X_1)}{\sqrt{\text{Var}^2(X_2)}} \\
 &= \rho
 \end{aligned} \quad (2.83)$$

Vizualizacija različitih korelacionih koeficijenata, odnosno kovarijanse, za opisani primjer je data programskim kodovima 2.39-2.40.

2. Slučajna promjenljiva. Modeli raspodjele vjerovatnoće. Očekivane vrijednosti.

PROGRAMSKI KOD 2.39

```
N = 1000
X1 = np.random.normal(0, 2, N)
X2 = np.random.normal(0, 2, N)

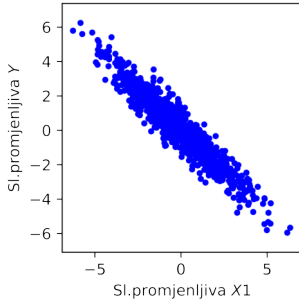
def analiza_korelacije(rhos, X1, X2):

    for rho in rhos:
        Y = rho*X1 + np.sqrt(1-rho**2)*X2
        naslov = '(X1, Y), Koeficijent korelacije:  $\rho$  = ' + str(rho);
        #SIS2.Prikaz.korelacija(X1, Y, naslov)
        ssp.slprom2D.realizacije(X1,Y,
            naslov = '(X1, Y), Koeficijent korelacije:  $\rho$  = ' + str(rho),
            promjenljiva1 = 'X1', promjenljiva2 = 'Y',
            dijagrami = 'samo (X,Y)')
```

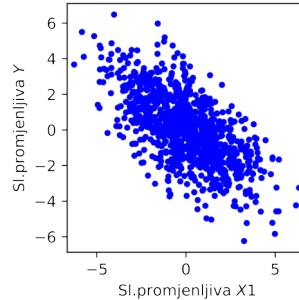
PROGRAMSKI KOD 2.40

```
analiza_korelacije(rhos = [-0.95, -0.65, 0, 0.3, 0.5, 1], X1 = X1, X2 = X2)
```

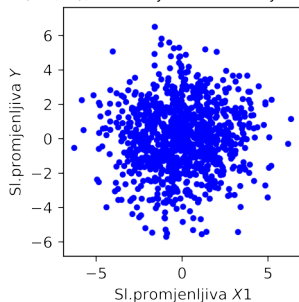
(X1, Y), Koeficijent korelacije: $\rho = -0.95$



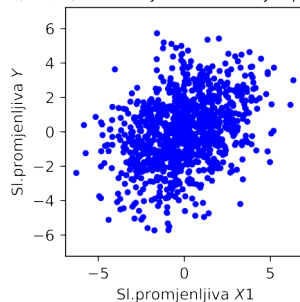
(X1, Y), Koeficijent korelacije: $\rho = -0.65$

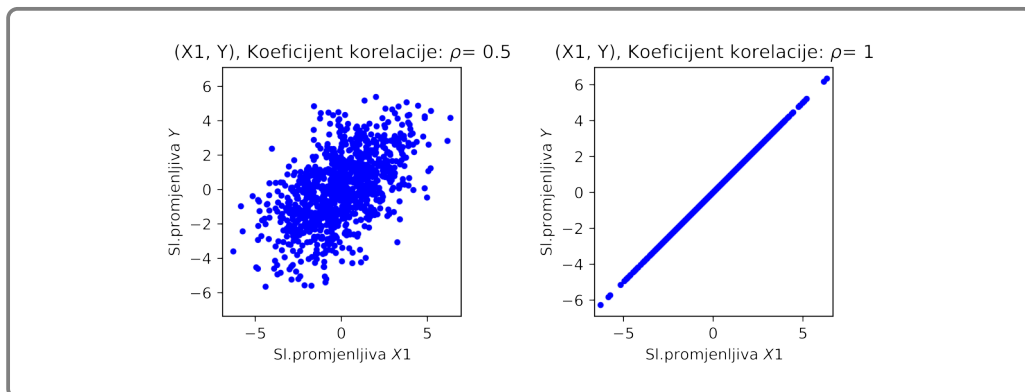


(X1, Y), Koeficijent korelacije: $\rho = 0$



(X1, Y), Koeficijent korelacije: $\rho = 0.3$





Primjer 2.11:

Neka su date slučajne promjenljive X i Y slučajno raspoređene na krugu:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pokazati da su slučajne promjenljive nekorelirane, ali nisu nezavisne.

Rješenje:

Kako je pokazano u Primjeru 2.7, vrijedi sljedeće:

$$p_X(x)p_Y(y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \neq p_{X,Y}(x,y)$$

pa slučajne promjenljive nisu nezavisne. S druge strane:

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy p_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy \frac{1}{\pi} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} x \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right] dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} x \cdot 0 dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

pa vrijedi da su slučajne promjenljive ortogonalne. Nadalje, zbog činjenice da je $p_X(x) = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$ simetrična u nuli, to je $E[X] = 0$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_X(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^{+1} x \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Analogno, $E[Y] = 0$ pa je i kovarijansa:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

prema tome, varijable X i Y su i nekorelirane.

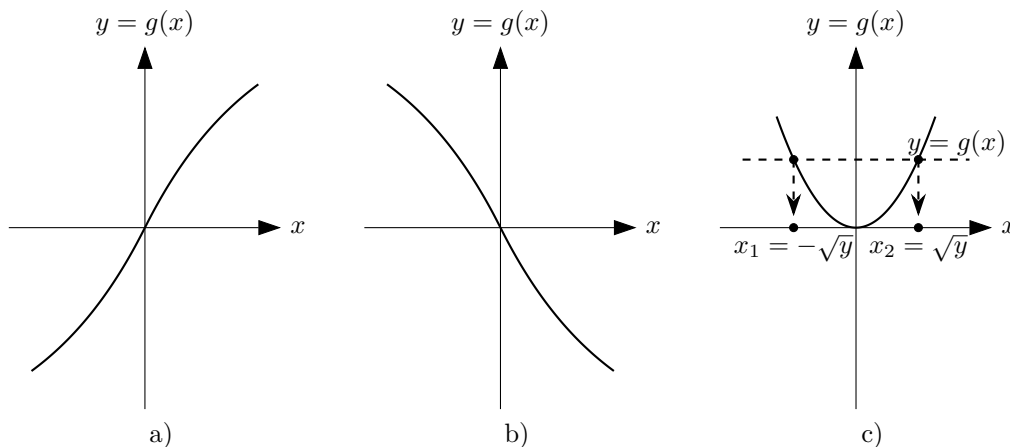
2.13 Transformacije slučajnih promjenljivih

Neka je data slučajna promjenljiva X sa svojom marginalnom funkcijom raspodjele vjerovatnoće $P_X(x)$ i gustine vjerovatnoće $p_X(x)$ respektivno. Također, neka je data funkcija $y = g(x)$ koja preslikava slučajnu promjenljivu X u slučajnu promjenljivu Y . Može se postaviti pitanje s kakvom raspodjelom vjerovatnoće je raspodijeljena slučajna promjenljiva Y .

Obzirom da funkcija $g(x)$ na intervalu od interesa na kojem je definirana slučajna promjenljiva x može biti (slika 2.12):

- monotono rastuća,
- monotono opadajuća,
- po dijelovima monotono rastuća i monotono opadajuća,

u skladu s tim će biti i izvršena analiza ovog preslikavanja.



Slika 2.12: Tipovi funkcija preslikavanja $y = g(x)$, a) monotono rastuća, b) monotono opadajuća, c) po dijelovima monotono rastuća i monotono opadajuća.

U slučaju da je funkcija $y = g(x)$ **monotono rastuća**, tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
 P_Y(y) &= \text{vjerovatnoća da } (Y \leq y) \\
 &= \text{vjerovatnoća da } (g(X) \leq y) \\
 &= \text{vjerovatnoća da } (X \leq g^{-1}(y)) \\
 &= P_X(g^{-1}(y))
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

gdje je $x = g^{-1}(y)$ inverzna funkcija od funkcije $y = g(x)$. Iz (2.84) slijedi:

$$P_Y(g(x)) = P_X(x) \tag{2.85}$$

Pravljenjem izvoda po x obje strane jednakosti (2.85) dobija se:

$$\frac{dP_X(x)}{dx} = p_X(x) = \frac{d(P_Y(g(x)))}{dx} = p_Y(y) \frac{d[g(x)]}{dx} = p_Y(y) \frac{dy}{dx} \Big|_{y=g(x)} \tag{2.86}$$

odnosno:

$$p_Y(y) = p_X(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \tag{2.87}$$

Pravljenjem izvoda po y obje strane jednakosti (2.85) dobija se ista relacija u nešto drugačijoj formi:

$$\frac{dP_Y(y)}{dy} = p_Y(y) = \frac{d[P_X(x)]}{dy} = p_X(x) \frac{dx}{dy} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \tag{2.88}$$

Primjer 2.12:

Data je slučajna promjenljiva X sa normalnom raspodjelom, očekivanom vrijednosti a i standardnom devijacijom σ . Odrediti funkciju gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive $Y = AX + B$ pri čemu su A i B realne konstante i $A > 0$.

Rješenje:

Prema relaciji (2.87) vrijedi:

$$\frac{dy}{dx} = A$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= p_X(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \\
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}} (A)^{-1} \Big|_{x=\frac{y-B}{A}} \\
 &= \frac{1}{A\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\frac{y-B}{A}-a)^2}{\sigma^2}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(A\sigma)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-(B+aA))^2}{(A\sigma)^2}}$$

odakle se vidi da je i novodobivena slučajna promjenljiva zapravo slučajna promjenljiva sa Gaussovom raspodjelom, samo što je nova standardna devijacija data sa $A\sigma$ i nova očekivana vrijednost sa $E[Y] = Aa + B$. Ovo se može uočiti i pomoću programskog koda 2.41.

PROGRAMSKI KOD 2.41

```

N = 1000
a, sigma = 1, 3
A, B = 2, 2

X = np.random.normal(a, sigma, N)
Y = A*X + B

def analiza_2D_PDF_pdf(X,Y,
                       promjenljiva1 = 'X', promjenljiva2 = 'Y'):

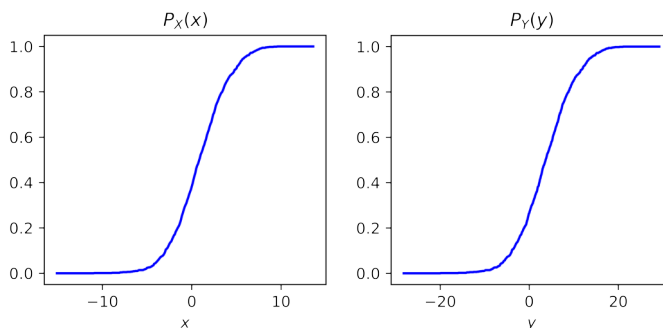
    ssp.slprom2D.PDF_marg(X,Y,
                          promjenljiva1 = promjenljiva1,
                          promjenljiva2 = promjenljiva2);
    ssp.slprom2D.pdf_marg(X,Y,
                          promjenljiva1 = promjenljiva1,
                          promjenljiva2 = promjenljiva2);

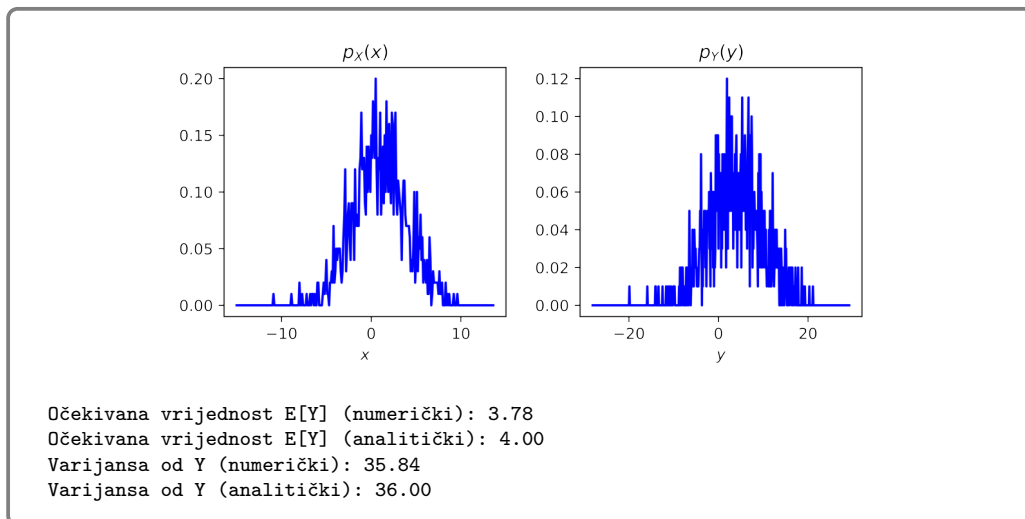
analiza_2D_PDF_pdf(X,Y)

print("Očekivana vrijednost E[Y] (numerički): {:.2f}".format(np.mean(Y)))
print("Očekivana vrijednost E[Y] (analitički): {:.2f}".format(A*a+B))

print("Varijansa od Y (numerički): {:.2f}".format(np.var(Y)))
print("Varijansa od Y (analitički): {:.2f}".format((A*sigma)**2))

```





Primjer 2.13:

Data je slučajna promjenljiva X sa uniformnom raspodjelom na intervalu $(0, 1)$.
 Odrediti funkciju gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$.

Rješenje:

U ovom slučaju je transformacija $y = g(x)$ monotonno rastuća funkcija, te vrijedi da je $x = 1 - e^{-\lambda y}$ i $p_X(x) = 1$ na intervalu $(0, 1)$. U tom smislu vrijedi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-x}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= p_X(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \\ &= 1 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{1}{1-x} \right)^{-1} \Big|_{x=1-e^{-\lambda y}} \\ &= \lambda(1-x) \Big|_{x=1-e^{-\lambda y}} \\ &= \lambda(1-1+e^{-\lambda y}) \\ &= \lambda e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

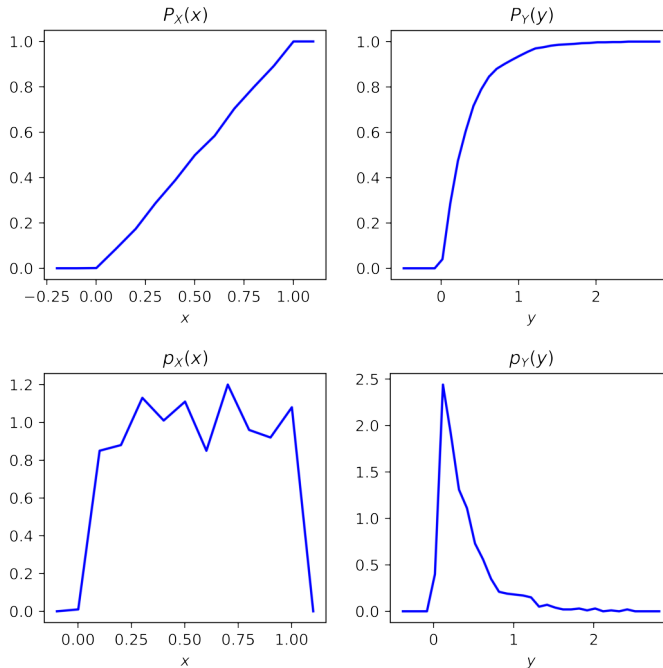
što predstavlja eksponencijalnu raspodjelu slučajne promjenljive na intervalu $(0, 1)$.
 Ilustracija dobivenog preslikavanja se može analizirati programskim kodom 2.42.

PROGRAMSKI KOD 2.42

```
N = 1000
X = np.random.uniform(0, 1, N)

lmb = 3
Y = -(1/lmb)*np.log(1-X)

analiza_2D_PDF_pdf(X,Y)
```



Analogno, ukoliko je funkcija monotono opadajuća (slika 2.12b), tada vrijedi:

$$\begin{aligned}
 P_Y(y) &= \text{vjerovatnoća da } (Y \leq y) \\
 &= \text{vjerovatnoća da } (g(X) \leq y) \\
 &= \text{vjerovatnoća da } (X \geq g^{-1}(y)) \\
 &= 1 - P_X(g^{-1}(y))
 \end{aligned} \tag{2.89}$$

odakle slijedi (sličnim rezonovanjem kao u prethodnom slučaju):

$$p_Y(y) = -p_X(x) \frac{dx}{dy} \Big|_{x=g^{-1}(y)} = -p_X(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \Big|_{x=g^{-1}(y)} \tag{2.90}$$

odnosno, u opštem slučaju, kada je funkcija monotona:

$$p_Y(y) = p_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \Big|_{x=g^{-1}(y)} = p_X(x) \left| \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \right| \Big|_{x=g^{-1}(y)} \tag{2.91}$$

Vrlo često se može desiti da funkcija $y = g(x)$ nije ni monotono rastuća ni monotono opadajuća, već može sadržavati intervale na kojima je monotono rastuća i intervale na kojima je monotono opadajuća (slika 2.12c). Pokazuje se da u opštem slučaju vrijedi:

$$p_Y(y) = \sum_{x_i} p_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|_{x=g^{-1}(y)} = \sum_{x_i} p_X(x) \left| \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \right|_{x=g^{-1}(y)} \quad (2.92)$$

gdje su x_i dati kao rješenja jednačine $y = g(x)$.

Primjer 2.14:

Data je slučajna promjenljiva X sa normalnom raspodjelom, nultom srednjom vrijednosti i jediničnom standardnom devijacijom. Odrediti funkciju gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive $Y = X^2$.

Rješenje:

Može se uočiti da za negativne vrijednosti y ova transformacija ne daje realne korijene ($p_Y(y) = 0, y < 0$). Za nenegativne vrijednosti y postoje dva korijena $x_1 = \sqrt{y}$ i $x_2 = -\sqrt{y}$. To implicira:

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x_i} p_X(x) \left| \left(\frac{dy}{dx} \right)^{-1} \right|_{x=g^{-1}(y)} \\ &= p_X(x) \left| \frac{1}{2x} \right|_{x=\sqrt{y}} + p_X(x) \left| \frac{1}{2x} \right|_{x=-\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})] \end{aligned}$$

Do ovog izraza se može doći i na sljedeći način. Događaji se mogu opisati kao:

$$\begin{aligned} \{Y \leq y\} &= \{X^2 \leq y\} \\ &= \{-\sqrt{y} \leq X \leq +\sqrt{y}\} \\ &= \{-\sqrt{y} < X \leq +\sqrt{y}\} \cup \{X = -\sqrt{y}\} \end{aligned}$$

Dalje se zaključuje:

$$P_Y(y) = P_X(\sqrt{y}) - P_X(-\sqrt{y}) + \underbrace{\text{vjerovatnoća}(X = -\sqrt{y})}_{=0}. \quad (2.93)$$

Diferenciranjem relacije (2.93) se dobiva:

$$p_Y(y) = p_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

odnosno:

$$p_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\sqrt{y}} [p_X(\sqrt{y}) + p_X(-\sqrt{y})] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{y}} \left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{y}-a)^2}{\sigma^2}} \right] u(y).
 \end{aligned}$$

Za $a = 0$ se od Gaussove raspodjele praktično dobiva Gamma raspodjela.

PROGRAMSKI KOD 2.43

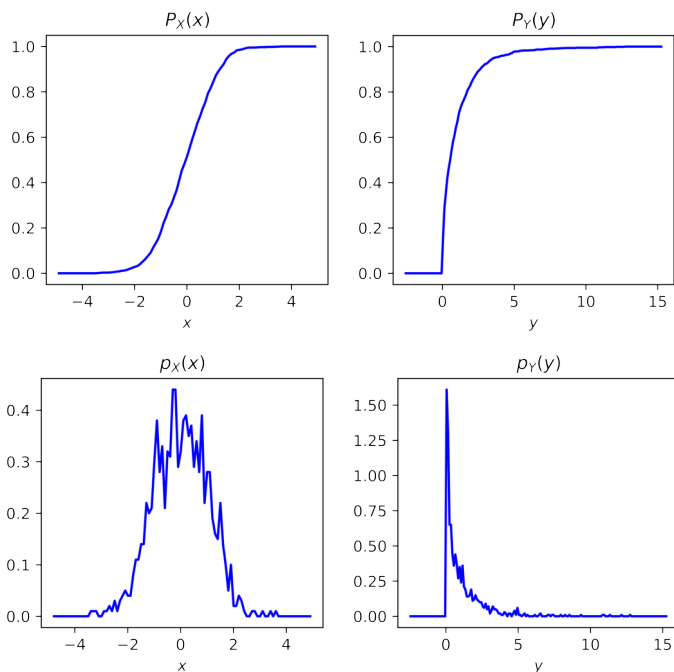
```

N = 1000
a, sigma = 0, 1

X = np.random.normal(a, sigma, N)
Y = X**2

analiza_2D_PDF_pdf(X,Y)

```



Transformacija promjenljivih je izuzetno korisna za primjenu nad funkcijama dvije promjenljive, odnosno nad parovima slučajnih promjenljivih. Tako npr. neka su X i Y slučajne promjenljive i neka su slučajne promjenljive Z i W formirane korištenjem:

$$z = g_1(x, y) \quad (2.94)$$

$$w = g_2(x, y) \quad (2.95)$$

i neka su inverzne funkcije date sa:

$$x = h_1(z, w) \quad (2.96)$$

$$y = h_2(z, w) \quad (2.97)$$

Tada se može pokazati da vrijedi:

$$p_{Z,W}(z, w) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \right|} \Bigg|_{\substack{x = h_1(z, w) \\ y = h_2(z, w)}} \quad (2.98)$$

odnosno:

$$p_{Z,W}(z, w) = p_{X,Y}(x, y) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{bmatrix} \right| \Bigg|_{\substack{x = h_1(z, w) \\ y = h_2(z, w)}} \quad (2.99)$$

pri čemu se može koristiti onaj od izraza koji je pogodniji za korištenje. Može se primijetiti da je zbog proširenja na funkcije više promjenljivih, izvod zamijenjen Jakobijanom.

Primjer 2.15:

Neka su dvije slučajne promjenljive X i Y uniformno raspoređene na segmentu $[0, 1]$ i neka su date slučajne promjenljive Z i W kao:

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{-2\ln(X)}\cos(2\pi Y) \\ W &= \sqrt{-2\ln(X)}\sin(2\pi Y) \end{aligned}$$

Odrediti raspodjelu $p_{Z,W}(z, w)$ (u literaturi poznata kao Box - Muller transformacija).

Rješenje:

Jasno je da vrijedi:

$$\begin{aligned} z^2 + w^2 &= -2\ln(x) \\ \frac{w}{z} &= \tan(2\pi y) \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} = h_1(z, w) \\ y &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{w}{z}\right) = h_2(z, w) \end{aligned}$$

Dalje vrijedi:

$$D = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \begin{array}{cc} \frac{1}{2\sqrt{-2\ln(x)}}(-2)\frac{1}{x}\cos(2\pi y) & -2\pi\sqrt{-2\ln(x)}\sin(2\pi y) \\ \frac{1}{2\sqrt{-2\ln(x)}}(-2)\frac{1}{x}\sin(2\pi y) & 2\pi\sqrt{-2\ln(x)}\cos(2\pi y) \end{array} \right| \\
 &= \frac{-2\pi}{x} [\cos^2(2\pi y) + \sin^2(2\pi y)] \\
 &= \frac{-2\pi}{x}
 \end{aligned}$$

Pa je tada na sektoru $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 p_{Z,W}(z, w) &= \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \right|} \Bigg|_{\substack{x = h_1(z, w) \\ y = h_2(z, w)}} \\
 &= \frac{1}{\left| \frac{-2\pi}{x} \right|} \Bigg|_{\substack{x = e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} \\ y = \frac{1}{2\pi}\text{atan}\left(\frac{w}{z}\right)}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}
 \end{aligned}$$

što zapravo predstavlja dvodimenzionalnu Gaussovu raspodjelu.

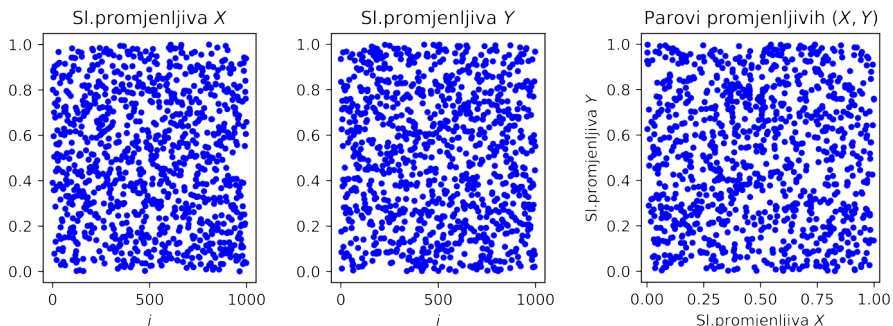
PROGRAMSKI KOD 2.44

```

X = np.random.uniform(0, 1, N)
Y = np.random.uniform(0, 1, N)

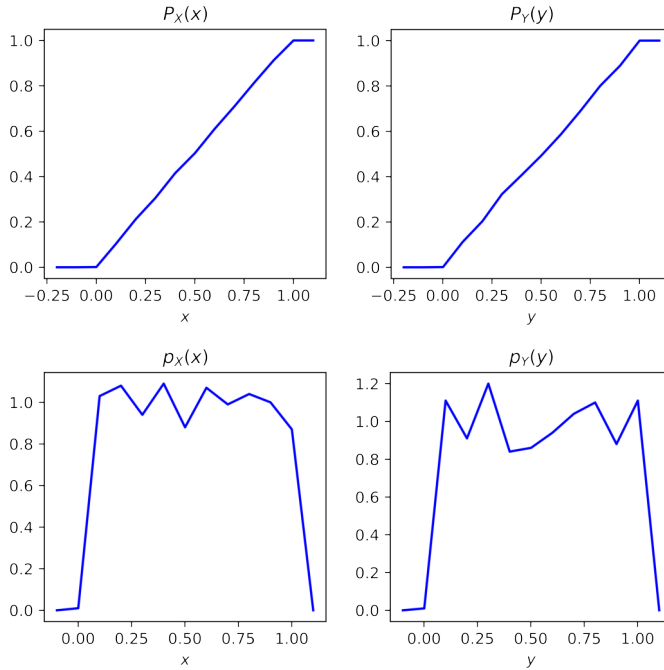
ssp.slprom2D.realizacije(X,Y)

```



PROGRAMSKI KOD 2.45

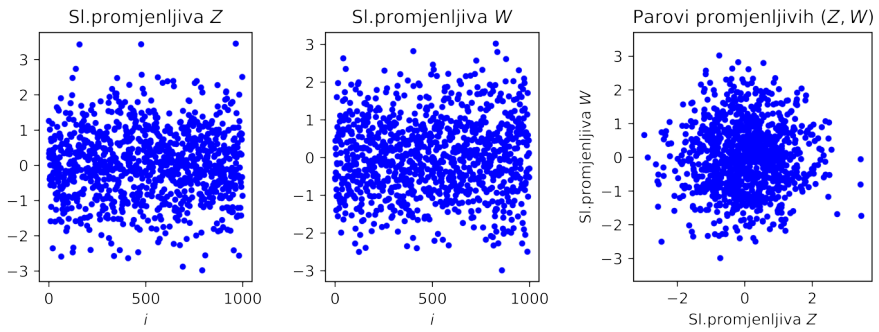
analiza_2D_PDF_pdf(X,Y)



PROGRAMSKI KOD 2.46

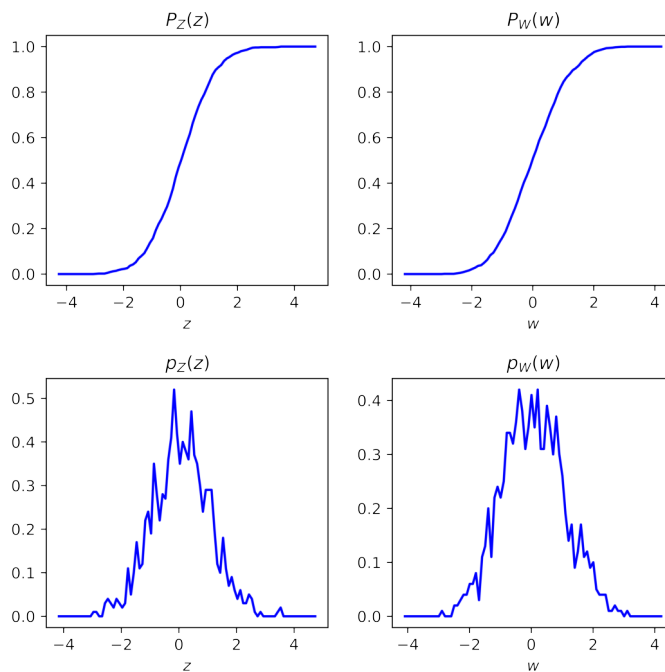
```
Z = np.sqrt(-2*np.log(X))*np.cos(2*np.pi*Y)
W = np.sqrt(-2*np.log(X))*np.sin(2*np.pi*Y)

ssp.slprom2D.realizacije(Z, W, promjenljiva1 = 'Z', promjenljiva2 = 'W')
```



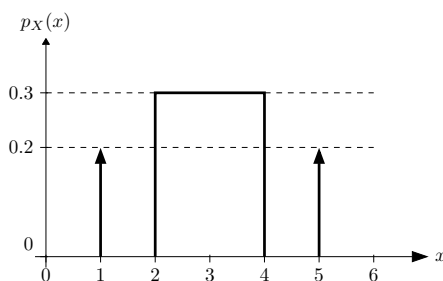
PROGRAMSKI KOD 2.47

```
analiza_2D_PDF_pdf(Z,W,  
    promjenljiva1 = 'Z', promjenljiva2 = 'W')
```



Zadaci za samostalan rad

1. Naći funkciju gustine vjerovatnoće i funkciju raspodjele vjerovatnoće za slučaj bacanja novčića i za slučaj bacanja kockice, ako se smatra da je svaki događaj jednako vjerovatan.
2. Data je funkcija gustine vjerovatnoće kao na slici 2.13. Naći funkciju raspodjele vjerovatnoće.

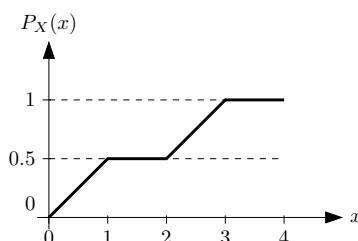


Slika 2.13: Funkcija gustine vjerovatnoće za Zadatak 2

3. Otpor R ima nominalnu vrijednost $100[\Omega]$ i maksimalnu grešku $\pm 10\%$. Odrediti vjerovatnoću da se vrijednost otpora nalazi između $100[\Omega]$ i $105[\Omega]$, ako je vrijednost otpora uniformno raspoređena na intervalu mogućih vrijednosti. Nacrtati odgovarajuću funkciju raspodjele i gustine vjerovatnoće.
4. Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajne varijable X je prikazana na slici 2.14. Odrediti funkciju gustine vjerovatnoće, te odrediti vjerovatnoću da je vrijednost slučajna varijabla manja od 2.5.
5. Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X je data sa $p_X(x) = e^{-a|x|}$. Odrediti funkciju raspodjele $P_X(x)$.
6. Funkcija raspodjele slučajne promjenljive X je data sa:

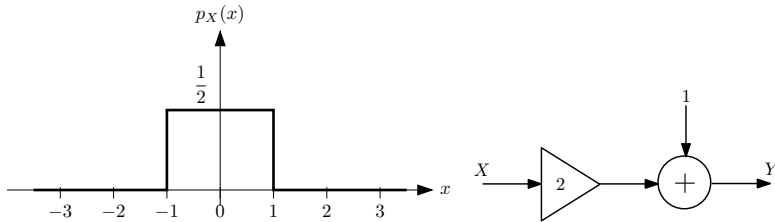
$$P_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -5 \\ \frac{(x+5)^2}{144}, & -5 \leq x < 7 \\ 1, & 7 \leq x \end{cases}$$

Odrediti očekivanu vrijednost $E[X]$ i varijansu $\text{Var}[X]$.



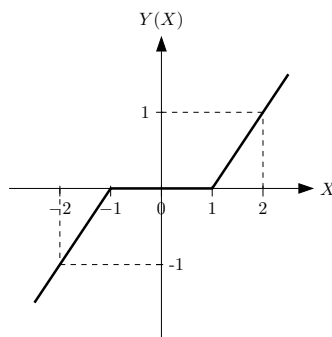
Slika 2.14: Funkcija raspodjele vjerovatnoće za Zadatak 4

7. Ako je X normalna slučajna promjenljiva sa srednjom vrijednošću 5 i srednjekvadratnom vrijednošću 89, naći vjerovatnoću da bude zadovoljeno $9 < X < 25$.
8. Maksimalna temperatura T izražena u $^{\circ}F$ izmjerena u julu na Antarktici predstavlja Gaussovu slučajnu promjenljivu čija je varijansa 225. Temperature premašuje $10^{\circ}F$ sa vjerovatnoćom od $\frac{1}{2}$. Kolika je vjerovatnoća da temperatura bude iznad temperature smrzavanja od $32^{\circ}F$? Koliko iznose vjerovatnoće $P\{T < 0\}$ i $P\{T > 60\}$?
9. Data je funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive X koja ulazi u strukturu prikazanu slikom 2.15. Odrediti očekivanu vrijednost $E[Y]$ izlazne slučajne promjenljive Y .



Slika 2.15: Funkcija gustine vjerovatnoće i zadana struktura, za Zadatak 9

10. Kontinualna slučajna promjenljiva X je uniformno raspoređena između 1 i 5. Ako je data ovisnost $Y = X^2$, naći funkciju gustine vjerovatnoće, funkciju raspodjele vjerovatnoće i očekivanu vrijednost slučajne promjenljive Y .
11. Diskretna slučajna varijabla X uzima vrijednosti $-1, 0$ i 1 sa vjerovatnoćama koje iznose $0.3, 0.1$ i 0.6 , respektivno. Odrediti funkcije gustine i raspodjele slučajne promjenljive $Y = X^2 + 1$.
12. Na slici 2.16 je data ovisnost $Y = Y(X)$. Ako je X slučajna varijabla uniformno raspoređena na segmentu $[-2, 2]$, naći $p_Y(y)$, $P_Y(y)$ i $E[Y]$.

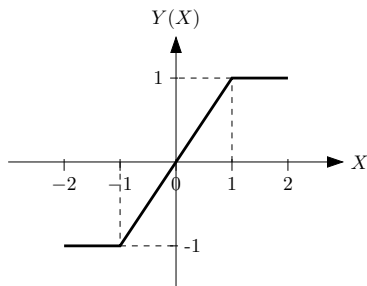


Slika 2.16: Ovisnost $Y(X)$ za Zadatak 12

13. Na slici 2.17 je data ovisnost $Y = Y(X)$. Ako je X slučajna varijabla uniformno raspoređena na segmentu $[-2, 2]$, naći $p_Y(y)$, $P_Y(y)$ i $E[Y]$.
14. Slučajne promjenljive X i Y imaju zajedničku funkciju gustine vjerovatnoće datu sa:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c & 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 5 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Pronaći konstantu c i vjerovatnoću događaja $A = \{1 \leq x < 3, 2 \leq y < 3\}$.



Slika 2.17: Ovisnost $Y(X)$ za Zadatak 13

15. Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće slučajnih promjenljivih X i Y ima oblik:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1, \quad |y| < x^2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odrediti konstantu c i marginalne funkcije gustine vjerovatnoće $p_X(x)$ i $p_Y(y)$.

16. Slučajne promjenljive X i Y imaju zajedničku funkciju gustine vjerovatnoće oblika:

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{5x^2}{2}, & -1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x^2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odrediti:

- (a) $E[X]$ i $\text{Var}[X]$;
- (b) $E[Y]$ i $\text{Var}[Y]$;
- (c) $\text{Cov}[X, Y]$;

3. Slučajni vektori

3.1 Slučajni vektor. Funkcije vjerovatnoće vektora slučajnih promjenljivih.

Nekada je od interesa razmatrati ne samo jednu slučajnu promjenljivu, već vektor slučajnih promjenljivih. Npr. ukoliko se želi analizirati eksperiment koji podrazumijeva bacanje novčića 5 puta uzastopno, tada su moguće realizacije eksperimenta npr. [pismo, glava, pismo, pismo, glava]. Ovaj eksperiment može biti sproveden na način da se jedan novčić baca 5 puta uzastopno i da se to tretira kao eksperiment, ili da se baca 5 novčića istovremeno pa se to tretira kao eksperiment. U svakom slučaju, rezultat eksperimenta se može predstaviti **vektorom slučajnih promjenljivih** (eng. *random vector, multivariate random variable*):

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T \quad (3.1)$$

Očigledno je da će ponašanje slučajnog vektora biti povezano sa ponašanjem pojedinačnih slučajnih varijabli koje ga sačinjavaju. Pojmovi kao što su funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće za vektor slučajnih promjenljivih se mogu definirati pomoću funkcija n slučajnih promjenljivih:

$$P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \text{vjerovatnoća da } [X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n] \quad (3.2)$$

odnosno:

$$p_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (3.3)$$

Analogno, mogu se definirati i marginalne vjerovatnoće po pojedinim promjenljivim, npr.:

$$P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_m) = P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1} = +\infty, x_{m+2} = +\infty, \dots, x_n = +\infty) \quad (3.4)$$

Osim u vektor, više slučajnih promjenljivih se može rasporediti i u skup ili sekvencu.

Od posebnog interesa za analizu su tzv. vektori *nezavisnih i identički distribuiranih slučajnih promjenljivih* (eng. *independent and identically distributed*). Za slučajne promjenljive X_1, X_2, \dots, X_n se kaže da su **IID** ako vrijedi:

- $P_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(x_i)$ (nezavisnost),
- $P_{X_i}(x_i) = P_X(x)$ za svako $i = 1, \dots, n$ (identička distribucija).

Primjer IID varijabli su slučajne promjenljive koje opisuju bacanje kocke nekoliko puta uzastopno - npr. prilikom svakog bacanja funkcije vjerovatnoće su jednake, a dobivanje specifične sekvence (npr. 1,3,4,5) se može izračunati iz vjerovatnoća dobivanja pojedinačnih realizacije (npr. $P(1,3,4,5)=P(1)P(3)P(4)P(5)$). Mnoge varijable u prirodi se mogu smatrati IID, te se i vektori sa IID slučajnim promjenljivim relativno često pojavljuju u praktičnim primjenama.

3.2 Očekivane vrijednosti slučajnih vektora. Korelaciona i kovarijantna matrica.

Očekivana vrijednost, korelacija i kovarijansa za vektor slučajnih promjenljivih se uvode na sličan način kao i kod skalarnih slučajnih promjenljivih.

Očekivana vrijednost vektora slučajnih promjenljivih $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ se definira kao:

$$\eta_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \\ \dots \\ E[X_n] \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Iz relacije (3.5) slijedi da će očekivana vrijednost slučajnog vektora biti vektor očekivanih vrijednosti slučajnih promjenljivih koje ga sačinjavaju.

Korelaciona matrica se definira kao:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T] = \begin{bmatrix} E[X_1X_1] & E[X_1X_2] & \dots & E[X_1X_n] \\ E[X_2X_1] & E[X_2X_2] & \dots & E[X_2X_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E[X_nX_1] & E[X_nX_2] & \dots & E[X_nX_n] \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Za razliku od korelacije za par slučajnih promjenljivih, gdje se traži očekivana vrijednost od umnoška „različitih” slučajnih promjenljivih, korelaciona matrica na prvi pogled traži očekivanu vrijednost od umnoška vektora sa samim sobom. Međutim, zapravo, korelaciona matrica računa međusobne korelacije elemenata vektora, odnosno pojedinačnih slučajnih varijabli, tako da se ne može baš smatrati da se radi korelacija vektora u smislu „sam sa sobom”. Upravo zbog toga, rijetko se koristi termin *autokorelaciona matrica*, već samo korelaciona matrica, a za korelacionu matricu nad dva različita slučajna vektora se koristi termin *kroskorelaciona matrica*:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = E[\mathbf{X}\mathbf{Y}^T] \quad (3.7)$$

Kovarijantna matrica se definira kao:

$$\mathbf{K} = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = C_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - \eta_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \eta_{\mathbf{X}})^T] \quad (3.8)$$

Elementi matrice \mathbf{K} su zapravo kovarijanse dvije slučajne promjenljive, odnosno:

$$\mathbf{K}(i, j) = \text{Cov}(X_i, X_j) \quad (3.9)$$

Također, jasno je da vrijedi:

$$\mathbf{K} = R_{\mathbf{X}\mathbf{X}} - \eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{Y}}^T \quad (3.10)$$

Analogna diskusija za kovarijantnu matricu se može napraviti kao i za korelacionu matricu. Kovarijantna matrica pokazuje kovarijansu između slučajnih promjenljivih koje sačinjavaju slučajni vektor, ali i varijansu svih pojedinačnih slučajnih promjenljivih. U tom smislu kovarijantna matrica se zove još i **autokovarijantna matrica**, **matrica disperzije**, ali i **matrica varijansa-kovarijansa**.

Nadalje, definira se i **kroskovarijantna** matrica:

$$C_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = E[(\mathbf{X} - \eta_{\mathbf{X}})(\mathbf{Y} - \eta_{\mathbf{Y}})^T] \quad (3.11)$$

Za dva slučajna vektora \mathbf{X} i \mathbf{Y} se kaže da su **ortogonalni** ako vrijedi:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = E[\mathbf{X}\mathbf{Y}^T] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

Za dva slučajna vektora \mathbf{X} i \mathbf{Y} se kaže da su **nekorelirani** ako vrijedi:

$$R_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} = E[\mathbf{X}\mathbf{Y}^T] = E[\mathbf{X}](E[\mathbf{Y}])^T = \eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{Y}}^T \quad (3.13)$$

Primjer 3.1:

Slučajni vektor \mathbf{X} ima kovarijantnu matricu i korelacionu matricu datu sa:

$$C_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad R_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Odrediti vektor očekivanih vrijednosti $\eta_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}]$.

Rješenje:

Obzirom da vrijedi:

$$C_{\mathbf{X}\mathbf{X}} = R_{\mathbf{X}\mathbf{X}} - \eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{X}}^T$$

tada slijedi:

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{X}}^T &= R_{\mathbf{X}\mathbf{X}} - C_{\mathbf{X}\mathbf{X}} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -4 \\ 1 & -4 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sada se može pisati:

$$\eta_{\mathbf{X}}\eta_{\mathbf{X}}^T = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[X_1] & E[X_2] & E[X_3] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E[X_1]E[X_1] & E[X_1]E[X_2] & E[X_1]E[X_3] \\ E[X_2]E[X_1] & E[X_2]E[X_2] & E[X_2]E[X_3] \\ E[X_3]E[X_1] & E[X_3]E[X_2] & E[X_3]E[X_3] \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Izjednačavanjem (3.14) i (3.15) dobivaju se dva moguća rješenja:

$$\eta_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ E[X_3] \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

3.3 Zakon velikih brojeva

Zakon velikih brojeva je jedna od fundamentalnih teorema iz oblasti teorije vjerovatnoće i statistike. Zakon velikih brojeva (eng. *Law of Large Numbers - LLN*) je teorema koja opisuje rezultat izvođenja istog eksperimenta veliki broj puta. LLN predstavlja značajan rezultat koji opravdava neke intuicije vezane za sam pojam vjerovatnoće. Jedna takva intuicija jeste da će relativna frekvencija nekog događaja u nizu eksperimenata biti približno jednaka vjerovatnoći tog događaja. Druga je da će srednja vrijednost slučajne promjenljive dobivena eksperimentom biti približno jednaka očekivanoj vrijednosti dobivenoj na osnovu probablističkog modela. Alternativno tumačenje je da zakon velikih brojeva opravdava primjenjivost aksiomatske teorije vjerovatnoće u praksi.

Neka je $\{X_n\}$ slučajna sekvenca. Slučajna varijabla $S_n = \bar{X}_n$ definirana kao:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n) \quad (3.16)$$

se naziva srednja vrijednost uzorka X_1, X_2, \dots, X_n . Prema LLN, prosječna vrijednost rezultata dobivenih iz velikog broja ispitivanja teži očekivanoj vrijednosti s povećanjem broja izvršavanja tog eksperimenta. Odnosno, povećavanjem veličine uzorka, odnosno n , prosječna vrijednost slučajne varijable \bar{X}_n se „približava” očekivanoj vrijednosti η_X .

U skladu sa načinom „približavanja” očekivanoj vrijednosti, odnosno načinu konvergencije, razlikuje se slabi i jaki zakon velikih brojeva.

Slabi zakon velikih brojeva navodi da za $\{X_n\}$ sekvencu slučajnih promjenljivih sa očekivanjem η_X i ograničenom varijansom, prosječna vrijednost uzorka *po vjerovatnoći konvergira* prema očekivanoj vrijednosti:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \eta_X \quad \text{kada } n \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

odnosno za $\forall \epsilon > 0$ slijedi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \eta_X| < \epsilon) = 1 \quad (3.18)$$

Dakle, slabi zakon kaže da će za bilo koji pozitivan, ma koliko mali broj ϵ , s dovoljno velikim uzorkom postojati vrlo velika vjerovatnoća da će prosjek uzorka biti blizu očekivane vrijednosti, odnosno unutar navedene margine. Slabi zakon velikih brojeva govori o konvergenciji vjerovatnoće da će se ostvariti navedena hipoteza. Važno je napomenuti da se u literaturi koristi i manje općenita pretpostavka, koja zahtijeva da $\{X_n\}$ budu IID, a naziva se jaki zakon velikih brojeva.

Jaki zakon velikih brojeva navodi da prosjek uzorka za sekvencu $\{X_n\}$ IID slučajnih varijabli sa očekivanjem η_X i konačnom varijansom *gotovo sigurno* konvergira u očekivanu vrijednost:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{g.s.} \eta_X \quad \text{kada} \quad n \rightarrow \infty \quad (3.19)$$

odnosno:

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \eta_X\right) = 1 \quad (3.20)$$

To znači da kako broj izvršavanja eksperimenta n ide u beskonačnost, vjerovatnoća da prosjek uzorka konvergira očekivanoj vrijednosti, jednaka je jedinici. Važno je napomenuti da "g.s." u relaciji (3.19) znači „*gotovo sigurno*” ili „*skoro pa sigurno*” (eng. *almost surely*). „Skoro sigurna” konvergencija također se zove i konvergencija slučajne promjenljive u "jakom" smislu.

Programski kod 3.1 demonstrira kako kod eksperimenta bacanja kockice za igru, srednja vrijednost konvergira ka očekivanoj vrijednosti sa povećanjem broja izvršenih bacanja.

PROGRAMSKI KOD 3.1

```
N = 1000
sr_vrijednost=[]
bacanja_kockice=[]
broj_bacanja = np.arange(0,N)
suma = 0.0

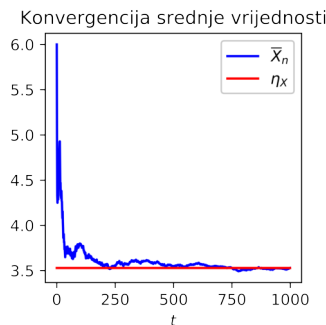
for n in broj_bacanja:
    bacanja_kockice.append(np.random.choice(np.arange(1,7)))
    suma = suma + bacanja_kockice[n]
    sr_vrijednost.append(suma/(n+1))

ocekivana_vrijednost = np.mean(bacanja_kockice)

print("Očekivana vrijednost kod bacanja kockice za igru iznosi: ",
      ocekivana_vrijednost)

ssp.slprom1D.grafik(broj_bacanja,sr_vrijednost, broj_bacanja,
                   ocekivana_vrijednost*np.ones(len(broj_bacanja)),
                   naslov = "Konvergencija srednje vrijednosti",
                   legenda = ['$\overline{X}_n$', '$\eta_X$'])
```

Očekivana vrijednost kod bacanja kockice za igru iznosi: 3.53



3.4 Primjene zakona velikih brojeva

LLN je važan jer garantuje stabilne dugoročne rezultate za prosjeke nekih slučajnih događaja. Na primjer, dok kockarnica može izgubiti novac jednim okretanjem ruleta, njena će zarada težiti prema predvidivom postotku tokom velikog broja okretaja.

Naime, važno je zapamtiti da je zakon primjenljiv kada se razmatra veliki broj opažanja. Stoga, ne postoji princip koji kaže da će se za mali broj opažanja prosječna vrijednost podudarati s očekivanom vrijednošću ili da će niz jedne vrijednosti odmah biti "uravnotežen" s ostalima (poznat kao tzv. „zabluda kockara” - eng. „*gambler's fallacy*”). Zabluda je obično je povezana s kockanjem, gdje se može vjerovati, na primjer, da je vjerovatnoća da novčić padne na „pismo” u sljedećem bacanju veća nego što je obično, jer je nedavno bilo manje od uobičajenog broja padanja na „pismo”. Ključno je shvatiti da su ishodi u različitim bacanjima statistički neovisni, odnosno vjerovatnoća takvih događaja ne ovisi o onome što se dogodilo u prošlosti. Obzirom da je vjerovatnoća dobijanja n -tog uzastopnog pisma kao i bilo kojeg drugog događaja jednaka $(1/2)^n$, jasno je su događaji "5 pisama u nizu" i "prvo 4 pisma, a zatim jedna glava" jednako vjerovatni, pri čemu svaki ima vjerovatnoću $1/32$. Iako niz od pet glava ima malu vjerojatnost (oko 3%), kao uostalom i svaki drugi ishod, nespornost leži u neshvatanju da je to mjera vjerovatnoće prije nego što se baci prvi novčić. Nakon prva četiri bacanja, obzirom na neovisnost bacanja, opet je jednako vjerovatno hoće li pasti pismo ili glava (50%).

Zakon velikih brojeva ima široku primjenu. Uticaj nesistematskih greški pri mjerenju se može smanjiti ponavljanjem mjerenja. Također, zakon velikih brojeva ima veliki praktični značaj za industriju osiguranja. Naime, što je veći broj osiguranih osoba i dobara koje su izložene jednakom riziku, to je manji uticaj slučaja. Pa tako, ukoliko se prethodnom analizom otkrije da će 5 od 150 ljudi pretrpjeti ozbiljnu i skupu povredu tokom godine, kompanija osiguravanjem samo 10 ili 25 ljudi se suočava sa daleko većim rizicima nego ako može osigurati svih 150 ljudi. Time će kompanija biti sigurnija da će 150 osiguranika zajedno platiti dovoljno da pokriju potraživanja pet osiguranika koji su pretrpjeli ozbiljne povrede.

3.5 Centralna granična teorema

Kao i Zakon velikih brojeva, Centralna granična teorema (eng. *Central Limit Theorem* - *CLT*) pokušava da objasni granično ponašanje varijanse slučajne promjenljive kada se broj posmatranja približava beskonačnosti. Centralna granična teorema daje objašnjenje zašto se normalna raspodjela susreće toliko često u svakodnevnom životu i u praksi. Ona objašnjava ponašanje vjerovatnoće sume velikog broja slučajnih varijabli, pod određenim uslovima koji su dosta blagi sa aspekta praktičnih primjena. U najjednostavnijem obliku, CLT govori da će suma nezavisnih slučajnih varijabli imati približno normalnu raspodjelu. Također, određuje i uslove pod kojima distribucija očekivanih vrijednosti dovoljno velikog broja nezavisnih slučajnih varijabli, svaka sa konačnom aritmetičkom sredinom i varijansom, približno odgovara normalnoj (Gaussovoj) distribuciji.

Centralna granična teorema tvrdi da ako je sekvenca $\{X_n\}$ sekvenca IID slučajnih promjenljivih sa konačnim očekivanjem η_X i konačnom varijansom σ^2 , tada sekvenca:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \eta_X}{\sigma} \quad (3.21)$$

konvergira po distribuciji ka normalnoj raspodjeli sa nultom očekivanom vrijednosti i jediničnom standardnom devijacijom.

Drugim riječima, ako se pretpostavi da su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne promjenljive koje imaju istu, ne nužno normalnu distribuciju, tada važi pravilo da sa porastom n , distribucija suma i aritmetičkih sredina (očekivanih vrijednosti) slučajnih promjenljivih teži ka normalnoj distribuciji. Ilustracija je data programskim kodom 3.2.

PROGRAMSKI KOD 3.2

```
# Generiranje N = 5000 slučajnih promjenljivih
# sa M = 500 uzoraka iz Rayleighove distribucije

M = 500 #Broj uzoraka iz distribucije
N = 5000 #Broj slučajnih promjenljivih
eta = 3

oc_vrijednost = np.sqrt(np.pi/2)*eta
sigma = np.sqrt(2*np.pi/2)*eta
X_n = np.empty([N,M])
X_n_norm = np.empty([N,M])

for n in range(N):
    X_n[n,:] = np.random.rayleigh(eta,M)
    X_n_norm[n,:] = (X_n[n,:] - oc_vrijednost)/sigma

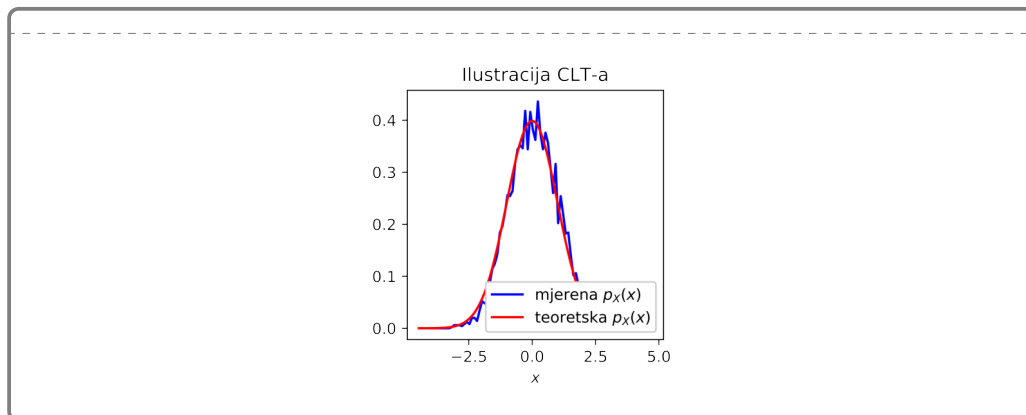
S_n = np.empty([N])
n_vektor = np.arange(0,N)

for n in n_vektor:
    S_n[n] = (1/np.sqrt(M))*np.sum(X_n_norm[n,:])

x, p_Sn = ssp.slprom1D.pdf(S_n, prikaz = False)

def p_teoretsko(x):
    return (1/np.sqrt(2*np.pi))*np.exp(-(x**2)/2)

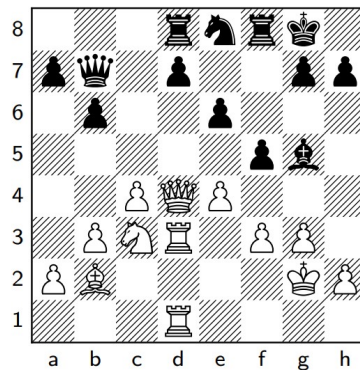
ssp.slprom1D.grafik(x, p_Sn, x, p_teoretsko(x),
    naslov = "Ilustracija CLT-a",
    legenda = ['mjerena $p_X(x)$', 'teoretska $p_X(x)$'],
    lokacija_lgd = 'lower right', x_labela = '$x$')
```



Postoji nekoliko zanimljivih posljedica CLT. Suma velikog broja IID slučajnih varijabli će imati raspodjelu koja aproksimira Gaussovu, nezavisno od raspodjele varijabli koje učestvuju u sumi. Nadalje, može se pokazati da će suma nezavisnih slučajnih varijabli imati funkciju vjerojatnoće koja je jednaka konvoluciji funkcija vjerojatnoće pojedinih varijabli. To implicira da je konvolucija pozitivne funkcije samom sobom mnogo puta rezultira približno Gaussovom funkcijom. Odavde slijedi da će kaskada filtera sa pokretnom srednjom vrijednošću (eng. *moving average*) imati impulsni odziv oblika Gaussove funkcije i sl. Tako npr. bacanje jedne kockice za igru se podvrgava uniformnoj raspodjeli, dok se slučajna varijabla koja predstavlja zbir brojeva od n bačenih kockica za igru podvrgava Gaussovoj raspodjeli kada n postane dovoljno veliko.

Zadaci za samostalan rad

- Alma i Sara dogovorile su sastanak u 14 h. Neka je njihov dolazak opisan slučajnim trenutkom vremena između 14 i 15 h. Također, ona koja stigne na dogovoreno mjesto prva, čeka drugaricu 20 min, nakon čega odlazi. Kolika je vjerovatnoća da se sretnu?
- Neispravna mašina za proizvodnju vaza, na slučajan način proizvodi cilindrične vaze radijusa R (iz uniformne raspodjele $[7.5, 12.5]$) i visine H (iz uniformne raspodjele $[25, 35]$), gdje su obje dimenzije izražene u centimetrima. Neka su R i H nezavisne. Koja je očekivana zapremina slučajno odabrane vaze?
- Pozicija na šahovskoj ploči nakon 17. poteza prikazana je na slici 3.1. Ako je poznato da sljedeći potez pripada crnom igraču koji će sigurno igrati sa lovcom, opisati potez pomoću slučajnog vektora s dvije slučajne promjenljive koje odgovaraju redu i koloni, tako da pozicije u kojima lovac nije napadnut budu dvostruko vjerojatnije od pozicija u kojima je lovac napadnut. Jesu li elementi slučajnog vektora korelirani? Jesu li nezavisni?



Slika 3.1: Pozicija na ploči za Zadatak 3.

- Zajednička funkcija gustine vjerovatnoće slučajnog vektora (X, Y) je opisana izrazom:

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} ke^{-(ax+by)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu su $k, a, b \in \mathbf{R}$

- Da li je zadana funkcija gustine vjerovatnoće dobro definirana? Ako je moguće, pronaći vrijednosti parametara a, b i k za koje se dobije ispravno definirana zajednička funkcija gustine vjerovatnoće.
 - Šta se može reći o nezavisnosti komponenti slučajnog vektora?
- Bacaju se dvije igraće kocke. Neka se definišu dvije slučajne promjenljive $X =$ "veći od brojeva koji su pali" i

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{ako je zbir brojeva na na obje kocke paran} \\ 1, & \text{ako je zbir brojeva na obje kocke neparan} \end{cases}$$

- Odrediti kovarijansu $\text{Cov}(X, Y)$ i koeficijent korelacije $\rho_{X,Y}$ slučajnog vektora $[X, Y]$.

- (b) Odrediti vjerovatnoće $P(3 < X \leq 6, Y = 1)$ i $P(2 \leq X < 4, Y < 1)$.
 - (c) Kolika je vrijednost funkcije raspodjele vjerovatnoće $P_{[X,Y]}(x, y)$ slučajnog vektora $[X, Y]$ u tački $[3, 1]$?
 - (d) Jesu li slučajne promjenljive X i Y međusobno zavisne?
 - (e) Odrediti očekivanje kompozicije $E[X \cdot Y^{17}]$.
6. Neka su X i Y dvije slučajne promjenljive koje poprimaju vrijednosti iz skupa $\{-1, 0, 1\}$. Ako je zajednička vjerovatnoća slučajnog vektora $P(X, Y)$ data tablicom

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/16	2/16	1/16
0	1/16	4/16	3/16
1	1/16	2/16	1/16

odrediti:

- (a) marginalne funkcije gustine vjerovatnoće slučajnih promjenljivih X i Y te ispitati nezavisnost i nekoreliranost komponenti vektora $[X, Y]$,
- (b) funkcije gustine i raspodjele vjerovatnoće promjenljive $U = X^2$,
- (c) funkcije gustine i raspodjele vjerovatnoće promjenljive $V = XY$, te
- (d) zajedničku raspodjelu slučajnog vektora $Z = [X^2, Y^2]$.

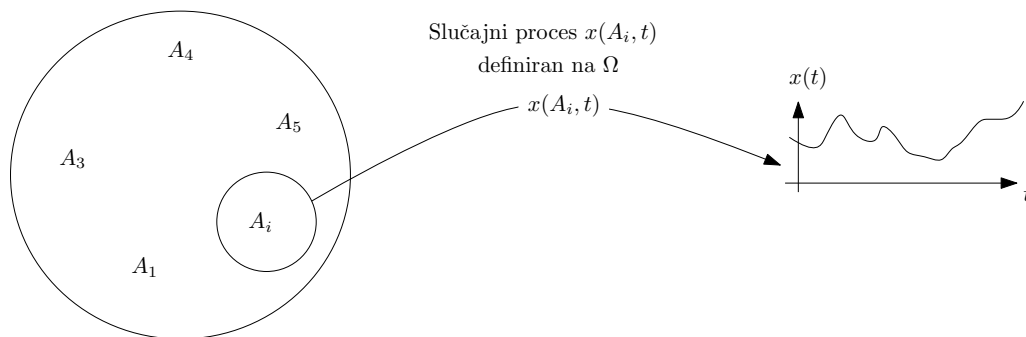
Jesu li komponente slučajnog vektora $Z = [X^2, Y^2]$ nezavisne? Jesu li nekorelirane?

4. Slučajni procesi

4.1 Uvodni pojmovi

Slučajni proces predstavlja poopštenje koncepta slučajne varijable i vektora slučajnih varijabli. To je model koji omogućava razumijevanje i analizu jako velikog broja tipičnih signala koji se susreću u praksi, kao što su: signal šuma, audio signal, signal izvora informacija, signal koji se prenosi komunikacionim kanalima i mnogi drugi.

Naime, uvođenjem *slučajne promjenljive* X se svakom ishodu eksperimenta pridružila neka vrijednost na realnoj osi. Prilikom uvođenja *slučajnog vektora* \mathbf{X} podrazumijevalo se pridruživanje jednog vektora svakom eksperimentu, pri čemu su članovi vektora bile slučajne promjenljive. U opštem slučaju, **slučajni proces** podrazumijeva pridruživanje jedne funkcije $X(t)$ realnog parametra t svakom ishodu eksperimenta, pri čemu funkcija ovisi od samog ishoda. Npr. ukoliko je realizacija eksperimenta data sa ξ , tada se toj realizaciji može pridružiti $X(t, \xi) = A(\xi)\sin(\omega_0 t + \phi(\xi))$. De facto, to je realizacija koja na neki način ovisi od ishoda eksperimenta ($X(\xi)$), ali isto tako ima određenu formu s aspekta vremena ($X(t)$).



Prostor elementarnih događaja Ω

Slika 4.1: Ilustracija koncepta slučajnog procesa

Slučajni proces u opštem slučaju predstavlja familiju realnih ili kompleksnih funkcija $\{X(t)\}$. Svaka $X(t)$ predstavlja jednu moguću „realizaciju”. Tipično, realizacije se vežu za indeks koji se historijski, a i u skladu sa primjenom, označava vremenskom promjenljivom t . U datim vremenskim trenucima t_1 , vrijednost svake od realizacija $X(t_k) = X_k$ mora predstavljati *slučajnu promjenljivu*.

Ukoliko je slučajna promjenljiva $X(t_k) = X_k$ diskretna, odnosno može poprimiti vrijednosti iz konačnog ili prebrojivog skupa, tada se slučajni proces zove *diskretni slučajni proces*. Ukoliko je slučajna promjenljiva $X(t_k) = X$ za bilo koje t_k kontinualna, tada se proces naziva *kontinualnim*.

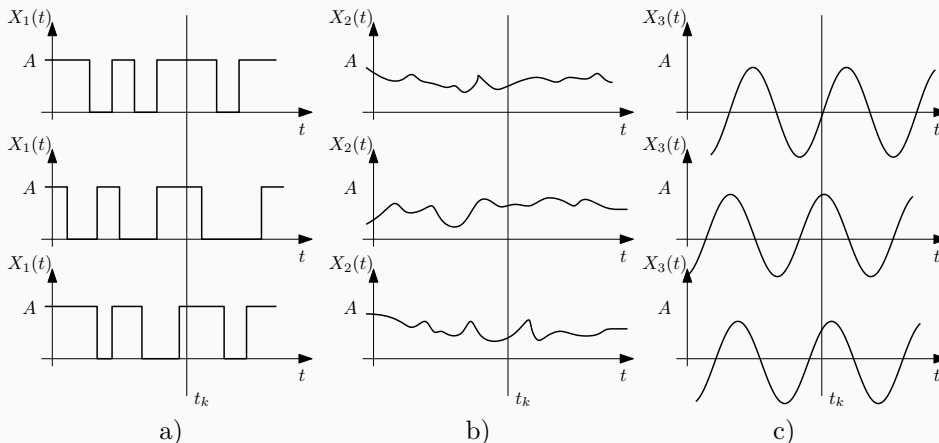
Poseban tip slučajnih procesa se naziva *deterministički slučajni proces*. To je slučajni proces kojem odgovara familija funkcija $\{X(t, a)\}$ gdje t predstavlja vrijeme, a promjenljiva a predstavlja parametar (ili parametre). Za jednu realizaciju parametar a je konstantan, ali predstavlja slučajnu promjenljivu.

Primjer diskretnog slučajnog procesa je također proces bacanja novčića ili kockice pri čemu se u svakom bacanju može pojaviti samo neka od predefiniраниh vrijednosti (pismo, glava) odnosno (1,2,3,4,5,6). Primjer kontinualnog slučajnog procesa može biti mjerenje temperature u prostoriji.

Primjer 4.1:

Navesti primjer a) diskretnog slučajnog procesa, b) kontinualnog slučajnog procesa, c) determinističkog slučajnog procesa.

Rješenje:



Slika 4.2: Primjeri različitih procesa: a) $\{X_1(t)\}$ je diskretni slučajni proces jer je $X_1(t_k)$ diskretna slučajna promjenljiva za $t = t_k$, b) $\{X_2(t)\}$ je kontinualan slučajni proces jer je $X_2(t_k)$ kontinualna slučajna promjenljiva za $t = t_k$, c) $\{X_3(t)\}$ je deterministički slučajni proces jer je $X_3(t_k, a) = A \cos(\omega_0 t_k + a)$ slučajna promjenljiva koja ovisi od a , ali je uz poznavanje a za bilo koje t_k jednoznačno determinirana.

Tri različita izvora signala se mogu opisati sa tri različita slučajna procesa (slika 4.2):

- Izvor br.1 - signal na izlazu iz izvora se mijenja svakih T sekundi, i u svakom od tih trenutaka kT on može da poprimi vrijednosti 0 ili A . U tom slučaju izlazni

signali izvora predstavljaju diskretne slučajne procese, jer $X(t_k)$ može poprimiti samo vrijednosti iz skupa $\{0, A\}$.

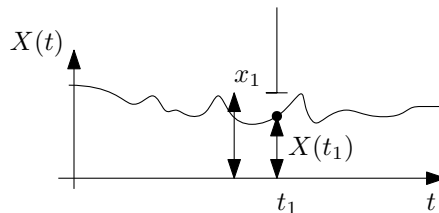
- Izvor br.2 - signal na izlazu iz izvora se kontinualno mijenja, pri čemu može poprimiti bilo koju vrijednost iz intervala $[0, A]$. To znači da se radi o kontinualnom slučajnom procesu.
- Izvor br.3 - signal na izlazu iz izvora je sinusni signal oblika $X(t, a) = A\cos(\omega_0 t + a)$, pri čemu je a slučajna uniformno raspoređena veličina koja za konkretnu realizaciju može poprimiti bilo koju vrijednost iz intervala $[0, 2\pi)$. Ovo predstavlja deterministički slučajni proces, jer je svaka pojedina realizacija praktično deterministički signal, iako zbog nepoznavanja faze a postoji slučajnost u zapisu promjenljivih.

4.2 Funkcije vjerovatnoće slučajnih procesa

Slučajna promjenljiva $X(t_k)$ ima svoju funkciju raspodjele vjerovatnoće koja se označava sa $P(t_k, x)$, a zapravo predstavlja **funkciju raspodjele vjerovatnoće** slučajnog procesa:

$$P(t_k, x) = \text{vjerovatnoća da } [X(t_k) \leq x] \quad (4.1)$$

Funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajnog procesa se najbolje ilustruje na primjeru. Naime, neka je potrebno odrediti $P(t_1, x_1) = P(8, 5)$. To znači da je potrebno odrediti vjerovatnoću da će realizacija $X(8)$ biti manja od vrijednosti 5. U skladu sa slikom 4.3, jasno je da za proizvoljnu vrijednost x_1 , $P(t_1, x_1)$ daje vjerovatnoću da slučajni proces $\{X(t)\}$ u trenutku t_1 prođe ispod „kapije” označene sa x_1 .



Slika 4.3: Ilustracija smisla vrijednosti funkcije raspodjele vjerovatnoće slučajnog procesa $P(t_1, x_1)$

Na osnovu relacije (4.1) se definira i **jednodimenzionalna gustina vjerovatnoće slučajnog procesa** (ili gustina vjerovatnoće procesa *prvog reda*):

$$p(t_k, x) = \frac{dP(t_k, x)}{dx} \quad (4.2)$$

što zapravo predstavlja vjerovatnoću:

$$p(t_k, x)dx = \text{vjerovatnoća da } [x < X(t_k) \leq x + dx] \quad (4.3)$$

ili drugim riječima, $p(x, t_k)dx$ daje vjerovatnoću da realizacija u datom trenutku t_k uzme vrijednost između x i $x + dx$. Relacije (4.3) se može jednostavno izvesti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{vjerovatnoća da } [x < X(t_k) \leq x + dx] &= P(t_k, x + dx) - P(t_k, x) \\ &= \frac{dP(t_k, x)}{dx} dx \\ &= p(t_k, x) dx \end{aligned} \quad (4.4)$$

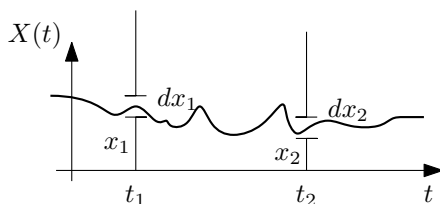
Od interesa je istražiti mogućnost predviđanja vrijednosti slučajnog procesa. U tu svrhu se uvodi **dvodimenzionalna funkcija gustine vjerovatnoće** (ili gustina vjerovatnoće procesa *drugog reda*) koja predstavlja gustinu vjerovatnoće zajedničkog događaja koji se sastoji u tome da realizacija $X(t)$ u trenutku t_1 uzme vrijednost između x_1 i $x_1 + dx_1$, a u trenutku t_2 vrijednost između x_2 i $x_2 + dx_2$:

$$\begin{aligned} \text{vjerovatnoća da } [x_1 < X(t_1) \leq x_1 + dx_1, \\ x_2 < X(t_2) \leq x_2 + dx_2] &= p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

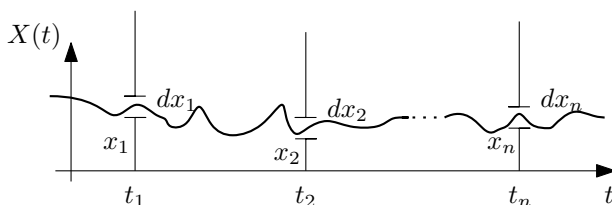
Analogno se mogu definirati i višedimenzionalne gustine vjerovatnoće:

$$\text{vjerovatnoća da } \left[\bigwedge_{i=1, \overline{n}} [x_i < X(t_i) \leq x_i + dx_i] \right] = p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

Ilustracija dvodimenzionalne i višedimenzionalne gustine vjerovatnoće je data slikama 4.4 i 4.5. Naime, one opisuju vjerovatnoću da će slučajni proces u određenim sukcesivnim vremenskim trenucima t_i proći kroz „kapije” između x_i i $x_i + dx_i$ ($i = 1 \dots n$).



Slika 4.4: Ilustracija dvodimenzionalne funkcije gustine vjerovatnoće slučajnog procesa $p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2$



Slika 4.5: Ilustracija višedimenzionalne funkcije gustine vjerovatnoće slučajnog procesa $p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

Oдавде је јасно да су вишедимenzionalne функције raspodjele vjerovatnoće date sa:

$$P(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

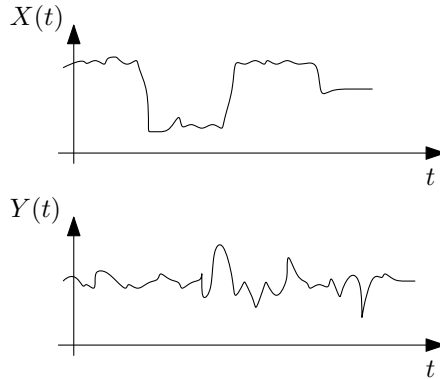
4.2.1 Stacionarnost slučajnih procesa

Proces se naziva **stacionaran u užem smislu** ako za bilo koju vrijednost t_0 višedimenzionalne spektralne gustine zadovoljavaju uslov:

$$p(t_1 + t_0, x_1; t_2 + t_0, x_2; \dots; t_n + t_0, x_n) = p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) \quad (4.6)$$

To implicira da ako je proces stacionaran u užem smislu tada jednodimenzionalna funkcija gustine vjerovatnoće ne zavisi od vremena:

$$p(t_1 + t_0, x) = p(t_1, x) = p(x) \quad (4.7)$$



Slika 4.6: Primjer nestacionarnog $\{X(t)\}$ i potencijalno stacionarnog $\{Y(t)\}$ slučajnog procesa

Za slučaj stacionarnog procesa u užem smislu dvodimenzionalna gustina vjerovatnoće zadovoljava:

$$p(t_1 + t_0, x_1; t_2 + t_0, x_2) = p(t_1, x_1; t_2, x_2) \quad (4.8)$$

Ukoliko se usvoji $t_0 = -t_2$ tada vrijedi:

$$p(t_1 + t_0, x_1; t_2 + t_0, x_2) = p(t_1 - t_2, x_1; 0, x_2) = p(\tau, x_1, x_2), \quad (4.9)$$

odnosno, funkcija gustine vjerovatnoće ovisi samo od razlike vremena t_1 i t_2 , a ne i od njihovih vrijednosti.

Slučajni proces je **stacionaran u širem smislu** ako definicija stacionarnosti (4.6) u užem smislu vrijedi samo za $n = 1$ i $n = 2$.

4.3 Uslovne i zajedničke gustine vjerovatnoće slučajnih procesa

Jasno je da prilikom realizacije slučajnog procesa vrijednosti $X(t_k)$ mogu na neki način imati vezu za slučajnom promjenljivom $X(t_{k-1})$. Na slici 4.7 su date dvije realizacije dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$. Kao što se može intuitivno naslutiti, proces $X(t)$ nema naglih i nepredvidivih promjena, pa se sa većom pouzdanosti na osnovu poznavanja prethodnih vrijednosti slučajnog procesa (za $t < t_k$) može predvidjeti vrijednost $X(t_k)$, nego što je to slučaj kod $Y(t_k)$. U tome pomažu uslovne vjerovatnoće slučajnih procesa.

Neka je realizacija $X(t)$ u trenucima t_i uzimala vrijednosti x_i ($i = 1, 2, \dots, n - 1$). Vjerovatnoća da će ova realizacija u trenutku t_n poprimiti vrijednosti $x_n < X(t_n) \leq x_n + dx_n$ je data sa:

$$p_u(t_n, x_n | t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) dx_n = \text{vjerovatnoća } (x_n < X(t_n) \leq x_n + dx_n | X(t_1) = x_1; \dots; X(t_n) = x_n) \quad (4.10)$$

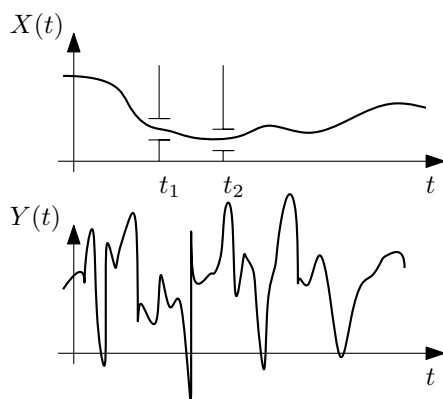
Gustina vjerovatnoće data sa (4.10) naziva se **uslovna gustina** vjerovatnoće slučajnog procesa.

Proces se naziva **čisto slučajan** ako vrijedi:

$$p_u(t_n, x_n | t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) = p(t_n, x_n) \quad (4.11)$$

odnosno, ako prethodne vrijednosti procesa ne utiču na gustinu vjerovatnoće u nekom narednom trenutku. Višedimenzionalna gustina kod ovog tipa procesa je zato jednaka proizvodu jednodimenzionalnih gustina:

$$\begin{aligned} p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n &= p(t_1, x_1) dx_1 p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2 \dots \\ & p_u(t_3, x_3 | t_1, x_1; t_2, x_2) dx_3 \dots \\ & \dots p_u(t_n, x_n | t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) dx_n \\ &= p(t_1, x_1) dx_1 \dots p(t_n, x_n) dx_n \end{aligned}$$



Slika 4.7: Ilustracija potencijalne nezavisnosti slučajnih procesa

Ukoliko se analiziraju dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ tada se može definirati **zajednička dvodimenzionalna gustina** kao:

$$p(t_1, x_1; t_2, y_2) dx_1 dy_2 = \text{vjerovatnoća da } [x_1 < X(t_1) \leq x_1 + dx_1, y_2 < Y(t_2) \leq y_2 + dy_2] \quad (4.12)$$

4.3.1 Međusobna stacionarnost slučajnih procesa

Za dva slučajna procesa se kaže da su *međusobno stacionarni* ako:

- je svaki od njih stacionaran,
- za svako t_0 vrijedi $p(t_1, x_1; t_2, y_2) = p(t_1 + t_0, x_1; t_2 + t_0, y_2)$

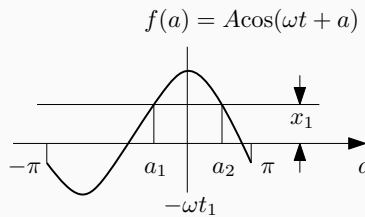
Međusobna gustina tada ima oblik $p(t_1 - t_2 = \tau, x_1, y_2)$.

Primjer 4.2:

Neka je deterministički slučajni proces dat sa $X(t) = A \cos(\omega t + a)$, pri čemu je a slučajna promjenljiva uniformno raspoređena $-\pi \leq a < \pi$, $p(a) = 1/2\pi$. Odrediti funkciju jednodimenzionalne, uslovne i dvodimenzionalne gustine vjerovatnoće ovog slučajnog procesa.

Rješenje:

U svrhu lakšeg razumijevanja rješenja zadatka, bit će prvo data vizualizacija funkcije $f(a) = A \cos(\omega t + a)$:



Zbog činjenice da promjenljiva a ima ravnomjernu gustinu vjerovatnoće, to vrijedi sljedeće (u skladu sa slikom):

$$\begin{aligned} P(t_1, x_1) &= \text{vjerovatnoća da } [X(t_1) \leq x_1] \\ &= \text{vjerovatnoća da } [A \cos(\omega t_1 + a) \leq x_1] \\ &= 1 - \text{vjerovatnoća da } [A \cos(\omega t_1 + a) > x_1] \\ &= 1 - \text{vjerovatnoća da } [a_1 < a < a_2] \\ &= 1 - \frac{a_2 - a_1}{2\pi} \end{aligned}$$

Potrebno je naći a_1 i a_2 izraženo preko x_1 .

Vrijedi da je:

$$A \cos(\omega t_1 + a) = x_1$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right) - \omega t_1 = -(a_1 + \omega t_1) - \omega t_1 = -a_1 - 2\omega t_1 \\ a_1 &= -\arccos\left(\frac{x_1}{A}\right) - \omega t_1 \end{aligned}$$

Odakle slijedi:

$$a_2 - a_1 = 2\arccos\left(\frac{x_1}{A}\right)$$

odnosno:

$$P(t_1, x_1) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right)$$

Po definiciji je:

$$p(t_1, x_1) = \frac{dP(t_1, x_1)}{dx_1}$$

pa slijedi:

$$p(t_1, x_1) = \frac{dP(t_1, x_1)}{dx_1} = \frac{1}{\pi A} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x_1^2}} \quad (4.13)$$

uz uslov $-A \leq x_1 \leq A$. Iz relacije (4.13) se vidi da ova jednodimenzionalna gustina ne ovisi od trenutka t_1 .

Dvodimenzionalna gustina se računa kao:

$$p(t_1, x_1; t_2, x_2) = p(t_1, x_1)p_u(t_2, x_2|t_1, x_1)$$

Ako je u trenutku t_1 vrijednost realizacije bila x_1 , tada je vrijednost a u principu poznata (može da uzme jednu od dvije moguće vrijednosti). Ako je:

$$X(t_1) = x_1 = A\cos(\omega t_1 + a)$$

tada je:

$$a = \pm \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right) - \omega t_1$$

U trenutku t_2 realizacija će biti:

$$X(t_2)' = A\cos(\omega t_2 + a) = A\cos(\omega t_2 - \omega t_1 + \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right))$$

ili:

$$X(t_2)'' = A\cos(\omega t_2 + a) = A\cos(\omega t_2 - \omega t_1 - \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right))$$

Uslovna vjerovatnoća se može modelirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} p_u(t_2, x_2|t_1, x_1) &= \frac{1}{2}\delta[x_2 - X(t_2)'] + \frac{1}{2}\delta[x_2 - X(t_2)''] \\ &= \frac{1}{2}\delta[x_2 - A\cos(\omega t_2 - \omega t_1 + \arccos\left(\frac{x_1}{A}\right))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \delta[x_2 - A \cos(\omega t_2 - \omega t_1 - \arccos(\frac{x_1}{A}))] \\
= & \frac{1}{2} \delta[x_2 - A[\cos(\omega t_2 - \omega t_1) \cos(\arccos(\frac{x_1}{A})) \\
& - \sin(\omega t_2 - \omega t_1) \sin(\arccos(\frac{x_1}{A}))]] \\
& + \frac{1}{2} \delta[x_2 - A[\cos(\omega t_2 - \omega t_1) \cos(\arccos(\frac{x_1}{A})) \\
& + \sin(\omega t_2 - \omega t_1) \sin(\arccos(\frac{x_1}{A}))]] \\
= & \frac{1}{2} \delta[x_2 - x_1 \cos(\omega t_2 - \omega t_1) - \sin(\omega t_2 - \omega t_1) A \sqrt{1 - (\frac{x_1}{A})^2}] \\
& + \frac{1}{2} \delta[x_2 - x_1 \cos(\omega t_2 - \omega t_1) + \sin(\omega t_2 - \omega t_1) A \sqrt{1 - (\frac{x_1}{A})^2}] \\
= & \frac{1}{2} \delta[x_2 - x_1 \cos(\omega t_2 - \omega t_1) - \sin(\omega t_2 - \omega t_1) \sqrt{A^2 - x_1^2}] \\
& + \frac{1}{2} \delta[x_2 - x_1 \cos(\omega t_2 - \omega t_1) + \sin(\omega t_2 - \omega t_1) \sqrt{A^2 - x_1^2}]
\end{aligned}$$

Konačno:

$$\begin{aligned}
p(t_1, x_1; t_2, x_2) = & \frac{\delta[x_2 - x_1 \cos(\omega(t_2 - t_1)) - \sin(\omega(t_2 - t_1)) \sqrt{A^2 - x_1^2}]}{2\pi \sqrt{A^2 - x_1^2}} \\
& + \frac{\delta[x_2 - x_1 \cos(\omega(t_2 - t_1)) + \sin(\omega(t_2 - t_1)) \sqrt{A^2 - x_1^2}]}{2\pi \sqrt{A^2 - x_1^2}}
\end{aligned}$$

Pošto jednodimenzionalna gustina ne zavisi od t , a dvodimenzionalna gustina zavisi samo od $t_2 - t_1$ tada je ovaj proces **stacionaran u širem smislu**. Ilustracija ovog zadatka je data programskim kodovima 4.1 i 4.2.

PROGRAMSKI KOD 4.1

```

M = 500 # Broj realizacija slučajnog procesa
N = 500 # Broj uzoraka u jednom slučajnom procesu

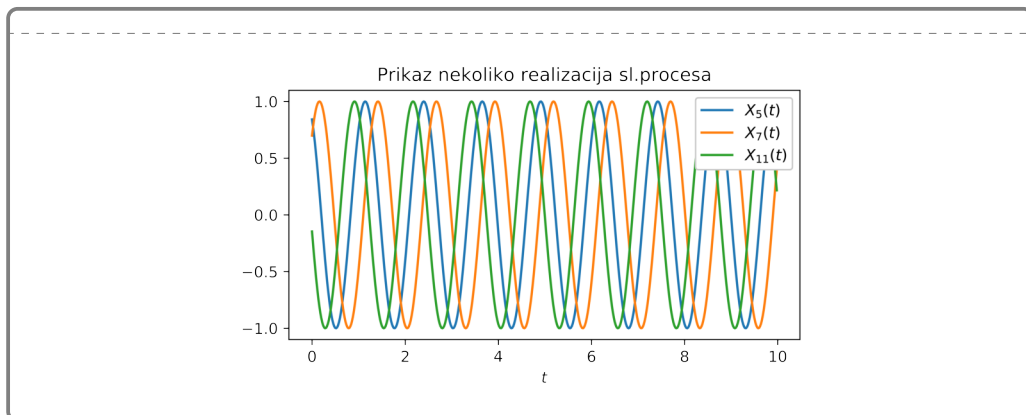
# Generisanje vremenske baze
t = np.arange(0, 10, 10/N)

X_t = np.empty((M, N))
a = np.random.uniform(-np.pi, np.pi, M)
A = 1; w = 5;

# PROCES
for k in range(M):
    X_t[k,:] = A * np.cos(w*t + a[k])

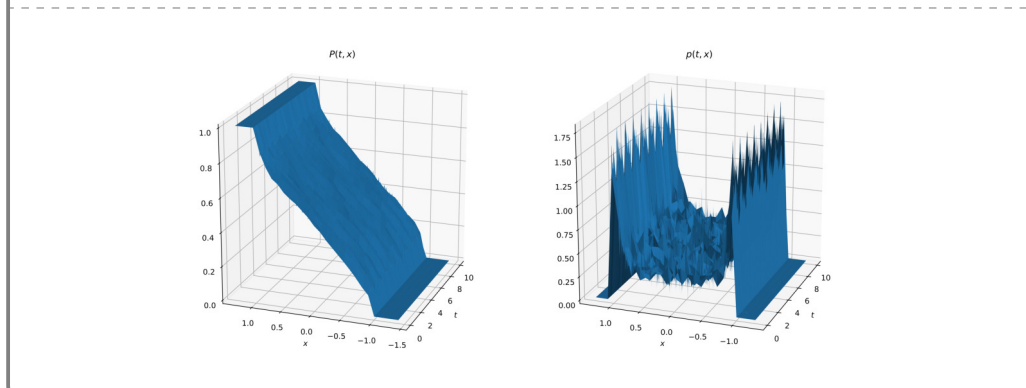
ssp.sproc.realizacije(t, X_t, indksi = [5,7,11],
                      naslov = "Prikaz nekoliko realizacija sl.procesa")

```



PROGRAMSKI KOD 4.2

```
# Jednodimenzionalna gustina
ssp.slproc.PDF(t,X_t);
ssp.slproc.pdf(t,X_t);
```



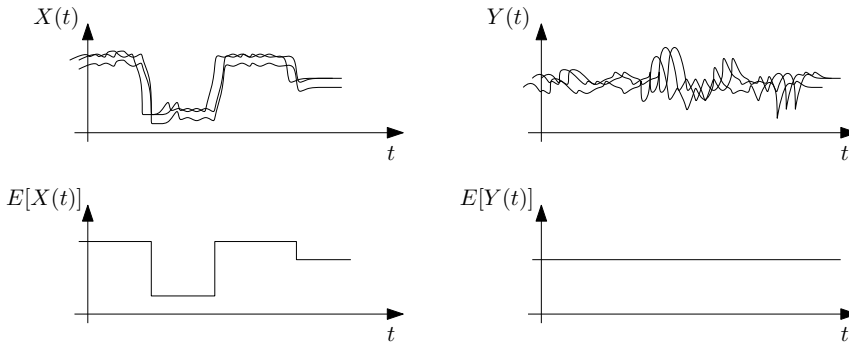
4.4 Očekivane vrijednosti slučajnih procesa

Analogno razmatranjima koja su pokazana u prethodnim poglavljima, a koja su se ticala jedne slučajne promjenljive te slučajnog vektora, pojmovi kao što su očekivana vrijednost ili očekivana srednjekvadratna vrijednost se mogu definirati i za slučajne procese. Osim toga, za slučajne procese se mogu definirati i novi pojmovi, kao što su autokorelaciona funkcija i spektralna gustina.

Očekivana vrijednost slučajnog procesa $\{X(t)\}$ se definira kao:

$$\eta_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(t,x)dx \tag{4.14}$$

Detaljnijom analizom relacije (4.14) može se zaključiti da očekivana vrijednost procesa u općem slučaju nije skalar, već također vremenska funkcija, koja za neko fiksno $t = t_k$ pokazuje koja je očekivana vrijednost slučajne promjenljive $X(t_k)$. Ona praktično

Slika 4.8: Vizualizacija očekivanih vrijednosti slučajnih procesa $\{X(t)\}$ i $\{Y(t)\}$

pokazuje kako se “mijenja” očekivana vrijednost slučajne promjenljive u vremenu, ili daje “srednju vrijednost” procesa. Također, očekivana vrijednosti determinističkog signala je jednaka tom istom signalu.

Za *stacionarni slučajni proces* funkcija gustine vjerovatnoće ne ovisi od vremena pa ni očekivana vrijednost procesa ne ovisi od vremena ($\eta_X(t) = \eta_X$).

Očekivana kvadratna vrijednost slučajnog procesa se definira kao:

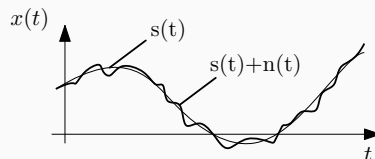
$$\sigma_X^2(t) = E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(t, x) dx \quad (4.15)$$

Primjer 4.3:

Neka se signal $x(t)$ sastoji iz determinističke funkcije $s(t)$ i šuma $n(t)$ sa gustinom vjerovatnoće $p_N(t, n) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & -A \leq n \leq A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$. Odrediti očekivanu vrijednost i očekivanu srednjekvadratnu vrijednost slučajnog procesa.

Rješenje:

Korištenjem sljedeće vizualizacije:



može se uočiti da vrijedi:

$$s(t_1) - A \leq x(t_1) \leq s(t_1) + A$$

$$p_X(t_1, x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2A}, & S(t_1) - A \leq x_1 \leq S(t_1) + A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ovo implicira da, ako se signali $x(t)$, $s(t)$ i $n(t)$ modeliraju kao procesi $\{X(t)\}$, $\{S(t)\}$ i $\{N(t)\}$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \eta_X(t_1) = E[X(t_1)] &= E[S(t_1) + N(t_1)] \\
 &= \int_{S(t_1)-A}^{S(t_1)+A} x_1 p(t_1, x_1) dx_1 \\
 &= \int_{S(t_1)-A}^{S(t_1)+A} x_1 \frac{1}{2A} dx_1 \\
 &= \left. \frac{x_1^2}{4A} \right|_{S(t_1)-A}^{S(t_1)+A} \\
 &= \frac{2S(t_1) \cdot 2A}{4A} \\
 &= S(t_1)
 \end{aligned}$$

Ovo implicira da ako je očekivana vrijednost šuma jednaka nuli, tada je očekivana vrijednost procesa jednaka determinističkom signalu $E[X(t)] = S(t)$!

Nadalje, srednjekvadratna vrijednost je data sa:

$$\begin{aligned}
 E[(S(t) + N(t))^2] &= E[S^2(t) + 2S(t)N(t) + N^2(t)] \\
 &= E[S^2(t)] + E[2S(t)N(t)] + E[N^2(t)] \\
 &= S^2(t) + 2S(t)E[N(t)] + E[N^2(t)] \\
 &= S^2(t) + 2S(t) \cdot 0 + E[N^2(t)]
 \end{aligned}$$

Obzirom da je:

$$\begin{aligned}
 E[N^2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 p_N(t, n) dn \\
 &= \int_{-A}^{+A} n^2 \frac{1}{2A} dn \\
 &= \left. \frac{1}{2A} \frac{n^3}{3} \right|_{n=-A}^{n=A} \\
 &= \frac{1}{6A} 2A^3 \\
 &= \frac{A^2}{3}
 \end{aligned}$$

Tada vrijedi:

$$E[(S(t) + N(t))^2] = S^2(t) + \frac{A^2}{3}$$

Primjer 4.4:

Neka je signal $X(t)$ deterministički slučajni proces $X(t) = A\cos(\omega t + a)$ gdje je a uniformno raspoređena slučajna promjenljiva na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odrediti očekivanu vrijednost i očekivanu srednjekvadratnu vrijednost slučajnog procesa.

Rješenje:

Gustina vjerovatnoće slučajnog procesa je izračunata u Primjeru 4.3. Očekivana vrijednost slučajnog procesa je data sa:

$$\begin{aligned}\eta_X(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xp(t, x)dx \\ &= \int_{-A}^{+A} x \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

što slijedi iz neparnosti funkcije pod integralom. Također:

$$\begin{aligned}E[X^2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(t, x) dx \\ &= \int_{-A}^{+A} x^2 \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} x = A\cos(t) \\ dx = -A\sin(t)dt \\ x \in [-A, A] \\ t \in [-\pi, 0] \end{array} \right| \\ &= \int_{-\pi}^0 A^2 \cos^2(t) \frac{1}{-\pi A\sin(t)} (-A\sin(t)) dt \\ &= \frac{A^2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos^2(t) dt \\ &= \frac{A^2}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} (\cos(2t) + 1) dt \\ &= \frac{A^2}{\pi} \frac{1}{2} (\pi) = \frac{A^2}{2}\end{aligned}$$

Drugi pristup u određivanju $E[X^2(t)]$ je posmatranje $X(t)$ kao funkcije od a . Tada slijedi:

$$G(a) = X(t, a) = A\cos(\omega t + a) \quad (4.16)$$

Sada je:

$$E[G(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(a)p(t, a)da$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{+\pi} A \cos(\omega t + a) \frac{1}{2\pi} da \\
&= 0
\end{aligned}$$

Analogno, očekivana srednjekvadratna vrijednost se računa na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
E[G^2(a)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(a))^2 p(t, a) da \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} (A \cos(\omega t + a))^2 \frac{1}{2\pi} da \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \frac{1 + \cos(2(\omega t + a))}{2} \frac{1}{2\pi} da \\
&= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A^2}{4\pi} da \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

4.5 Korelacione funkcije slučajnih procesa

Korelacione funkcije pomažu u određivanju ili ispitivanju zavisnosti događaja.

Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$ se definira kao:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \quad (4.17)$$

gdje je $p(t_1, x_1; t_2, x_2)$ dvodimenzionalna gustina slučajnog procesa $X(t)$. Autokorelaciona funkcija zapravo predstavlja mijesani moment dvije slučajne promjenljive - jedna je vrijednost slučajnog procesa u trenutku t_1 , odnosno $X(t_1)$, a druga je vrijednost slučajnog procesa u trenutku t_2 , odnosno $X(t_2)$. Interesantno je i da se autokorelaciona funkcija može zapisati kao:

$$R_{XX}(t, t + \tau) = E[X(t)X(t + \tau)] \quad (4.18)$$

Za čisto slučajni proces jasno je da vrijedi:

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(t_1, x_1) p(t_2, x_2) dx_1 dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p(t_1, x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 p(t_2, x_2) dx_2 \\
&= E[X(t_1)]E[X(t_2)] \\
&= \eta_X(t_1)\eta_X(t_2)
\end{aligned}$$

Primjer 4.5:

Neka se želi predvidjeti vrijednost slučajnog procesa $X(t)$ u trenutku $t = t_2$, ukoliko je poznata vrijednost slučajne promjenljive $X(t_1)$. Neka je hipoteza da su slučajne promjenljive povezane na način da vrijedi $X(t_2) = \alpha X(t_1)$. Odrediti optimalnu vrijednost koeficijenta α .

Rješenje:

U trenutku $t = t_2$ stvarna vrijednost slučajne promjenljive će biti $X(t_2)$, a predviđena $\alpha X(t_1)$. Optimalna vrijednost α je ona za koju se dobiva minimalna očekivana vrijednost kvadrata greške predviđanja:

$$\begin{aligned} J(t)|_{t=t_2} &= E[e^2(t)]|_{t=t_2} \\ &= E[(X(t_2) - \alpha X(t_1))^2] \\ &= E[X^2(t_2)] - 2\alpha [X(t_2)X(t_1)] + E[\alpha^2 X^2(t_1)] \\ &= \sigma_X^2(t_2) + \alpha^2 \sigma_X^2(t_1) - 2\alpha R_{XX}(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Minimalna greška se ostvaruje za:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0$$

odnosno:

$$\alpha = \frac{R_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma_X^2(t_1)}$$

Ako neki slučajni proces $\{X(t)\}$ ima očekivanu vrijednost $\eta_X(t)$, tada se može izvesti **centrirani slučajni proces**:

$$X_c(t) = X(t) - \eta_X(t) \quad (4.19)$$

Očigledno da je očekivana vrijednost centriranog slučajnog procesa jednaka nuli:

$$E[X_c(t)] = E[X(t)] - E[\eta_X(t)] = \eta_X(t) - \eta_X(t) = 0 \quad (4.20)$$

Očekivana vrijednost kvadrata centriranog slučajnog procesa se obilježava sa:

$$\sigma^2(t) = E[X_c^2(t)] = \sigma_X^2(t) - \eta_X^2(t) \quad (4.21)$$

Autokorelaciona funkcija centriranog slučajnog procesa se naziva **varijansa** i obilježava sa $C_{XX}(t_1, t_2)$. Pokazuje se da vrijedi:

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1, t_2) &= E[X_c(t_1)X_c(t_2)] \\ &= E[(X(t_1) - \eta_X(t_1))(X(t_2) - \eta_X(t_2))] \\ &= E[X(t_1)X(t_2)] - E[\eta_X(t_1)X(t_2)] \\ &\quad - E[\eta_X(t_2)X(t_1)] + E[\eta_X(t_1)\eta_X(t_2)] \\ &= R_{XX}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) - \eta_X(t_2)\eta_X(t_1) + \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \end{aligned}$$

$$= R_{XX}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \quad (4.22)$$

Može se zaključiti da **ako se radi o čisto slučajnom procesu tada je varijansa jednaka nuli.**

Kroskorelaciona funkcija dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ se definira kao:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p(t_1, x_1; t_2, y_2) dx_1 dy_2 \quad (4.23)$$

pri čemu je $p(t_1, x_1; t_2, x_2)$ zajednička funkcija gustine vjerovatnoće slučajnih procesa. Pokazuje se da u slučaju kada su procesi međusobno nezavisni vrijedi:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \eta_X(t_1)\eta_Y(t_2) \quad (4.24)$$

Kroskovarijansa dva slučajna procesa se obilježava sa $C_{XY}(t_1, t_2)$ i predstavlja kroskorelacionu funkciju njihovih centriranih slučajnih procesa:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = E[X_c(t_1)Y_c(t_2)] \quad (4.25)$$

Analogno kao i u prethodnom izlaganju, može se pokazati da vrijedi:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_Y(t_2) \quad (4.26)$$

Ako su dva slučajna procesa **međusobno nezavisna** tada je njihova **kroskovarijansa jednaka nuli.**

Primjer 4.6:

Neka je signal $X(t)$ deterministički slučajni proces $X(t) = A\cos(\omega t + a)$, a a uniformno raspoređena slučajna promjenljiva na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odrediti autokorelacionu funkciju slučajnog procesa.

Rješenje:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= E[G(a, t_1)G(a, t_2) = G(a, t_1, t_2)] \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \cos(\omega t_1 + a) \cos(\omega t_2 + a) p(a) da \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} A^2 \cos(\omega t_1 + a) \cos(\omega t_2 + a) \frac{1}{2\pi} da \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega(t_2 - t_1)) \end{aligned}$$

Očekivana vrijednost procesa se može vizualizirati i programskim kodom 4.4.

PROGRAMSKI KOD 4.4

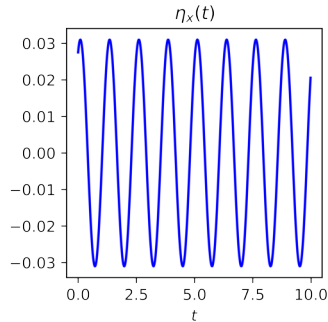
```

# Određivanje očekivane vrijednosti procesa:
eta_X_t = np.empty((N))

for t_i in range(N):
    eta_X_t[t_i] = np.mean(X_t[:,t_i])

# Crtanje očekivane vrijednosti procesa eta_X(t)
ssp.slprom1D.grafik(t, eta_X_t, naslov = "$\\eta_x(t)$")

```



Iako na prvi pogled djeluje da je očekivana vrijednost procesa oscilatorna, ona je praktično jednaka nuli, ali zbog relativno malog broja uzoraka se to u simulaciji teže uočava. Nadalje, vizualiziranjem autokorelacione i kroskorelacione funkcije ovog procesa može se vidjeti i stacionarnost, jer se „uzorak” oblika funkcije ponavlja u vremenu, odnosno vrijednost zavisi samo od rastojanja između pojedinih vremenskih trenutaka (programski kodovi 4.5-4.6).

PROGRAMSKI KOD 4.5

```

#Određivanje korelacionih funkcija:
R_xx = np.empty((N, N))
C_xx = np.empty((N, N))
for t1 in range(N):
    for t2 in range(N):
        R_xx[t1, t2] = np.mean(X_t[:,t1]*X_t[:,t2])
        C_xx[t1, t2] = np.mean((X_t[:,t1]-eta_X_t[t1])*(X_t[:,t2]-eta_X_t[t2]))

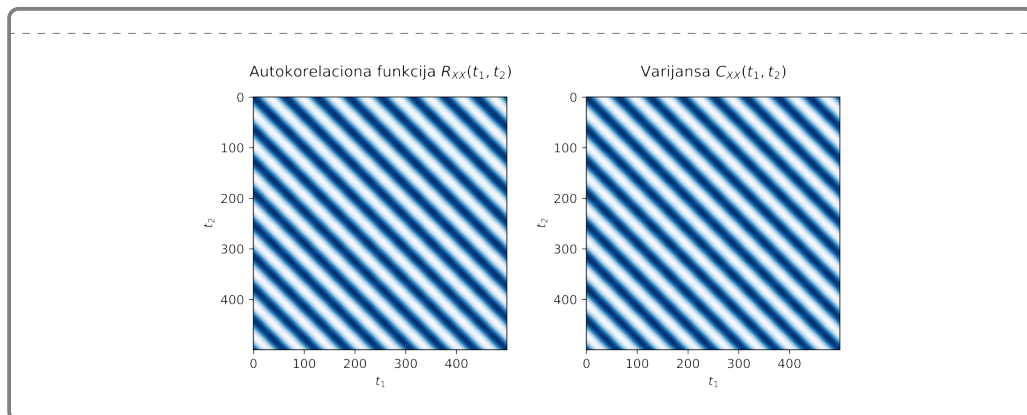
```

PROGRAMSKI KOD 4.6

```

ssp.slproc.korelacija(X_t,X_t,
                    naslov = "Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(t_1,t_2)$");
ssp.slproc.korelacija(X_t,X_t,
                    tip = 'centrirana',
                    naslov = "Varijansa $C_{XX}(t_1,t_2)$");

```



4.6 Korelacione funkcije stacionarnih slučajnih procesa

Veliki broj slučajnih procesa se mogu modelirati kao stacionarni procesi. Za stacionaran slučajni proces vrijede sljedeće relacije:

$$p(t, x) = p(x) \quad (4.27)$$

$$p(t_1, x_1; t_2, x_2) = p(\tau, x_1, x_2) \quad (4.28)$$

gdje je $\tau = t_1 - t_2$.

Očekivana vrijednost i očekivana kvadratna vrijednost stacionarnog slučajnog procesa su konstantne:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(t, x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \eta_X \quad (4.29)$$

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(t, x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2p(x)dx = \sigma_X^2 \quad (4.30)$$

Autokorelaciona funkcija ovisi od τ :

$$\begin{aligned} R_{XX}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2p(t_1, x_1; t_2, x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1x_2p(\tau, x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ &= R_{XX}(\tau) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Jasno je da se maksimalna vrijednost autokorelacione funkcije stacionarnog slučajnog procesa postiže u koordinatnom početku ($\tau = 0$), što se može i jednostavno pokazati. Naime:

$$\begin{aligned} E[(X(t_1) - X(t_2))^2] &\geq 0 \\ E[X^2(t_1)] - 2E[X(t_1)X(t_2)] + E[X^2(t_2)] &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 - 2R_{XX}(\tau) + \sigma_X^2 &\geq 0 \\
\sigma_X^2 &\geq R_{XX}(\tau) \\
R_{XX}(0) &\geq R_{XX}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Također, kovarijansa slučajnog procesa zavisi samo od τ :

$$\begin{aligned}
C_{XX}(t_1, t_2) &= R_{XX}(t_1, t_2) - \eta_X(t_1)\eta_X(t_2) \\
&= R_{XX}(\tau) - \eta_X^2 \\
&= C_{XX}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Analogno, za dva međusobno stacionarna procesa vrijedi:

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p(t_1, x_1; t_2, y_2) dx_1 dy_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 y_2 p(\tau, x_1, y_2) dx_1 dy_2 \\
&= R_{XY}(\tau)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Pokazuje se da ako dva međusobno stacionarna procesa zamijene mjesta, izraz za $R_{XY}(t_1, t_2)$ se svodi na:

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[Y(t_2)X(t_1)] \\
&= R_{YX}(t_2, t_1) \\
&= R_{YX}(-\tau)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Za slučaj autokorelacione funkcije, izraz (4.35) se pojednostavljuje na:

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$$

odnosno **autokorelaciona funkcija stacionarnog slučajnog procesa je parna funkcija** po τ .

4.7 Srednje vrijednosti procesa po vremenu

Srednja vrijednost po vremenu neke funkcije slučajnog procesa $X(t)$ se računa za jednu realizaciju tog procesa i definiše se izrazom:

$$\overline{f[X(t)]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[X(t)] dt \tag{4.36}$$

U literaturi je moguće naći i definiciju:

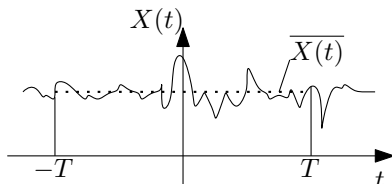
$$\overline{f[X(t)]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f[X(t)] dt \tag{4.37}$$

Srednja vrijednost realizacije slučajnog procesa po vremenu se dobiva za $f[X(t)] = X(t)$:

$$\overline{X(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \quad (4.38)$$

Bitno je naglasiti da se uz notaciju sa nadvlakom, u literaturi često koriste i šiljaste zagrade:

$$\overline{X(t)} = \langle X(t) \rangle \quad (4.39)$$



Slika 4.9: Očekivana vrijednost slučajnog procesa po vremenu

Srednjekvadratna vrijednost realizacije slučajnog procesa po vremenu se dobiva za $f[X(t)] = X^2(t)$:

$$\overline{X^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^2(t) dt \quad (4.40)$$

Jasno je da srednjekvadratna vrijednost realizacije slučajnog procesa zapravo odgovara njegovoj *srednjoj snazi*.

Autokorelaciona funkcija po vremenu predstavlja srednju vrijednost po vremenu od $f[X(t)] = X(t)X(t + \tau)$:

$$\Re_{XX}(\tau) = \overline{X(t)X(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)X(t + \tau) dt \quad (4.41)$$

U literaturi se autokorelacija definira i sa $\Re_{XX}(\tau) = \overline{X(t)X(t - \tau)}$ (što je zapravo isto, uz smjenu $t = t + \tau$).

Kroskorelaciona funkcija po vremenu dvije realizacije slučajnih procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je:

$$\Re_{XY}(\tau) = \overline{X(t)Y(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t)Y(t + \tau) dt \quad (4.42)$$

4.8 Ergodičnost

Za slučajni proces $X(t)$ se kaže da je **ergodičan** ako su njegove srednje vrijednosti po vremenu jednake odgovarajućim očekivanim vrijednostima, odnosno:

$$\overline{X(t)} = E[X(t)] = \eta_X \quad (4.43)$$

$$\overline{X^2(t)} = E[X^2(t)] = \sigma_X^2 \quad (4.44)$$

$$\mathfrak{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) \quad (4.45)$$

Jasno je da proces može biti ergodičan samo ako je stacionaran, jer očekivana vrijednost u opštem slučaju ovisi o vremenu, a prema zahtjevu ergodičnosti srednja vrijednost procesa po vremenu ne bi smjela ovisiti o konkretnoj realizaciji.

Praktično, *ergodični procesi su oni kod kojih jedna jedina realizacija procesa sadrži sve statističke informacije o cijelom slučajnom procesu*. Kod ergodičnih procesa očekivane vrijednosti se mogu računati kao očekivane vrijednosti po vremenu, a ne samo po mnoštvu (preko slučajnih varijabli i raspodjela vjerovatnoća)!

Primjer 4.7:

Neka je signal $X(t)$ deterministički slučajni proces $X(t) = A \cos(\omega t + a)$, a a uniformno raspoređena slučajna promjenljiva na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odrediti srednju vrijednost, srednjekvadratnu vrijednost i autokorelacionu funkciju po vremenu od realizacije $X(t)$.

Rješenje:

Pošto se radi o periodičnom signalu, njegovu srednju vrijednost u vremenu je moguće naći na osnovnom periodu T :

$$\overline{X(t)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega t + a) dt = \frac{1}{T} \int_b^{b+T} A \cos(\omega t + a) dt = 0$$

zbog simetričnosti podintegralne funkcije. Srednjekvadratna vrijednost po vremenu:

$$\begin{aligned} \overline{X^2(t)} &= \overline{A^2 \cos^2(\omega t + a)} = \frac{A^2}{2} \overline{[1 + \cos(2\omega t + 2a)]} \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} \overline{\cos(2\omega t + 2a)} = \frac{A^2}{2} + 0 = \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$

Autokorelaciona funkcija po vremenu:

$$\begin{aligned} \overline{X(t)X(t+\tau)} &= A^2 \overline{\cos(\omega t + a) \cos(\omega t + \omega\tau + a)} = \\ &= \frac{A^2}{2} \left[\overline{\cos(2\omega t + 2a + \omega\tau)} + \overline{\cos(\omega\tau)} \right] = \\ &= \frac{A^2}{2} (0 + \cos \omega\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega\tau \end{aligned}$$

Primjer 4.8:

Slučajni proces ima realizacije $X(t) = a$, pri čemu je a realna slučajna promjenljiva sa raspodjelom $p(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}}$. Odrediti očekivanu vrijednost, očekivanu srednjekvadratnu vrijednost i korelacionu funkciju slučajnog procesa. Odrediti srednju vrijednost, srednjekvadratnu vrijednost i autokorelacionu funkciju po vremenu od realizacije $X(t)$.

Rješenje:

Prilikom rješavanja ovog zadatka koristit će se sličan pristup kao i u (4.16), jer se na taj način izbjegava računanje funkcije gustoće vjerovatnoće slučajnog procesa.

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E[G(a)] \\ E[X^2(t)] &= E[G^2(a)] \\ R_{XX}(t_1, t_2) &= E[G(a, t_1) \cdot G(a, t_2)] \end{aligned}$$

Prema postavci zadatka $G(a)$ je dato kao $G(a) = a$. Na osnovu ovih relacija mogu se proračunati sve vrijednosti koje su tražene za slučajni proces.

Očekivana vrijednost slučajnog procesa se računa kao:

$$E[X(t)] = E[G(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G(a)p_a(t, a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} da = 0$$

zbog činjenice da je integral neparne funkcije na simetričnim granicama jednak nuli.

Srednjekvadratna vrijednost slučajnog procesa se računa na sljedeći način.

$$E[X^2(t)] = E[G^2(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(a)p_a(t, a) da = \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} da \quad (4.46)$$

Integral se rješava parcijalnom integracijom:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \left| \begin{array}{l} u = a, \quad dv = ae^{-\frac{a^2}{2}} da \\ du = da, \quad v = -e^{-\frac{a^2}{2}} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(-ae^{-\frac{a^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} da \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{2}} da \end{aligned}$$

Ukoliko se podintegralna funkcija posmatra kao funkcija gustine Gaussove raspodjele, gdje je $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, koristeći se činjenicom da vrijedi $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ dolazi se do zaključka da je cijeli integral jednak 1:

$$E[X^2(t)] = 1$$

Korelaciona funkcija slučajnog procesa se izračunava korištenjem činjenice da slučajni proces ne ovisi o vremenu, odnosno vrijedi $G(a, t) = G(a)$, pa slijedi:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[G(a, t_1) \cdot G(a, t_2)] = E[G(a) \cdot G(a)] = \int_{-\infty}^{+\infty} G^2(a)p_a(t, a) da \quad (4.47)$$

Jednačina (4.47) je ista kao i jednačina za računanje srednjekvadratne vrijednosti (4.46), iz čega slijedi da je:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = 1$$

Srednja vrijednost po vremenu od realizacije $X(t)$ se računa na kao:

$$\begin{aligned}
 \overline{X(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a}{T} \cdot T \\
 &= a
 \end{aligned}$$

Srednjekvadratna vrijednost po vremenu od realizacije $X(t)$ se određuje na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 \overline{X^2(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X^2(t) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \cdot T \\
 &= a^2
 \end{aligned}$$

Konačno, autokorelaciona funkcija po vremenu od realizacije $X(t)$ je:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{R}_{XX}(\tau) &= \overline{X(t)X(t+\tau)} \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t)X(t+\tau) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} a \cdot a dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{a^2}{T} \cdot T \\
 &= a^2
 \end{aligned}$$

Obzirom da za ovaj slučajni proces vrijede relacije (4.43), (4.44) i (4.45), to se zaključuje da je dati proces i ergodičan.

4.9 Spektralna gustina stacionarnih slučajnih procesa

Spektralna (sopstvena) gustina stacionarnog slučajnog procesa predstavlja spektar (Fourierovu) transformaciju autokorelacione funkcije:

$$S_{XX}(\omega) = F\{R_{XX}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.48)$$

Naravno, to implicira da se autokorelaciona funkcija stacionarnog slučajnog procesa može izračunati pomoću inverzne Fourierove transformacije spektralne gustine:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.49)$$

Bitno je primijetiti da je za slučaj realnog procesa, autokorelaciona funkcija parna i realna, pa je spektralna gustina zapravo realna funkcija po ω , a odatle i oznaka $S_{xx}(\omega)$, a ne $S_{xx}(j\omega)$. Spektralna gustina slučajnog procesa se npr. može iskoristiti za računanje očekivane kvadratne vrijednosti slučajnog procesa:

$$\sigma_X^2 = E[X(t)X(t)] = R_{XX}(t-t) = R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega)d\omega \quad (4.50)$$

Analogno se definira i **međusobna spektralna gustina slučajnog procesa**:

$$S_{XY}(j\omega) = F\{R_{XY}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (4.51)$$

Također vrijedi:

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega \quad (4.52)$$

Primjenom osobine (4.35) dobiva se:

$$S_{YX}(j\omega) = F\{R_{YX}(\tau)\} = F\{R_{XY}(-\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(-\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = S_{XY}(-j\omega) \quad (4.53)$$

4.10 Šum i tipovi šuma

U kontekstu slučajnih procesa, šum predstavlja slučajnu, nepredvidivu komponentu koja utiče na signal ili sistem. Šum se obično posmatra kao neželjena promjena koja se dodaje korisnom signalu i može otežati detekciju ili analizu željenih informacija.

U suštini, šum karakteriše njegova slučajna priroda, autokorelaciona funkcija, distribucija vjerovatnoće i spektralna gustina. Naime, šum je inherentno slučajan proces, koji se najčešće modelira kao tzv. „niskoautokoreliran” proces, što znači da nema jaku vezu između vrijednosti u susjednim vremenskim trenucima. Šumovi se modeliraju na bazi različitih distribucija vjerovatnoće slučajnih promjenljivih, u zavisnosti od tipa procesa koji ga generiše (npr. dosta često se koristi normalna (Gaussova) raspodjela).

Najvažnija podjela šumova je na osnovu njihove spektralne distribucije, odnosno raspodjele snage šuma u frekventnom domenu. Zbog toga neki od tipova šumova, važni za

modeliranje slučajnih procesa, imaju i svoje nazive. Tako npr. Bijeli šum ima ravnomjernu distribuciju snage na svim frekvencijama, kod Rozog i Crvenog snaga je manja na višim frekventnim opsezima, dok kod Plavog i Ljubičastog ona raste sa porastom frekvencije. U nastavku će ukratko biti opisani ovi tipovi šumova.

4.10.1 Bijeli šum

Bijeli šum predstavlja čisto slučajan proces, kod kojeg ne postoji korelacija između trenutnog i prošlog uzorka signala šuma. Očekivana vrijednost bijelog šuma jednaka je nuli. Bijeli šum predstavlja slučajni proces koji ima sljedeću autokorelacionu funkciju:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = I(t_1)\delta(t_1 - t_2) \quad (4.54)$$

gdje je $I(t)$ realna funkcija jedne realne promjenljive. Poseban tip bijelog šuma je *stacionarni bijeli šum*, opisan sa:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = I\delta(\tau) \quad (4.55)$$

Spektralna gustina stacionarnog bijelog šuma je konstantna:

$$S_{XX}(\omega) = F\{I\delta(\tau)\} = I \quad (4.56)$$

Gaussov stacionarni bijeli šum ima jednodimenzionalnu gustinu vjerovatnoće definiranu Gaussovom raspodjelom. Bijeli šum ograničenog frekventnog opsega se definiše kao:

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} I, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.57)$$

pa je njegova autokorelaciona funkcija data sa:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{I\omega_c}{\pi} Sa(\omega_c\tau) \quad (4.58)$$

Bijeli šum se koristi za opisivanje šumova koji nastaju u audio i video signalima. Npr. kada na analognom televizoru nema prenosa, odnosno korisnog signala, jedino što vidi jeste bijeli šum. Također, isti efekat se može i čuti na TV/radio prijemniku u slučaju nepostojanja korisnog signala. Naziv „bijeli” šum dolazi iz analogije sa „bijelom svjetlošću” - naime spektralna gustina bijelog šuma obuhvata sve frekvencije, baš kao što i bijela svjetlost obuhvata sve talasne dužine, tj. frekvencije vidljivog spektra.

4.10.2 Obojeni šumovi

Osim bijelog šuma, od interesa su i drugi tipovi šuma, kao što su crni, rozi, crveni, plavi, ljubičasti. U tabeli (4.1) su prikazane osnovne karakteristike ovih tipova šumova.

Tip šuma	Spektralna gustina $S_{XX}(\omega)$	Karakteristika
Crni šum	0	Crni šum predstavlja odsustvo svih frekvencija. To je tip signala sa nultom snagom. Naziva se još i <i>tišina</i> .
Rozi šum	$S_{XX}(\omega) = \frac{I}{\omega}$	To je tip signala kod kojeg je snaga šuma izraženija na nižim frekvencijama, nego na višim. Mnogi prirodni procesi se mogu modelirati rozim šumom, kao što je šuštanje valova od obalu, šuštanje lišća na drveću i kiša. Rozi šum djeluje opuštajuće na čovjeka, i pomaže u ostvarivanju boljeg sna. Tzv. " <i>flicker noise</i> " koji se pojavljuje u elektroničkim uređajima predstavlja vrstu rozog šuma.
Crveni šum	$S_{XX}(\omega) = \frac{I}{\omega^2}$	Drugi naziv za crveni šum je „ <i>Brownian noise</i> ”, odnosno Braunov šum. U poređenju sa rozim i bijelim šumom, crveni šum je dosta dublji i “mekši”. Određene prirodne pojave kao što su zvuk jakih vodopada ili vjetra se mogu modelirati crvenim šumom.
Plavi šum	$S_{XX}(\omega) = I\omega$	Plavi šum predstavlja suprotnost crvenog šuma, jer je snaga skoncentrisana na gornjem kraju spektra. Zvuk prskanja vode iz prskalice pod visokim pritiskom se može modelirati plavim šumom. Ovaj šum ima čestu primjenu u muzičkoj industriji u postupcima zaglađivanja signala.
Ljubičasti šum	$S_{XX}(\omega) = I\omega^2$	Zvuk isticanja vode iz slavine je primjer ljubičastog šuma. Kod ljubičastog šuma, snaga na visokim frekvencijama je još dominantnija nego kod plavog šuma.

Tabela 4.1: Tipovi obojenih šumova

4.11 Markovljevi slučajni procesi

Markovljevi procesi zauzimaju posebno mjesto u analizi slučajnih procesa. Prilikom uvođenja koncepta Markovljevih procesa, obično se uvodi pojam **stanja procesa** - što je u ovom slučaju x_i . Za diskretni slučajni proces broj mogućih stanja je prebrojiv ili konačan, pa se takav proces još naziva i Markovljev lanac.

Za proces se kaže da je **Markovljev proces** ukoliko vrijedi:

$$p_u(t_n, x_n | t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_{n-1}, x_{n-1}) = p_u(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1}) \quad (4.59)$$

odnosno ako funkcija gustine vjerovatnoće za prelazak u naredno stanje zavisi samo od prethodnog stanja, ili drugim riječima, za procjenu budućeg stanja je potrebno samo

poznovati trenutno stanje, a ne i način/put kako se došlo do tog stanja (prošlost). U tom smislu, višedimenzionalna funkcija gustine ima oblik:

$$\begin{aligned} p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= p(t_1, x_1) dx_1 p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2 \dots \\ &\quad \dots p_u(t_3, x_3 | t_2, x_2) dx_3 \dots \\ &\quad \dots p_u(t_n, x_n | t_{n-1}, x_{n-1}) dx_n \end{aligned} \quad (4.60)$$

U skladu sa Bayesovom teoremom, uslovna gustina se može izraziti preko dvodimenzionalne, jer vrijedi:

$$p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_1 dx_2 = p(t_1, x_1) dx_1 p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2 \quad (4.61)$$

što praktično znači:

$$p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) = \frac{p(t_1, x_1; t_2, x_2)}{p(t_1, x_1)} \quad (4.62)$$

Sada se Markovljev proces može prikazati sa:

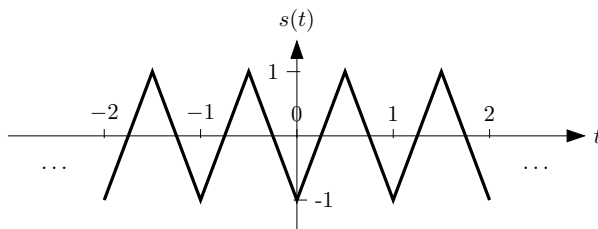
$$\begin{aligned} p(t_1, x_1; t_2, x_2; \dots; t_n, x_n) &= p(t_1, x_1) \cdot \frac{p(t_1, x_1; t_2, x_2)}{p(t_1, x_1)} \cdot \frac{p(t_2, x_2; t_3, x_3)}{p(t_2, x_2)} \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot \frac{p(t_n, x_n; t_{n-1}, x_{n-1})}{p(t_{n-1}, x_{n-1})} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Prema tome, kod Markovljevih procesa se sve (jednodimenzionalne i višedimenzionalne) gustine mogu prikazati preko dvodimenzionalnih. Zanimljivo je da također vrijedi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, x_1; t_2, x_2) dx_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t_1, x_1) p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2 \\ &= p(t_1, x_1) \int_{-\infty}^{+\infty} p_u(t_2, x_2 | t_1, x_1) dx_2 \\ &= p(t_1, x_1) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Zadaci za samostalan rad

- Slučajni proces $X(t)$ sastoji se od tri moguće realizacije: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = -3$, $x_3(t) = \sin(2\pi t)$. Svaka od mogućih realizacija se može desiti sa jednakom vjerovatnoćom.
 - Pronaći očekivanu vrijednost slučajnog procesa, $E[X(t)]$.
 - Pronaći autokorelacionu funkciju, $R_{XX}(t_1, t_2)$.
 - Da li je proces stacionaran u širem smislu (WSS)? Da li je stacionaran u užem smislu?
- Slučajni proces $X(t)$ sastoji se od pet mogućih realizacija: $x_1(t) = -2\cos(t)$, $x_2(t) = -2\sin(t)$, $x_3(t) = 2[\cos(t) + \sin(t)]$, $x_4(t) = [\cos(t) - \sin(t)]$, $x_5(t) = [\sin(t) - \cos(t)]$. Svaka od mogućih realizacija se može desiti sa jednakom vjerovatnoćom.
 - Pronaći očekivanu vrijednost slučajnog procesa, $E[X(t)]$.
 - Pronaći autokorelacionu funkciju, $R_{XX}(t_1, t_2)$.
 - Da li je proces stacionaran u širem smislu (WSS)? Da li je stacionaran u užem smislu?
- Slučajni proces je dat sa $X(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, gdje su A i B slučajne promjenjive sa nultom srednjom vrijednošću.
 - Pronaći očekivanu vrijednost slučajnog procesa, $E[X(t)]$.
 - Pronaći autokorelacionu funkciju $R_{XX}(t_1, t_2)$.
 - Pri kojim uslovima je $X(t)$ stacionaran u širem smislu?
- Neka je $s(t)$ periodički trokutasti signal kao na slici 4.10. Pretpostaviti da je slučajni proces dobijen na osnovu signala $X(t) = s(t - T)$, gdje je T slučajna promjenjiva koja je uniformno raspoređena na intervalu $(0, 1)$.
 - Odrediti funkciju gustine vjerovatnoće slučajnog procesa $X(t)$.
 - Odrediti očekivanu vrijednost slučajnog procesa, $E[X(t)]$.
 - Odrediti autokorelacionu funkciju $R_{XX}(t_1, t_2)$.
 - Da li je proces stacionaran u širem smislu (WSS)?



Slika 4.10: Signal $s(t)$ za Zadatak 4

- Odrediti korelacionu funkciju $R_{XX}(t, t + \tau)$ i spektralnu gustinu za harmonijsku funkciju $x(t) = A \sin(\beta t + \gamma)$. Naći vrijednost korelacione funkcije za $\tau = 0$ kao inverznu Fourierovu transformaciju spektralne gustine $S(\omega)$. Pretpostaviti da je proces ergodičan. Vrijednosti parametara su $\beta = 2 \text{ sec}^{-1}$, $A = 10$.

6. Korelaciona funkcija za stacionarni slučajni proces sa nultim matematičkm očekivanjem data je relacijom $R_{XX}(\tau) = De^{-\mu|\tau|}$ gdje je $D = 100$ i $\mu = 5$. Odrediti spektralnu gustinu i nacrtati njen grafik.
7. Riješiti prethodni primjer ako posmatrani stacionarni slučajni proces ima srednju vrijednost (matematičko očekivanje) jednaku 5. Grafički predstaviti korelacionu funkciju i spektralnu gustinu.
8. Odrediti srednjekvadratnu vrijednost signala čiji je spektar dat sa:

$$S_x(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega + 9}.$$

5. Prolaz slučajnih procesa kroz LTI sisteme

5.1 Prolaz slučajnih procesa kroz LTI sistem

Neka je dat linearan i vremenski invarijantni sistem svojim impulsnim odzivom $h(t)$. Neka se na ulazu u sistem nalazi signal opisan slučajnim procesom $\{X(t)\}$. Tada je izlaz iz LTI sistema također slučajni proces $\{Y(t)\}$. Veza između ulaznog i izlaznog signala je data konvolucionim integralom:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t - \tau)d\tau \quad (5.1)$$

Obzirom da se oznaka τ upotrebljava kao nezavisna promjenljiva korelacionih funkcija, to je uobičajenije koristiti sljedeću notaciju:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t - u)h(u)du = L\{X(t)\} \quad (5.2)$$

Pošto je $X(t)$ u opštem slučaju nedeterministički signal tada se $Y(t)$ teško analitički izračunava, pa je od interesa razmatrati njegove statističke pokazatelje. U skladu s tim, **očekivana vrijednost izlaznog procesa** se računa kao:

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[L\{X(t)\}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(t, y)dy \end{aligned} \quad (5.3)$$

Obzirom da vrijednost $Y(t)$ ovisi od vrijednosti $X(t - u)$ tada vrijedi:

$$\begin{aligned} p_Y(t, y)dy &= \text{vjerovatnoća da } [y < Y(t) \leq y + dy] \\ &= \text{vjerovatnoća da } [x < X(t - u) \leq x + dx] \\ &= p_X(t - u, x)dx \end{aligned} \quad (5.4)$$

Tada očekivana vrijednost postaje:

$$E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} yp_Y(t, y)dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} yp_X(t-u, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)h(u) du \right] p_X(t-u, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} X(t-u)p_X(t-u, x) dx}_{\eta_X(t-u)} h(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X(t-u)h(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t-u)]h(u) du \tag{5.5}
\end{aligned}$$

Odakle se zaključuje:

$$\eta_Y(t) = E[Y(t)] = E[L\{X(t)\}] = L\{E[X(t)]\} = L\{\eta_X(t)\} \tag{5.6}$$

Dakle, operatori $L\{\cdot\}$ i $E[\cdot]$ u slučaju LTI sistema predstavljaju **komutativne operatore**.

Interesantno je odrediti i **kroskorelacionu funkciju** ulaznog i izlaznog slučajnog procesa LTI sistema:

$$\begin{aligned}
R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[X(t_1) L\{X(t)\}|_{t=t_2}] \\
&= E[L\{X(t_1)X(t)\}|_{t=t_2}] \\
&= L\{E[X(t_1)X(t)]\}|_{t=t_2} \\
&= L_2\{R_{XX}(t_1, t_2)\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1, t_2-u)h(u) du \tag{5.7}
\end{aligned}$$

Posljednji izraz se može jednostavno pokazati i korištenjem definicionog integrala, jer uzimajući u obzir da su operatori $L\{\cdot\}$ i $E[\cdot]$ komutativni, tada operator očekivane vrijednosti može „ući pod integral”. Indeks dva (u L_2) označava da se operator primjenjuje na promjenljivu t_2 (odnosno da u konvoluciji učestvuje samo promjenljiva t_2).

Autokorelaciona funkcija izlaznog slučajnog procesa se može odrediti preko autokorelacije ulaznog procesa:

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\
&= E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(t_1-u)h(u) du \cdot Y(t_2) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} E[X(t_1-u)Y(t_2)]h(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t_1-u, t_2)h(u) du \\
&= L\{R_{XY}(t, t_2)\}|_{t=t_1} \\
&= L_1\{R_{XY}(t_1, t_2)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= L_1\{L_2\{R_{XX}(t_1, t_2)\}\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1 - u, t_2 - v)h(u)h(v)dudv \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

Korištenjem analognog pristupa moguće je pokazati da slične relacije vrijede i za **centrirane slučajne procese**:

$$C_{XY}(t_1, t_2) = L_2\{C_{XX}(t_1, t_2)\} \quad (5.9)$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
 C_{YY}(t_1, t_2) &= L_1\{C_{XY}(t_1, t_2)\} \\
 &= L_1\{L_2\{C_{XX}(t_1, t_2)\}\} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{XX}(t_1 - u, t_2 - v)h(u)h(v)dudv \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

Primjer 5.1:

Neka je dat LTI sistem sa ulazom $x(t)$ i izlazom $y(t)$ opisan diferencijalnom jednačinom: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$. Odrediti autokorelacionu funkciju izlaznog signala ako je poznata autokorelaciona funkcija ulaznog signala.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 R_{YY}(t_1, t_2) &= L_1\{L_2\{R_{XX}(t_1, t_2)\}\} \\
 &= L_1\left\{\frac{\partial R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right\} \\
 &= \frac{\partial^2 R_{XX}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}
 \end{aligned}$$

5.2 Prolaz stacionarnih slučajnih procesa kroz LTI sistem

Relacije koje opisuju prolazak slučajnih procesa kroz LTI sistem se bitno pojednostavljuju ukoliko su slučajni procesi stacionarni. Tada se **očekivana vrijednost izlaznog procesa** računa kao:

$$\begin{aligned}
 E[Y(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X(t - u)h(u)du \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_X h(u)du \\
 &= \eta_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)du \quad (5.11)
 \end{aligned}$$

Analogno, obzirom da kod stacionarnih procesa vrijedi:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2) = R_{XX}(\tau) \quad (5.12)$$

kroskorelaciona funkcija se može izračunati kako slijedi:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1, t_2 - u)h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1 - (t_2 - u))h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t_1 - t_2 + u)h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau + u)h(u)du \\ &= \text{smjena } u = -u \\ &= \int_{+\infty}^{-\infty} R_{XX}(\tau - u)h(-u)(-du) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau - u)h(-u)(du) \\ &= R_{XX}(\tau) * h(-\tau) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Analogno, za autokorelacione funkcije izlaznih signala vrijedi:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) = R_{YY}(\tau) &= L_1\{R_{XY}(t_1, t_2)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t_1 - u, t_2)h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(t_1 - u - t_2)h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau - u)h(u)du \\ &= R_{XY}(\tau) * h(\tau) \\ &= (R_{XX}(\tau) * \underbrace{h(-\tau) * h(\tau)}_{\rho(\tau)}) \\ &= R_{XX}(\tau) * \rho(\tau) \end{aligned} \quad (5.14)$$

pri čemu je sa $\rho(\tau)$ označen izraz $\rho(\tau) = h(\tau) * h(-\tau)$. Detaljnija analiza dovodi do sljedećeg rezultata:

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) \\ &= h(\tau) * h_{pom}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h_{pom}(\tau - t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)h(t - \tau)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sim \overline{h(t)h(t-\tau)} \\ &\sim \Re_{hh}(\tau) \end{aligned} \tag{5.15}$$

što predstavlja reprezentaciju *autokorelacione funkciju po vremenu od impulsnog odziva*. Važno je primijetiti da se često u literaturi, zavisno od toga da li se koristi aperiodički ili periodički signal, autokorelaciona funkcija normalizira na intervalu T (pa je notacija nešto drugačija nego u prethodnim poglavljima). Nadalje, srednjekvadratna vrijednost slučajnog procesa $Y(t)$ je data sa:

$$\sigma_Y^2(t) = E[Y^2(t)] = R_{YY}(t, t) \tag{5.16}$$

a za slučaj stacionarnog procesa vrijedi:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2(t) &= R_{YY}(\tau) \Bigg|_{\substack{t_1 = t, \\ t_2 = t, \\ \tau = 0}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t-u, t-v)h(u)h(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(v-u)h(u)h(v)dudv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(u-v)h(u)h(v)dudv \\ &= \sigma_Y^2 = const \end{aligned} \tag{5.17}$$

Za **centrirane slučajne procese** se izrazi svode na:

$$C_{XY}(\tau) = C_{XX}(\tau) * h(-\tau) \tag{5.18}$$

$$C_{YY}(\tau) = C_{XY}(\tau) * h(\tau) = C_{XX}(\tau) * \rho(\tau) \tag{5.19}$$

Primjer 5.2:

Neka je dat LTI sistem sa ulazom $x(t)$ i izlazom $y(t)$, opisan impulsnim odzivom $h(t)$. Neka je ulaz u sistem stacionarni slučajni proces $X(t)$ sa poznatom autokorelacionom funkcijom $R_{XX}(\tau) = I\delta(\tau)$. Odrediti kroskorelacionu funkciju ulaza i izlaza, te autokorelacionu funkciju izlaza.

Rješenje:

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+u)h(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} I\delta(\tau+u)h(u)du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= Ih(-\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau + u) du \\
 &= Ih(-\tau)
 \end{aligned}$$

Nadalje:

$$\begin{aligned}
 R_{YY}(\tau) &= R_{XY}(\tau) * h(\tau) \\
 &= Ih(-\tau) * h(\tau) \\
 &= I\rho(\tau)
 \end{aligned}$$

Demonstracija ovog zadatka je data u formi programskih kodova 5.1-5.6

PROGRAMSKI KOD 5.1

```

N = 500
M = 500

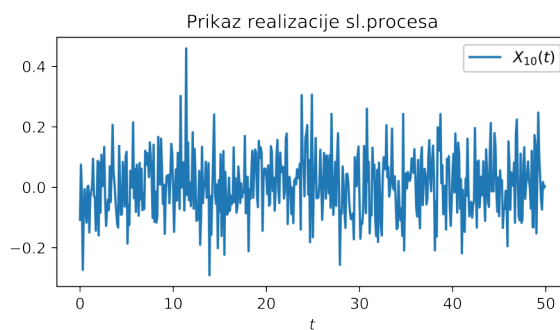
delta_t = 0.1
t = np.arange(0, N*delta_t, delta_t)

# Slučajni proces:
X_t = np.empty((M, N))

for k in range(M):
    X_t[k,:] = np.random.normal(0, 0.1, N)

#Crtanje realizacija slučajnog procesa X(t)
ssp.sproc.realizacije(t, X_t, indeksi = [10],
                       naslov = "Prikaz realizacije sl.procesa")
ssp.sproc.realizacije(t, X_t, indeksi = [12],
                       naslov = "Prikaz realizacije sl.procesa")

```





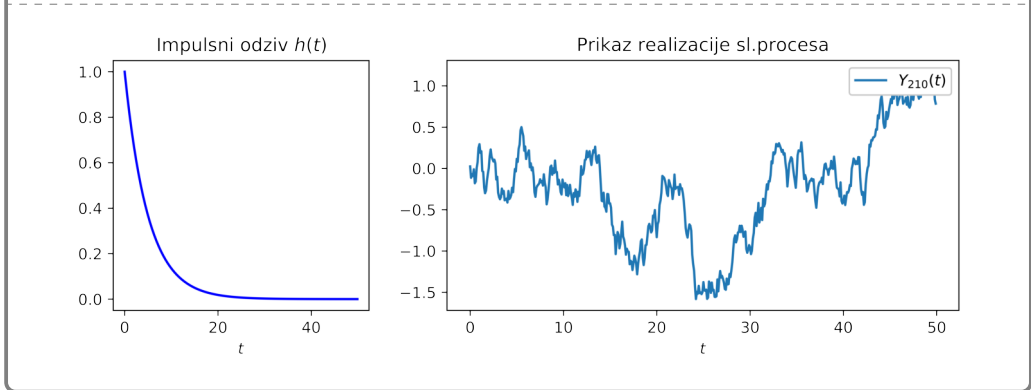
PROGRAMSKI KOD 5.2

```
#Određivanja izlaza iz sistema sa impulsnim odzivom h(t)
h = np.exp(-t/5)
Y_t = np.empty((M,N))

for k in range(M):
    y = np.convolve(X_t[k, :], h)
    Y_t[k, :] = y[0:N]

#Crtanje impulsnog odziva
ssp.slprom1D.grafik(t, h,
                    naslov = "Impulsni odziv $h(t)$")

ssp.slproc.realizacije(t, Y_t, indeksi = [210],
                        promjenljiva = 'Y',
                        naslov = "Prikaz realizacije sl.procesa")
```



PROGRAMSKI KOD 5.3

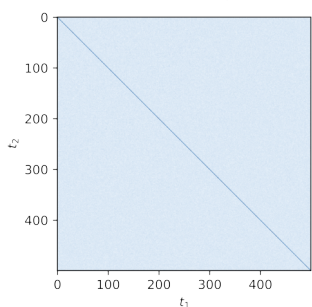
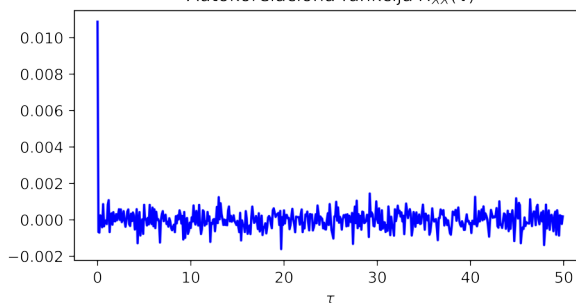
```
# Isječak koda:
def korelacija_stacionarna(R_xx, delta_t):
    # ...
    # Formiranje autokorelacione fje R(tau) (tau= t1-t2, za t2=0, tau ide od 0 do t1max)
    R_xx_tau = R[:, 0]
    # ...
```

```
tau_vektor = np.arange(0, len(R_xx_tau) * delta_t, delta_t)
# ...
return tau_vektor, R_xx_tau
```

PROGRAMSKI KOD 5.4

```
R_xx = ssp.slproc.korelacija(X_t,X_t,
                             naslov = "Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(t_1,t_2)$")

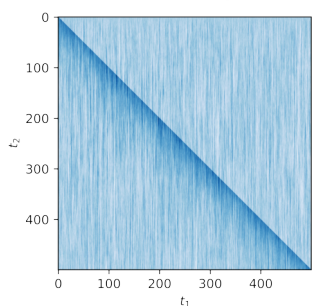
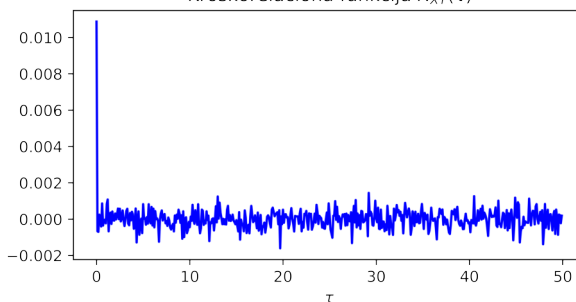
R_xx_tau = ssp.slproc.korelacija_stacionarna(R_xx, delta_t,
                                              naslov = "Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(\tau)$");
```

Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(t_1, t_2)$ Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(\tau)$ 

PROGRAMSKI KOD 5.5

```
R_xy = ssp.slproc.korelacija(X_t,Y_t,
                              naslov = "Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(t_1,t_2)$")

R_xy_tau = ssp.slproc.korelacija_stacionarna(R_xy, delta_t,
                                              naslov = "Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(\tau)$");
```

Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(t_1, t_2)$ Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(\tau)$ 

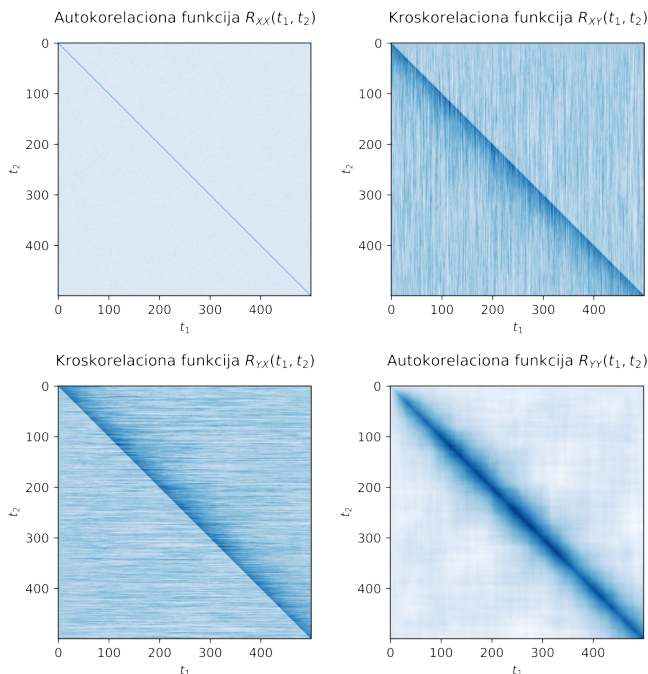
PROGRAMSKI KOD 5.6

```
ssp.slproc.korelacija(X_t,X_t,
                      naslov = "Autokorelaciona funkcija $R_{XX}(t_1,t_2)$");
```

```
ssp.sproc.korelacija(X_t,Y_t,
                    naslov = "Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(t_1,t_2)$");

ssp.sproc.korelacija(Y_t,X_t,
                    naslov = "Kroskorelaciona funkcija $R_{YX}(t_1,t_2)$");

ssp.sproc.korelacija(Y_t,Y_t,
                    naslov = "Autokorelaciona funkcija $R_{YY}(t_1,t_2)$");
```



5.3 Spektralna analiza stacionarnih slučajnih procesa

Ako se impulsni odziv $h(t)$ i funkcija $\rho(t)$ predstavite u spektralnom domenu tada vrijedi (za sisteme sa realnim impulsnim odzivom):

$$h(t) \longleftrightarrow H(j\omega) \tag{5.20}$$

$$h(-t) \longleftrightarrow H(-j\omega) = H^*(j\omega) \tag{5.21}$$

$$\rho(t) = h(t) * h(-t) \longleftrightarrow H(j\omega)H(-j\omega) = |H(\omega)|^2 \tag{5.22}$$

Sada se relacije (5.13) i (5.14) mogu napisati i u spektralnom domenu:

$$\begin{aligned} S_{XY}(j\omega) &= F\{R_{XY}(\tau)\} \\ &= F\{R_{XX}(\tau) * h(-\tau)\} \\ &= F\{R_{XX}(\tau)\}F\{h(-\tau)\} \end{aligned}$$

$$= S_{XX}(\omega)H(-j\omega) \quad (5.23)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= F\{R_{YY}(\tau)\} \\ &= F\{R_{XX}(\tau) * \rho(\tau)\} \\ &= F\{R_{XX}(\tau)\}F\{\rho(\tau)\} \\ &= S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

5.4 Aplikacije korelacionih i kroskorelacionih funkcija

5.4.1 Detekcija kašnjenja

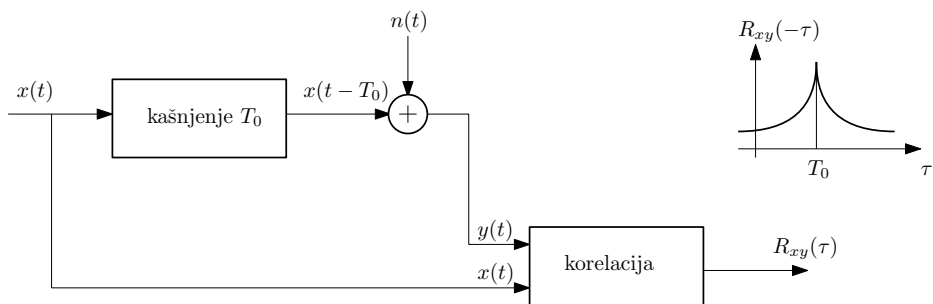
U radarskim primjenama poznati signal se šalje prema objektu koji se želi locirati, te se reflektovani signal analizira npr. u svrhu detekcije pozicije ili brzine objekta. Poslani signal $X(t)$ je poznat, ali je primljeni signal oslabljena i zakašnjela verzija poslanog signala sa izraženim šumom $Y(t) = cX(t - T_0) + N(t)$, pri čemu je sa $N(t)$ označen aditivni šum. Ukoliko se $N(t)$ može opisati kao stacionaran slučajni proces sa nultom očekivanom vrijednosti ($E[N(t)] = 0$), tada vrijedi:

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\ &= E[X(t_1)[cX(t_2 - T_0) + N(t_2)]] \\ &= cE[X(t_1)X(t_2 - T_0)] + \underbrace{E[X(t_1)N(t_2)]}_{=0} \\ &= cR_{XX}(t_1, t_2 - T_0) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Za stacionaran proces se relacija (5.25) svodi na:

$$R_{XY}(\tau) = cR_{XX}(\tau + T_0) \quad (5.26)$$

Iz relacije (5.26) se može zaključiti da kroskorelaciona funkcija i autokorelaciona funkcija imaju isti oblik. Desna strana relacije (5.26) dostiže svoj maksimum za $\tau = -T_0$ (jer za stacionarne slučajne procese vrijedi $R_{XX}(0) \geq R_{XX}(\tau), \forall \tau$). Prema tome, funkcija $R_{XY}(\tau)$ će svoj maksimum dostići u tački $\tau = -T_0$, odnosno $R_{XY}(-\tau)$ u tački $\tau = T_0$. U skladu s tim, sistem za detekciju kašnjenja se može formirati kao na slici 5.1. Na izlazu je potrebno samo naći vrijednost $\tau = T_0$ koja maksimizira kroskorelacionu funkciju $R_{XY}(-\tau)$, kako bi se odredilo kašnjenje. Ilustracija zadatka data je u formi programskih kodova 5.7-5.9.



Slika 5.1: Sistem za detekciju kašnjenja

PROGRAMSKI KOD 5.7

```

N = 1000
t = np.arange(0, 10, 10/N) #Vrijeme

# Deterministički signal
x = np.sin(np.pi*t)*(np.heaviside(t, 1)-np.heaviside(t-3, 1))

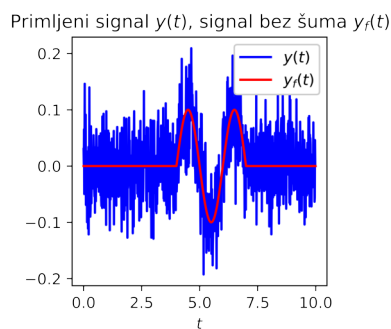
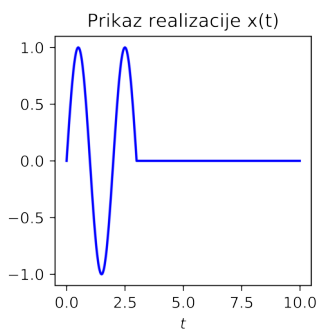
# Šum
n = np.random.normal(0,0.05, N)

# Kašnjenje
T = 4

# Primljeni signal
y_bez_shuma = 0.1*np.roll(x, int(T*N/10))
y = y_bez_shuma + n

ssp.slprom1D.grafik(t,x,
                    naslov = "Prikaz realizacije x(t)")

ssp.slprom1D.grafik(t, y, t, y_bez_shuma,
                    naslov = 'Primljeni signal $y(t)$, signal bez šuma $y_{f}(t)$',
                    legenda = ['$y(t)$', '$y_{f}(t)$'])
    
```



PROGRAMSKI KOD 5.8

```

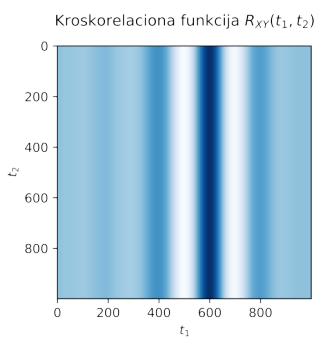
# Pravljenje procesa  $X(t)$  i  $Y(t)$ 
M = len(x)

X_t = np.empty((M, N))
Y_t = np.empty((M, N))
Y_t2 = np.empty((M, N))
X_t2 = np.empty((M, N))

for k in range(M):
    X_t[k, :] = np.roll(x, k)
    # specificno! :
    Y_t[:,k] = np.flip(y)

R_xy = ssp.slproc.korelacija(X_t, Y_t,
                             naslov = "Kroskorelaciona funkcija  $R_{XY}(t_1, t_2)$ ");

```



PROGRAMSKI KOD 5.9

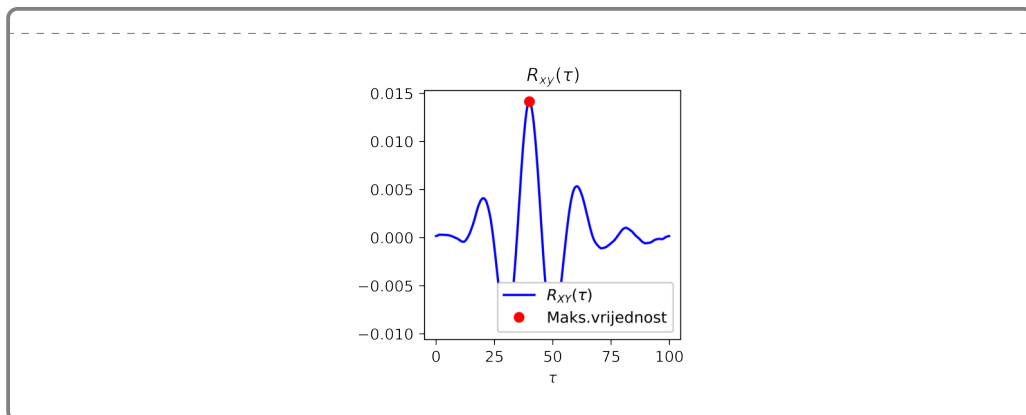
```

tau, R_xy_tau = ssp.slproc.korelacija_stacionarna(R_xy, delta_t,
                                                  prikaz = False)

R_xy_minus_tau = np.flip(R_xy_tau)
maks_indeks = np.argmax(R_xy_minus_tau)

ssp.slprom1D.grafik(tau, R_xy_minus_tau,
                    tau[maks_indeks], R_xy_minus_tau[maks_indeks], stil2='ro',
                    naslov = ' $R_{xy}(\tau)$ ', x_labela = ' $\tau$ ',
                    legenda = [' $R_{XY}(\tau)$ ', 'Maks.vrijednost'],
                    lokacija_lgd = 'lower right')

```



5.4.2 Identifikacija sistema

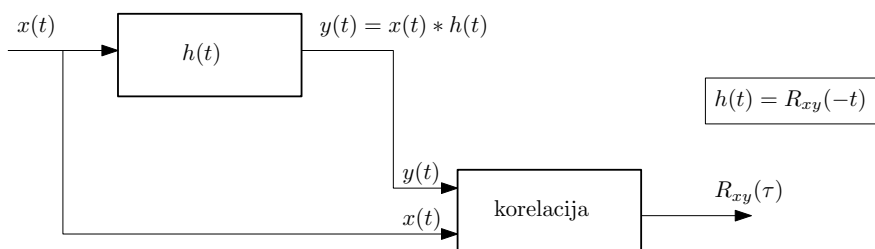
Ako se sistem sa impulsnim odzivom $h(t)$ pobuđuje stacionarnim bijelim šumom $X(t)$ tada je $R_{XX}(\tau) = I\delta(\tau)$. To znači da:

$$\begin{aligned}
 R_{XY}(\tau) &= R_{XX}(\tau) * h(-\tau) \\
 &= I\delta(\tau) * h(-\tau) \\
 &= Ih(-\tau)
 \end{aligned}
 \tag{5.27}$$

odnosno, za $I = 1$ vrijedi:

$$h(\tau) = R_{XY}(-\tau) = R_{XY}(t, t + \tau) \tag{5.28}$$

pa se sistem za identifikaciju impulsnog odziva može predstaviti blok strukturom na slici 5.2. Ilustracija zadatka data je u formi programskih kodova 5.10-5.12.



Slika 5.2: Identifikacija sistema pomoću bijelog šuma

PROGRAMSKI KOD 5.10

```

# Generiranje pobudnog signala - bijeli šum
N = 1000
trajanje = 50
t = np.arange(0, trajanje, trajanje/N)

# Pobudni signal
    
```

```

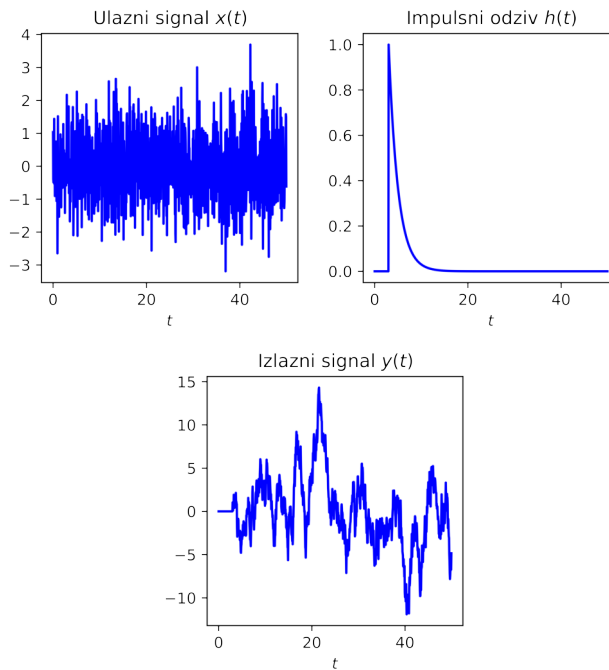
x = np.random.normal(0,1,N)

# Impulsni odziv
h = 1*np.exp(-(t-3)/2)*np.heaviside(t-3, 1)

# Izlazni signal
y = np.convolve(x,h)[0:N]

ssp.slprom1D.grafik(t, x,
                    naslov = "Ulazni signal $x(t)$")
ssp.slprom1D.grafik(t, h,
                    naslov = "Impulsni odziv $h(t)$")
ssp.slprom1D.grafik(t, y,
                    naslov = "Izlazni signal $y(t)$")

```



PROGRAMSKI KOD 5.11

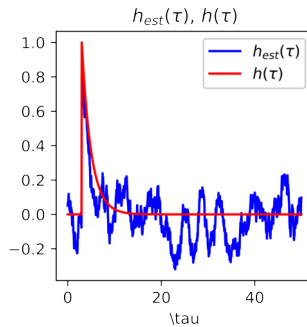
```

# Očekivana vrijednost  $h_{est}(\tau) = E[x(t-\tau)y(t)]$ 
h_est = np.empty((N))

for Tau in range(N):
    h_est[Tau] = np.mean(np.roll(x, Tau)*y)

ssp.slprom1D.grafik(t, h_est, t, h,
                    naslov='$h_{est}(\tau)$, $h(\tau)$',
                    x_labela= '\tau', legenda = ['$h_{est}(\tau)$', '$h(\tau)$'])

```



PROGRAMSKI KOD 5.12

```
# h(tau)=R_xy(-tau)=R_xy(tmax,tmax-tau)

# Pravljenje procesa X(t) i Y(t)
M = len(x)

X_t = np.empty((M, N))
Y_t = np.empty((M, N))

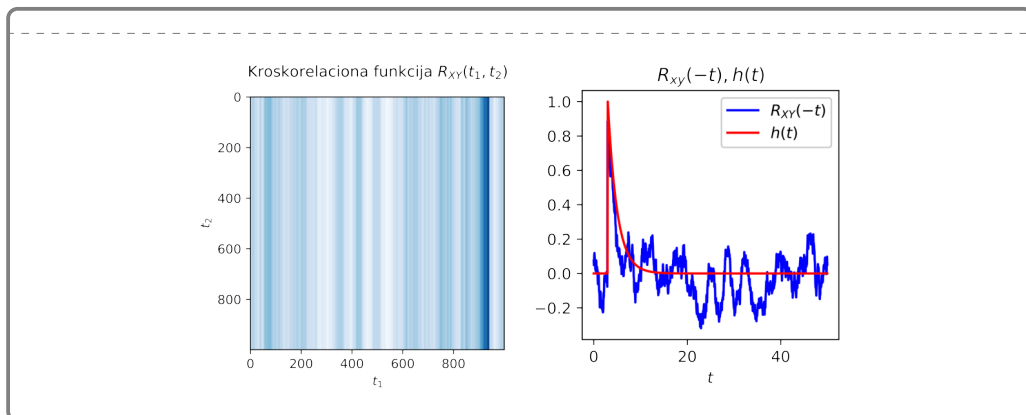
for k in range(M):
    # specificno! :
    X_t[k, :] = np.roll(x, -k)
    Y_t[:,k] = y

R_xy = ssp.slproc.korelacija(X_t, Y_t,
                             naslov = "Kroskorelaciona funkcija $R_{XY}(t_1,t_2)$");

delta_t = t[1]-t[0]
tau_vektor, R_xy_tau = ssp.slproc.korelacija_stacionarna(R_xy, delta_t,
                                                           prikaz = False)

R_xy_minus_tau = np.flip(R_xy_tau, axis = 0)

ssp.slprom1D.grafik(tau_vektor, R_xy_minus_tau , t, h,
                    naslov = '$R_{xy}(-t), h(t)$',
                    legenda = ['$R_{XY}(-t)$', '$h(t)$'])
```



Zadaci za samostalan rad

1. Neka su $X(t)$ i $Y(t)$ definisani sa:

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t) \cos(t) \\ Y(t) &= B(t) \sin(t) \\ E[A(t)] &= E[B(t)] = 0 \\ R_{AA}(\tau) &= R_{BB}(\tau) = R(\tau) \\ R_{AB}(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Korištenjem prethodno opisanih procesa, pokazati da suma slučajnih procesa koji nisu stacionarni u širem smislu, može biti stacionarna.

2. Neka je slučajni proces dat sa

$$X(t) = b \cos(2\pi\Psi + \Theta),$$

gdje je b konstanta, Θ je uniformna slučajna promjenjiva definisana na intervalu $[0, 2\pi)$ i Ψ je slučajna promjenjiva koja je nezavisna od Θ i ima funkciju raspodjele vjerovatnoće datu sa $f_{\Psi}(\psi)$. Naći relaciju za spektralnu gustinu $S_{XX}(f)$ u zavisnosti od $f_{\Psi}(\psi)$.

3. Neka je $X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$ slučajni proces, gdje su A_n i B_n slučajne promjenjive tako da vrijedi $E[A_n] = E[B_n] = 0$, $E[A_n B_m] = 0$, $E[A_n A_m] = \delta_{n,m} E[A_n^2]$ i $E[B_n B_m] = \delta_{n,m} E[B_n^2]$ za svako m i n .

(a) Naći autokorelacionu funkciju $R_{XX}(t, t + \tau)$.

(b) Ako je $E[B_n^2] = E[A_n^2]$, da li je proces $X(t)$ stacionaran?

4. Sinusni signal oblika $X(t) = b \cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ se odašilje sa fiksne platforme. Neka se signal prima putem antene na mobilnoj platformi koja se kreće u odnosu na predajnik brzinom V , relativno u odnosu na smjer propagacije signala između predajnika i prijemnika. Usljed Dopplerovog efekta, to uzrokuje pomjeranje u obliku

$$Y(t) = b \cos \left(2\pi f_0 \left(1 + \frac{V}{c} \right) t + \Theta \right),$$

gdje je c brzina svjetlosti. Naći spektralnu gustinu primljenog signala ako je V uniformno raspoređena promjenljiva na $(-v_0, v_0)$.

6. Sinteza linearnih optimalnih sistema sa stohastičkim ulazima

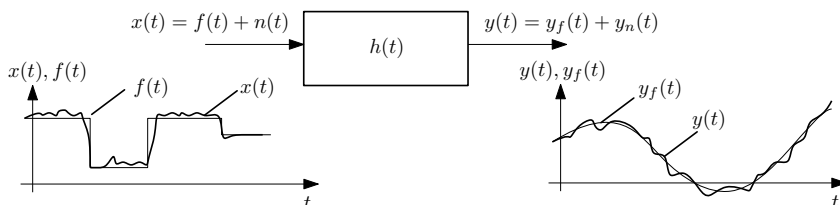
6.1 Uvodna razmatranja

U inženjerskim primjenama jedan od najčešće susretanih zahtjeva je eliminacija ili smanjenje utjecaja nepoželjnog šuma. Ukoliko se pretpostavi da se signal $x(t)$ sastoji od korisnog signala $f(t)$ i aditivnog šuma $n(t)$ tada se može napisati:

$$x(t) = f(t) + n(t) \quad (6.1)$$

Šum $n(t)$ predstavlja stohastički signal koji se može modelirati slučajnim procesom. Zadatak od interesa je opisati, odnosno procijeniti signal $f(t)$ na osnovu signala $x(t)$ i nekih apriori poznatih informacija o $f(t)$ i $n(t)$.

Procjene se mogu raditi korištenjem linearnih sistema sa promjenljivim parametrima.



Slika 6.1: Prolaz signala sa šumom kroz LTI sistem

Naime, ukoliko je $x(t)$ ulaz u sistem (slika 6.1) tada je $y(t)$ izlaz iz sistema pa vrijedi:

$$y(t) = L\{x(t)\} = x(t) * h(t) = \underbrace{f(t) * h(t)}_{y_f(t)} + \underbrace{n(t) * h(t)}_{y_n(t)} = y_f(t) + y_n(t) \quad (6.2)$$

gdje se $y_f(t)$ može smatrati korisnim dijelom izlaznog signala, a $y_n(t)$ šumom na izlazu iz sistema.

Iz relacije (6.1) slijedi izraz za autokorelacionu funkciju:

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E[(f(t_1) + n(t_1))(f(t_2) + n(t_2))] \quad (6.3)$$

Ukoliko se pretpostavi da su $f(t)$ i $n(t)$ međusobno nezavisni procesi, što je validna pretpostavka u velikom broju primjena, te da je očekivana vrijednost šuma jednaka nuli,

može se izvesti:

$$\begin{aligned}
 R_{xx}(t_1, t_2) &= E[(f(t_1) + n(t_1))(f(t_2) + n(t_2))] \\
 &= E[(f(t_1)f(t_2))] + \underbrace{E[f(t_1)n(t_2)]}_{E[f(t_1)]E[n(t_2)]=0} + \dots \\
 &\quad \dots + \underbrace{E[f(t_2)n(t_1)]}_{E[f(t_2)]E[n(t_1)]=0} + E[n(t_1)n(t_2)] \\
 &= R_{ff}(t_1, t_2) + R_{nn}(t_1, t_2)
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

što se za slučaj stacionarnih procesa svodi na:

$$R_{xx}(\tau) = R_{ff}(\tau) + R_{nn}(\tau) \tag{6.5}$$

odnosno, u spektralnom domenu:

$$S_{yy}(\omega) = S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2 = S_{ff}(\omega)|H(\omega)|^2 + S_{nn}(\omega)|H(\omega)|^2 \tag{6.6}$$

Zadatak je odrediti $h(t)$, odnosno izvršiti sintezu linearnog sistema, tako da procjena $y(t)$ u nekom smislu bude najbliža $f(t)$.

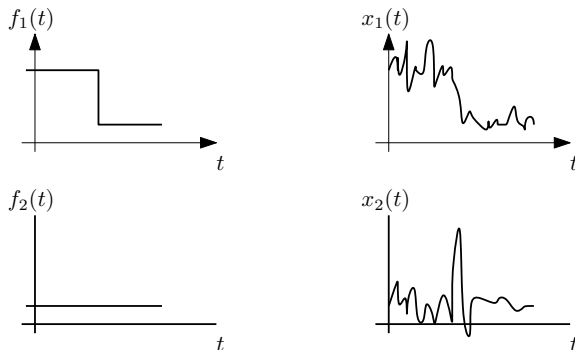
Od interesa su sljedeća dva slučaja:

- signal $f(t)$ je deterministički i poznat, a signal $n(t)$ je slučajan, stacionaran i poznata je njegova spektralna gustina (npr. *prilagođeni filter*, *transferzalni filter*),
- signali $f(t)$ i $n(t)$ su stohastički i stacionarni, pri čemu su poznate njihove sopstvene i međusobne spektralne gustine (npr. *Wienerov filter*).

Važno je napomenuti da sistem koji se sintetizira bi trebao da bude fizički ostvariv, odnosno $h(t)$ treba biti kauzalan signal.

6.2 Odnos snage signala i šuma (SNR)

Nekada je od interesa ne nužno izvršiti ekstrakciju korisnog signala, već samo uvrđiti njegovo postojanje. Npr. pri prenosu digitalnog signala se može javiti šum (slika 6.2).



Slika 6.2: Prenos „digitalnog” signala sa šumom

Tada je od interesa samo utvrditi npr. postojanje logičke jedinice odnosno nule, a ne nužno i njegov egzaktni oblik. Procjena postojanja signala se vrši u nekom trenutku, npr. $t = t_0$. Procjena će biti uspješno izvršena ako je snaga signala $y_f(t)$ što je moguće veća u odnosu na snagu signala $y_n(t)$. U tu svrhu se uvodi pojam odnosa snage signala i šuma (eng. Signal to Noise Ratio - SNR). Odnos signala i šuma se definira kao odnos varijansi korisnog signala i šuma, odnosno:

$$\text{SNR} = \frac{P_f}{P_n} = \frac{E[f^2(t)]}{E[n^2(t)]} \quad (6.7)$$

Obično se teži analizi stacionarnih slučajnih procesa sa očekivanim vrijednostima jednakim nuli, pa se onda SNR računa kao:

$$\text{SNR} = \frac{R_{ff}(0)}{R_{nn}(0)} \quad (6.8)$$

Važno je primijetiti da obzirom da mnogi signali imaju jako širok dinamički opseg, SNR se izražava i u logaritamskoj razmjeri (decibelima), i to:

$$P_{f,dB} = 10 \log_{10}(P_f) \quad (6.9)$$

$$P_{n,dB} = 10 \log_{10}(P_n) \quad (6.10)$$

U skladu sa relacijama (6.9) i (6.10) izraz (6.7) postaje:

$$\text{SNR}_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_f}{P_n} \right) = 10 \log_{10}(P_f) - 10 \log_{10}(P_n) = P_{f,dB} - P_{n,dB} \quad (6.11)$$

Ilustracija SNR-a je data programskim kodovima 6.1-6.4.

PROGRAMSKI KOD 6.1

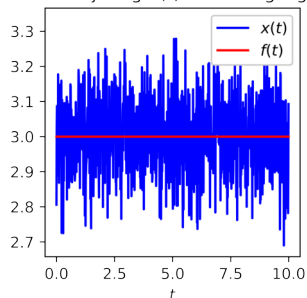
```
N = 1000
step = 10/N
t = np.arange(0, 10, step)

# Stacionarni proces
f = 3*np.ones(np.shape(t))

# Šum
NL = 0.1
n = NL*np.random.normal(0,1, N)

# Signal sa šumom
x = f + n

# Prikaz x(t) i f(t)
ssp.slprom1D.grafik(t, x, t, f,
                    naslov = "Prikaz zašumljenog $x(t)$ i korisnog signala $f(t)$",
                    legenda = ['$x(t)$', '$f(t)$'])
```

Prikaz zašumljenog $x(t)$ i korisnog signala $f(t)$ 

PROGRAMSKI KOD 6.2

```

Pf = np.sum(f**2)*step # Snaga signala
print("Snaga signala Pf: {:.2f}".format(Pf))

Pn = np.sum(n**2)*step # Snaga šuma
print("Snaga šuma Pn: {:.2f}".format(Pn))

SNR = Pf/Pn # SNR
print("Odnos signal - šum: {:.2f}".format(SNR))

# Proračun u dB

Pf_dB = 10*np.log10(Pf)
print("Snaga signala izražena u dB: {:.2f}".format(Pf_dB))

Pn_dB = 10*np.log10(Pn)
print("Snaga šuma izražena u dB: {:.2f}".format(Pn_dB))

SNR_dB = 10*np.log10(SNR)
print("Odnos signal - šum izražen u dB: {:.2f}".format(SNR_dB))

```

```

Snaga signala Pf: 90.00
Snaga šuma Pn: 0.10
Odnos signal - šum: 873.08
Snaga signala izražena u dB: 19.54
Snaga šuma izražena u dB: -9.87
Odnos signal - šum izražen u dB: 29.41

```

PROGRAMSKI KOD 6.3

```

N = 1000
M = 500
step = 10/N

t = np.arange(0, 10, step)
sproc_x = np.empty((M, N))
f = np.empty((M, N))
n = np.empty((M, N))

```

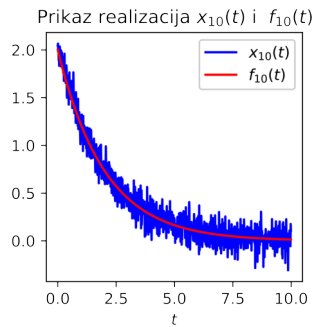
```

NL = 0.1 # "intenzitet" šuma

for k in range(M):
    f[k, :] = 2*np.exp(-t/2)
    n[k, :] = NL*np.random.normal(0,1, N)
    x = f[k, :]+n[k, :]
    slproc_x[k, :] = x

ssp.slprom1D.grafik(t,slproc_x[10,:],t,f[10,:],
                   naslov = "Prikaz realizacija $x_{10}(t)$ i $f_{10}(t)$",
                   legenda = ['$x_{10}(t)$', '$f_{10}(t)$'])

```



PROGRAMSKI KOD 6.4

```

# Određivanje očekivane srednjekvadratne vrijednosti procesa
Pf = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pf[i] = np.mean((f[:,i])**2)

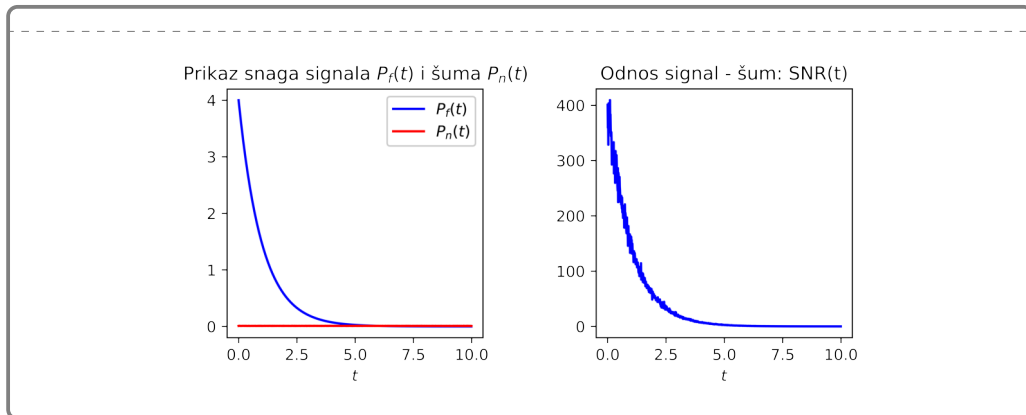
Pn = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pn[i] = np.mean((n[:,i])**2)

#Prikaz snage signala i šuma
ssp.slprom1D.grafik(t, Pf, t, Pn,
                   naslov = "Prikaz snaga signala $P_f(t)$ i šuma $P_n(t)$",
                   legenda = ['$P_f(t)$', '$P_n(t)$'])

SNR = Pf/Pn

#Prikaz SNR
ssp.slprom1D.grafik(t, SNR, naslov = "Odnos signal - šum: SNR(t)")

```



Primjer 6.1:

Neka je na ulazu u RC krug doveden proces $x(t) = f(t) + n(t)$, gdje je $n(t)$ bijeli Gaussov šum, a $f(t) = a \cos(\omega_0 t + \theta)$ korisni deterministički slučajni proces, pri čemu je θ slučajna uniformno raspoređena varijabla iz intervala $[0, 2\pi)$ nezavisna od šuma. Odrediti SNR na izlazu iz sistema, te odrediti vremensku konstantu RC kruga tako da SNR bude maksimalan.

Rješenje:

Neka je izlazni signal $y(t) = y_f(t) + y_n(t)$. U stacionarnom stanju (za t dovoljno veliko), vrijedi:

$$y_f(t) = a |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \angle H(\omega_0) + \theta)$$

pa je snaga:

$$E[y_f^2(t)] = R_{y_f y_f}(0) = \frac{a^2 |H(\omega_0)|^2}{2}$$

S druge strane, autokorelaciona funkcija $R_{n n}(\tau) = I \delta(\tau)$ izlaznog signala se za pretpostavljeni šum može izračunati kao:

$$\begin{aligned} R_{y_n y_n}(\tau) &= F^{-1}\{S_{y_n y_n}(\omega)\} \\ &= F^{-1}\{S_{n n}(\omega) |H(\omega)|^2\} \\ &= F^{-1}\left\{ I \frac{1}{|jRC\omega + 1|^2} \right\} \\ &= F^{-1}\left\{ \frac{I}{(RC\omega)^2 + 1} = \frac{\frac{2}{RC} \frac{I}{2(RC)}}{\omega^2 + (\frac{1}{RC})^2} \right\} \\ &= \frac{I}{2RC} e^{-\frac{1}{RC}|\tau|} \end{aligned}$$

odnosno:

$$E[y_n^2(t)] = R_{y_n y_n}(0) = \frac{I}{2RC}$$

Prema tome, SNR izlaza RC kruga je dat kao:

$$\text{SNR}[t \gg 1] = \frac{E[y_f^2(t)]}{E[y_n^2(t)]} = \frac{\frac{a^2 |H(\omega_0)|^2}{2}}{\frac{I}{2RC}} = \frac{2RCa^2 |H(\omega_0)|^2}{2I} = \frac{a^2}{I} RC \frac{1}{(\omega_0 RC)^2 + 1}$$

Ako se želi maksimizirati SNR na izlazu iz filtera tada se dobiva:

$$\frac{d(\text{SNR})}{d(RC)} = 0 \Rightarrow RC_{opt} = \frac{1}{\omega_0}$$

odnosno:

$$\text{SNR}_{max} = \frac{a^2}{2\omega_0 I}$$

Ilustracija ovog zadatka je data programskim kodovima 6.5-6.8.

PROGRAMSKI KOD 6.5

```

N = 1000
M = 2000
step = 10/N

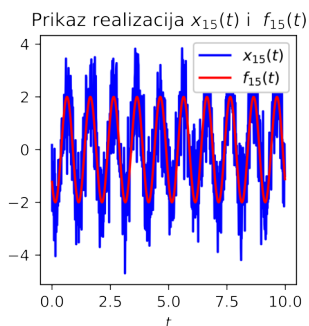
t = np.arange(0, 10, step)
slproc_x = np.empty((M, N))
f = np.empty((M, N))
n = np.empty((M, N))
theta = np.random.uniform(0, 2*np.pi, M)

a = 2
omega0 = 2*np.pi
NL = 1

for k in range(M):
    f[k,:] = a*np.cos(omega0*t+theta[k])
    n[k,:] = NL*np.random.normal(0, 1, N)
    x = f[k,:]+n[k,:]
    slproc_x[k,:] = x

ssp.slprom1D.grafik(t, slproc_x[15,:], t, f[15,:],
                    naslov = "Prikaz realizacija $x_{15}(t)$ i $f_{15}(t)$",
                    legenda = ['$x_{15}(t)$', '$f_{15}(t)$'])

```



PROGRAMSKI KOD 6.6

```
Pf = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pf[i] = np.mean((f[:,i])**2)

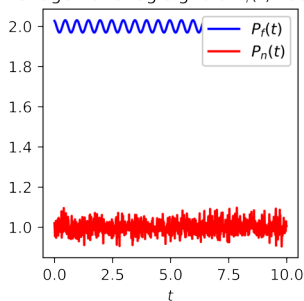
Pn = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pn[i] = np.mean((n[:,i])**2)

#Crtanje snage signala i šuma
ssp.slprom1D.grafik(t, Pf, t, Pn,
                    naslov = "Prikaz snage korisnog signala $P_f(t)$ i šuma $P_n(t)$",
                    legenda = ['$P_f(t)$', '$P_n(t)$'])

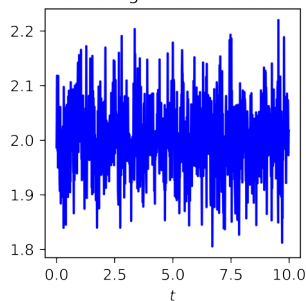
SNR = Pf/Pn

#Prikaz SNR
ssp.slprom1D.grafik(t, SNR, naslov = "Odnos signal-šum na ulazu")
```

Prikaz snage korisnog signala $P_f(t)$ i šuma $P_n(t)$



Odnos signal-šum na ulazu



PROGRAMSKI KOD 6.7

```
# Propustanje signala kroz sistem
RC = 1/(0.2*omega0)
h = (1/RC)* np.exp(-t/RC)
```

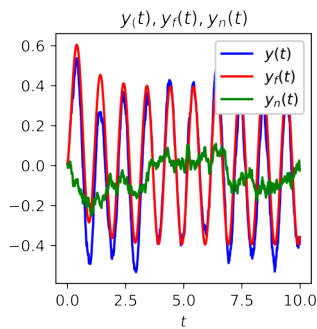
```

Y = np.empty((M, N))
Y_f = np.empty((M, N))
Y_n = np.empty((M, N))

for k in range(M):
    y = np.convolve(slproc_x[k,:], h)*step
    Y[k, :] = y[0:N]
    yf = np.convolve(f[k,:], h)*step
    Y_f[k, :] = yf[0:N]
    yn = np.convolve(n[k,:], h)*step
    Y_n[k, :] = yn[0:N]

Ntest = 88
#Crtanje izlaznog signala (slučajnog procesa)
ssp.slprom1D.grafik(t, Y[Ntest,:], t, Y_f[Ntest, :], t, Y_n[Ntest,:],
                    naslov = '$y(t), y_f(t), y_n(t)$',
                    legenda = ['$y(t)$', '$y_f(t)$', '$y_n(t)$'])

```



PROGRAMSKI KOD 6.8

```

#Određivanje očekivane srednjekvadratne vrijednosti procesa
Pyf = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pyf[i] = np.mean((Y_f[:, i])**2)

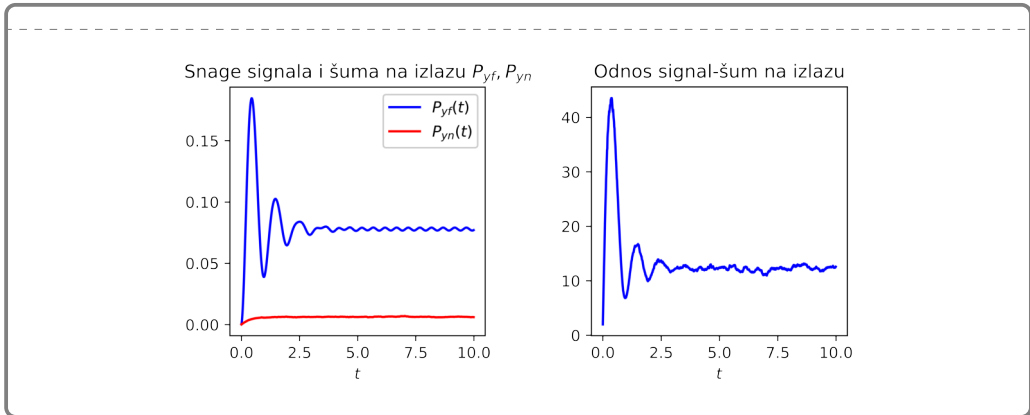
Pyn = np.empty(N)
for i in range(N):
    Pyn[i] = np.mean((Y_n[:, i])**2)

#Crtanje snage signala i šuma
ssp.slprom1D.grafik(t, Pyf, t, Pyn,
                    naslov = "Snage signala i šuma na izlazu $P_{yf}$, $P_{yn}$",
                    legenda = ['$P_{yf}(t)$', '$P_{yn}(t)$'])

SNRout = Pyf/Pyn

#Prikaz SNR
ssp.slprom1D.grafik(t, SNRout, naslov = "Odnos signal-šum na izlazu")

```



Jako često ulazni proces nije stacionaran, pa SNR ovisi o vremena (relacija (6.7)). U skladu s tim, obično je cilj maksimizirati SNR za signal u nekom vremenskom trenutku $t = t_0$ (trenutku u kojem se vrši procjena signala):

$$\text{SNR}[t_0] = \frac{y_f^2(t_0)}{E[y_n^2(t)]|_{t=t_0}} \quad (6.12)$$

Prema tome, zadatak optimizacije je izvršiti maksimizaciju SNR-a u trenutku t_0 . Korisni dio izlaznog signala se može odrediti konvolucijom korisnog dijela ulaznog signala i impulsnog odziva:

$$y_f(t) = f(t) * h(t) \quad (6.13)$$

Primjenom direktne Fourierove transformacije na relaciju (6.13) slijedi:

$$Y_f(j\omega) = F(j\omega)H(j\omega) \quad (6.14)$$

dok inverzna Fourierova transformacija omogućava sljedeći proračun:

$$y_f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (6.15)$$

$$y_f(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \quad (6.16)$$

Također:

$$\begin{aligned} E[y_n^2(t)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{y_n y_n}(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega) H^2(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (6.17)$$

Oдавде slijedi:

$$\text{SNR}[t_0] = \frac{y_f^2(t_0)}{E[y_n^2(t)]|_{t=t_0}} = \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega) H^2(\omega) d\omega} \quad (6.18)$$

6.3 Prilagođeni filter

Kako bi se odredila maksimalna vrijednost izraza (6.18) koristi se poznata **Schwartzova** nejednakost:

$$\left| \int_{-a}^a Z(j\omega)W(j\omega)d\omega \right|^2 \leq \int_{-a}^a |Z(j\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-a}^a |W(j\omega)|^2 d\omega \quad (6.19)$$

Znak jednakosti vrijedi ako je $W(j\omega) = kZ(-j\omega)$. Tada relacija (6.18) postaje:

$$\begin{aligned} \text{SNR}[t_0] &= \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t_0} d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega)H^2(\omega)d\omega} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(j\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} H(j\omega) \sqrt{S_{nn}(\omega)} e^{j\omega t_0} d\omega \right]^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega)H^2(\omega)d\omega} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{F(j\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} e^{j\omega t_0} \right|^2 d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega) \sqrt{S_{nn}(\omega)}|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega)H^2(\omega)d\omega} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)} d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\omega)|^2 S_{nn}(\omega)d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega)H^2(\omega)d\omega} \end{aligned} \quad (6.20)$$

pri čemu je usvojeno $Z(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{\sqrt{S_{nn}(\omega)}} e^{j\omega t_0}$ i $W(j\omega) = H(j\omega) \sqrt{S_{nn}(\omega)}$. Bitno je napomenuti da se može pokazati da za stacionaran proces vrijedi $S_{nn}(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \mathbf{R}$. Znak jednakosti (odnosno maksimalan SNR) u relaciji (6.20) se postiže za $W(j\omega) = kZ(-j\omega)$, odnosno:

$$H(j\omega) \sqrt{S_{nn}(\omega)} = k \frac{F(-j\omega)}{\sqrt{S_{nn}(-\omega)}} e^{-j\omega t_0} \quad (6.21)$$

što se svodi na:

$$H(j\omega) = k \frac{F(-j\omega)}{S_{nn}(\omega)} e^{-j\omega t_0} \quad (6.22)$$

Uvrštavanjem izraza (6.22) u (6.20) dobiva se:

$$\begin{aligned} \max(\text{SNR}(t_0)) &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)} d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} H^2(\omega) S_{nn}(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega) H^2(\omega) d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|F(j\omega)|^2}{S_{nn}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^2(\omega)}{S_{nn}(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (6.23)$$

Ovaj maksimalni SNR se dobiva za $H(j\omega)$ dato sa (6.22).

Primjer 6.2:

Neka $n(t)$ predstavlja stacionarni bijeli šum sa spektralnom gustinom $S_{nn}(\omega) = 1$, a korisni signal opisan sa $f(t) = \frac{1}{T}p(\frac{t-T/2}{T})$. Odrediti impulsni odziv optimalnog prilagođenog filtera.

Rješenje:

Optimalni prilagođeni filter se formira kao:

$$H(j\omega) = k \frac{F(-j\omega)}{S_{nn}(t_0)} e^{-j\omega t_0} = k F(-j\omega) e^{-j\omega t_0}$$

odnosno:

$$h(t) = k f(-t + t_0)$$

Maksimalan SNR se računa kao:

$$\begin{aligned} [SNR]_{max} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F^2(\omega)}{S_{nn}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{1}{T}\right)^2 dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned}$$

Primjer 6.3:

Neka je dat signal na ulazu u prilagođeni filter:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

koji predstavlja tipičan signal kod impulsno-kodnih modulacija. Odrediti optimalan prilagođeni filter.

Rješenje:

Optimalan prilagođeni filter koji proizvodi maksimalan SNR u trenutku t_0 ima oblik:

$$h(t) = f(t_0 - t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t_0 - t < T \Leftrightarrow t_0 - T < t \leq t_0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

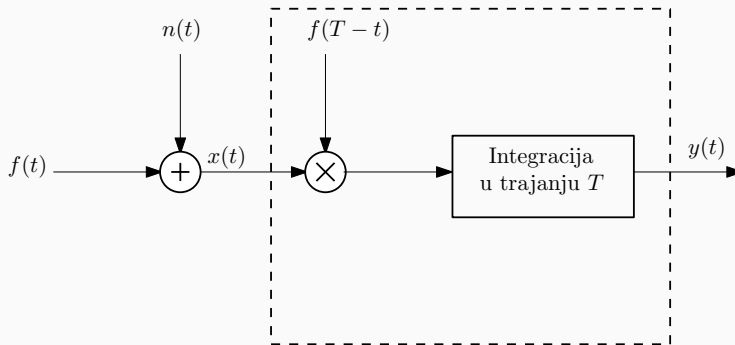
Jasno je da ako se želi dobiti kauzalan filter, tada $h(t)$ treba biti kauzalan signal, a to je moguće samo ako je $t_0 - T \geq 0$, odnosno $t_0 \geq T$. Oдавde slijedi da mora vrijediti $f(\tau) = 0$ za $\tau = t_0 - t < 0 \Rightarrow t > t_0$, odnosno, filter je kauzalan samo ako je $f(t)$ ograničenog trajanja. Ako $n(t)$ nije bijeli šum, po pravilu se, korištenjem ranije navedenih realizacija dobivaju signali neograničenog trajanja (jer se uvode polovi u prenosnu funkciju $1/S_{nn}(\omega)$) pa su tada ovakve realizacije nekauzalne. Tipično, za t_0 se odabire trajanje signala (u ovom slučaju $t_0 = T$). Tada vrijedi da je $h(t) = f(t_0 - t) = f(T - t)$, odnosno:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)kf(-(t - \tau) + T)d\tau \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)f(\tau + (T - t))d\tau \\ &= k\mathfrak{R}_{ff}(T - t) \end{aligned}$$

pa je jasno da se maksimum $y_f(t)$ u tom slučaju postiže za maksimum autokorelacione funkcije, odnosno za $t = T$. Također, prilagođeni filter se zbog toga još naziva i *autokorelacioni* filter.

Implementacija prilagođenog filtera - tzv. *Integrate and dump*

Prilagođeni filter se može implementirati korištenjem blok sheme prikazane na slici 6.3.



Slika 6.3: „Integrate and dump” implementacija prilagođenog filtera

Može se pokazati da za prilagođeni filter $h(t) = f(t_0 - t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - u)x(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0 - (t - u))x(u)du \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u + t_0 - t)x(u)du$$

Ukoliko je $f(t)$ signal konačnog trajanja (npr. od 0 do T), tada signal $f(u + t_0 - t)$ egzistira za $0 \leq u + t_0 - t < T \Rightarrow t - t_0 \leq u < T + (t - t_0)$ čime se integral svodi na:

$$y(t) = \int_{t-t_0}^{t-t_0+T} f(u + t_0 - t)x(u)du$$

Za slučaj pravougaonog impulsa $f(t)$, integral u prethodnoj relaciji se za $t_0 = T$ pojednostavljuje na:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(u)du$$

Ilustracija ovog zadatka je data programskim kodovima 6.9-6.11.

PROGRAMSKI KOD 6.9

```
N=1000

step = 10/N

t = np.arange(0, 10, step)
kodovi = np.array([1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1])

f = np.ones(np.shape(t))

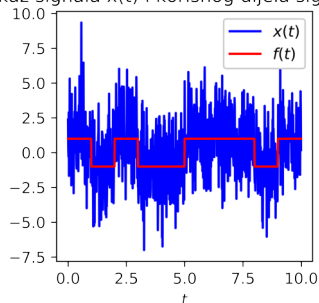
for k in range(10):
    f[int(k*N/10):int((k+1)*N/10)] = kodovi[k]

n = np.random.normal(0,2,N)

x = f + n

#Crtanje signala
ssp.slprom1D.grafik(t, x, t, f,
    naslov = "Prikaz signala x(t) i korisnog dijela signala f(t)",
    legenda = ['$x(t)$', '$f(t)$'])
```

Prikaz signala $x(t)$ i korisnog dijela signala $f(t)$



PROGRAMSKI KOD 6.10

```

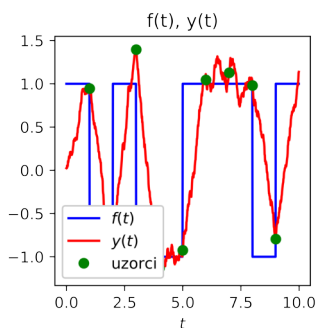
#Formiranje prilagođenog filtera konvolucijom:
h = np.ones( np.shape( np.arange(0,1,step)))
y = step*np.convolve(x,h)[0:N]

#sempliranje:
tsempl = t[np.arange(int(N/10),N,int(N/10))]
ysempl = y[np.arange(int(N/10),N,int(N/10))]

ssp.slprom1D.grafik(t, f, t, y, tsempl, ysempl,
                   stil3='go',
                   naslov='f(t), y(t)',
                   legenda=['$f(t)$', '$y(t)$','uzorci'],
                   lokacija_lgd='lower left')

#Usporedba:
print("Originalni diskretni signal: ",kodovi[0:9]>0)
print("Detektovani diskretni signal: ", ysempl>0)

```



```

Originalni diskretni signal: [ True False  True False False  True  True  True False]
Detektovani diskretni signal: [ True False  True False False  True  True  True False]

```

PROGRAMSKI KOD 6.11

```

#Formiranje prilagođenog filtera - Integrate and dump:
y = np.zeros(np.shape(t))
y_novo = np.zeros(np.shape(t))

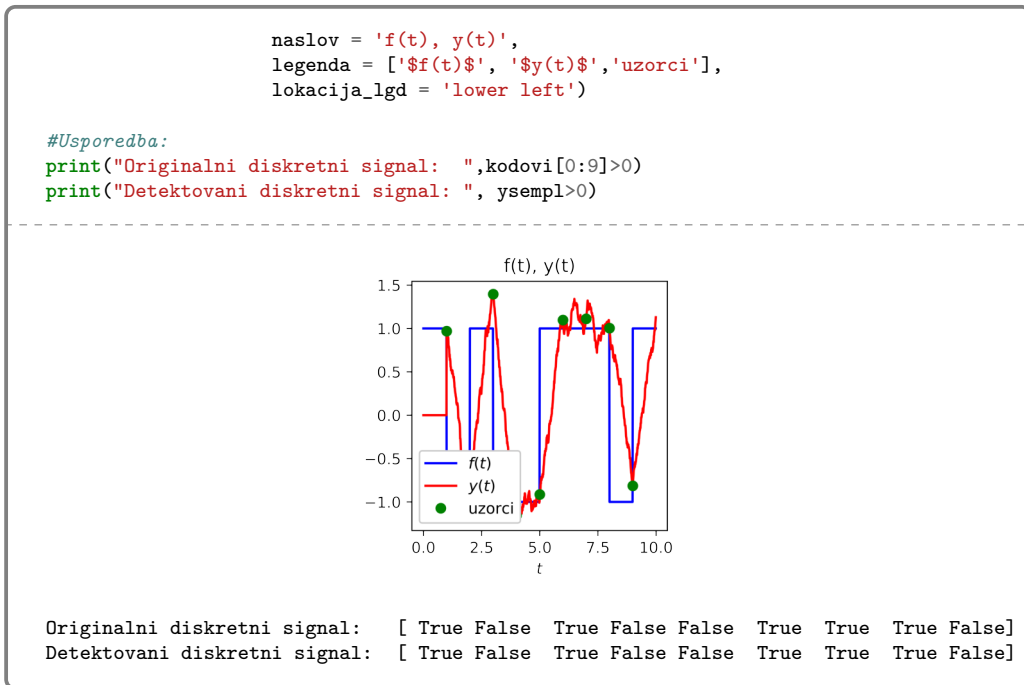
T = int(N/10)

for i in np.arange(T, N, 1):
    y[i] = step*np.sum(x[i-T:i+1])

#sempliranje:
tsempl = t[np.arange(int(N/10), N, int(N/10))]
ysempl = y[np.arange(int(N/10), N, int(N/10))]

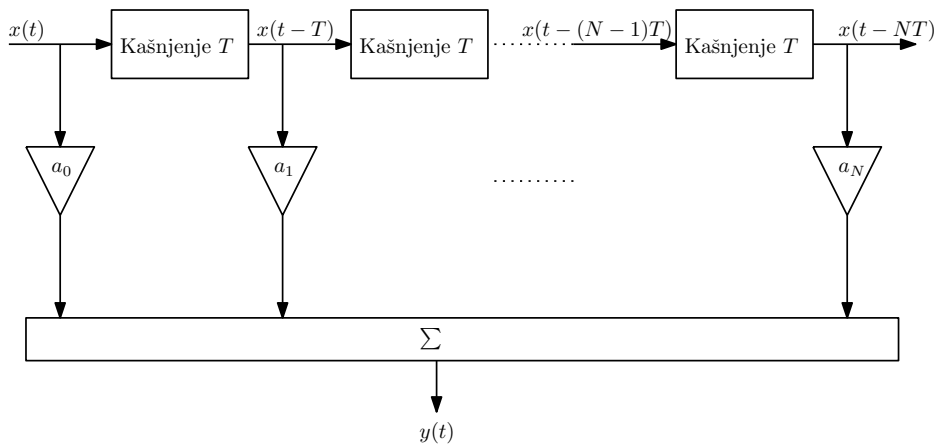
#Crtanje signala
ssp.slprom1D.grafik(t, f, t, y, tsempl, ysempl,
                   stil3='go',

```



6.4 Transferzalni filter

Kako bi se prevazišao problem (ne)kauzalnosti, obično se pretpostavlja oblik impulsnog odziva $h(t)$ u funkciji od parametara \mathbf{a} , npr. $h(t, \mathbf{a})$ a potom se radi određivanje optimalnih parametara, ali tako da filter i dalje bude kauzalan.



Slika 6.4: Struktura transferzalnog filtera

Neka se pretpostavi diferencijalna jednačina koja opisuje prilagođeni filter u formi:

$$y(t) = a_0x(t) + a_1x(t - T) + a_2x(t - 2T) + \dots + a_Nx(t - NT) \quad (6.24)$$

Relacija (6.24) zapravo predstavlja svojevrsni ekvivalent FIR filtera u analognoj formi. Tada vrijedi:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \sum_{k=0}^N a_k X(j\omega) e^{-j\omega kT} \quad (6.25)$$

odnosno:

$$H(j\omega) = \sum_{k=0}^N a_k e^{-j\omega kT} \quad (6.26)$$

Također:

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^N a_k n(t - kT) \quad (6.27)$$

Tada se može izračunati:

$$\begin{aligned} E[y_n^2(t_0)] &= E \left[\sum_{k=0}^N a_k n(t_0 - kT) \sum_{r=0}^N a_r n(t_0 - rT) \right] \\ &= E \left[\sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r n(t_0 - kT) n(t_0 - rT) \right] \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r E [n(t_0 - kT) n(t_0 - rT)] \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r R_{nn}(t_0 - kT, t_0 - rT) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r R_{nn}(rT - kT) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Također vrijedi:

$$y_f(t_0) = \sum_{k=0}^N a_k f(t_0 - kT) \quad (6.29)$$

Oдавде se izračunava:

$$SNR[t_0] = \frac{\left[\sum_{k=0}^N a_k f(t_0 - kT) \right]^2}{\sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r R_{nn}(rT - kT)} \quad (6.30)$$

U suštini, maksimizacija SNR u trenutku t_0 se može posmatrati i kao minimizacija nazivnika izraza (6.30) uz uslov da je brojnik izraza fiksiran: $y_f(t_0) = y_0 = \sum_{k=0}^N a_k f(t_0 - kT)$. Ova minimizacija se može obaviti i korištenjem Lagrangeovih multiplikatora:

$$J(a_k, \lambda) = \sum_{k=0}^N \sum_{r=0}^N a_k a_r R_{nn}(rT - kT) + \lambda \left(y_0 - \sum_{k=0}^N a_k f(t_0 - kT) \right) \quad (6.31)$$

Tražanjem odgovarajućih parcijalnih izvoda se dobiva:

$$\frac{\partial J}{\partial a_k} = 2 \sum_{r=0}^N a_r R_{nn}(rT - kT) - \lambda f(t_0 - kT) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (6.32)$$

što predstavlja $N + 1$ jednačinu, te još:

$$y_f(t_0) = y_0 = \sum_{k=0}^N a_k f(t_0 - kT) \quad (6.33)$$

za $N + 2$ nepoznate $(a_0, a_1, \dots, a_N, \lambda)$.

Interesantno je primijetiti da se SNR neće mijenjati ukoliko se $H(j\omega)$ pomnoži s bilo kojom konstantom. To znači da se u principu za λ može odabrati bilo koji broj i to neće utjecati na SNR. Radi pojednostavljivanja relacije (6.32) odabire se $\lambda = 2$, pa slijedi:

$$\sum_{r=0}^N a_r R_{nn}(rT - kT) = f(t_0 - kT) \quad (k = 0, 1, \dots, N) \quad (6.34)$$

Optimalni koeficijenti se pojavljuju kao rješenje sistema linearnih jednačina:

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_0 - T) \\ f(t_0 - 2T) \\ \dots \\ f(t_0 - NT) \end{bmatrix} \quad (6.35)$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} f(t_0) \\ f(t_0 - T) \\ f(t_0 - 2T) \\ \dots \\ f(t_0 - NT) \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

gdje je matrica \mathbf{R} data sa:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{nn}(0) & R_{nn}(T) & R_{nn}(2T) & \dots & R_{nn}(NT) \\ R_{nn}(-T) & R_{nn}(0) & \dots & \dots & \\ R_{nn}(-2T) & \dots & R_{nn}(0) & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & R_{nn}(T) \\ R_{nn}(-NT) & R_{nn}(-(N-1)T) & \dots & R_{nn}(-T) & R_{nn}(0) \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

Matrica \mathbf{R} je dijagonalno simetrična, tzv. Toeplitzova matrica.

Analizom prethodnog izlaganja se može vidjeti da transferzalni filter zapravo predstavlja svojevrzni diskretizovani ekvivalent prilagođenog filtera, ali realiziran na osnovu diskretizovane autokorelacione funkcije šuma i očekivanog oblika korisnog signala.

6.5 Wienerov filter

6.5.1 Uvodna razmatranja

Ukoliko se pretpostavi da se signal $x(t)$ sastoji od korisnog signala $f(t)$ i aditivnog šuma $n(t)$ tada se može napisati:

$$x(t) = f(t) + n(t) \quad (6.38)$$

U slučaju da signal $f(t)$ nije deterministički, već da su oba signala $f(t)$ i $n(t)$ stohastička i stacionarna, pri čemu su poznate njihove sopstvene i međusobne spektralne gustine tada se za probleme detekcije i estimacije može koristiti *Wienerov filter*.

U procesima eliminacije nepoželjnog šuma iz korisnih signala, susreću se tri osnovna problema:

- filtriranje - kod kojeg se poznaje $x(t)$ za $t < t_0$ i želi pronaći „utisnuti” $f(t)$ za $t < t_0$,
- izgladivanje - kod kojeg se poznaje $x(t)$ za $t < t_0$ i želi pronaći određena vrijednost $f(t_1)$ za $t_1 < t_0$,
- predikcija - kod kojeg se poznaje $x(t)$ za $t < t_0$ i želi procijeniti/predvidjeti neka vrijednost $f(t_2)$ za $t_2 > t_0$.

Većina ovih problema se svodi na sintezu sistema sa impulsnim odzivom $h(t)$ takvih da se minimizira srednjekvadratna greška između odziva $y(t) = x(t) * h(t)$ i željenog korisnog signala $f(t)$, odnosno da se sintetizira „sistem koji uklanja šum”. To znači da se vrši minimizacija kriterija:

$$J = E [e^2(t)] = E [(f(t) - y(t))^2] \quad (6.39)$$

U skladu s tim, postoje tri pristupa:

1. Impulsni odziv $h(t)$ se daje u određenoj parametarskoj formi $h(t, a)$, pa se određuje parametar/parametri $a \in \mathbb{R}$ kako bi kriterij J bio minimalan. Ovako dobiven sistem se naziva **parametarski optimalan sistem**,
2. Oblik $h(t)$ nije zadan niti se na njega postavljaju neka ograničenja - u tom smislu se kaže da se radi o **optimalnom sistemu tipa I**,
3. Oblik $h(t)$ nije zadan, ali se zahtijeva da bude kauzalan - tada se govori o **optimalnom sistemu tipa II**.

6.5.2 Parametarski optimalan sistem

Neka su $f(t)$ i $n(t)$ među sobom statistički nezavisni, stacionarni i neka su im očekivane vrijednosti jednake nuli. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} e(t) &= f(t) - y(t) \\ &= f(t) - (f(t) + n(t)) * h(t, a) \\ &= \underbrace{f(t) * [\delta(t) - h(t, a)]}_{e_f(t)} - \underbrace{n(t) * h(t, a)}_{e_n(t)} \\ &= e_f(t) + e_n(t) \end{aligned} \quad (6.40)$$

Ako se uzme:

$$h_f(t, a) = \delta(t) - h(t, a) \quad (6.41)$$

$$h_n(t, a) = -h(t, a) \quad (6.42)$$

tada se relacija (6.40) može napisati kao:

$$e(t) = f(t) * h_f(t, a) + n(t) * h_n(t, a) \quad (6.43)$$

Pošto su $f(t)$ i $n(t)$ statistički nezavisni procesi, tada su i $e_f(t)$ i $e_n(t)$ također nezavisni procesi, pa vrijedi:

$$\begin{aligned} S_{ee}(\omega) &= S_{e_f e_f}(\omega) + S_{e_n e_n}(\omega) \\ &= S_{ff}(\omega) |H_f(\omega, a)|^2 + S_{nn}(\omega) |H_n(\omega, a)|^2 \end{aligned} \quad (6.44)$$

Na osnovu Fourierovih transformacija relacija (6.41) i (6.42) se dobiva:

$$S_{ee}(\omega) = S_{ff}(\omega) |1 - H(\omega, a)|^2 + S_{nn}(\omega) | - H(\omega, a)|^2 \quad (6.45)$$

Pošto je proces stacionaran, tada je:

$$\begin{aligned} E[e^2(t)] &= R_{ee}(0) = F^{-1}\{S_{ee}(\omega)\}|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ff}(\omega) |1 - H(\omega, a)|^2 d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nn}(\omega) |H(\omega, a)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (6.46)$$

Parametar a se dobiva minimizacijom izraza (6.46), odnosno iz:

$$\frac{dJ}{da} = \frac{dE[e^2(t)]}{da} = 0 \quad (6.47)$$

Primjer 6.4:

Dati su slučajni signali $f(t)$ i $n(t)$ sa spektralnim gustinama $S_{nn}(\omega) = 1$ i $S_{ff}(\omega) = \frac{2b^2}{\omega^2 + b^2}$, pri čemu je $b \in \mathbb{R}$. Signali prolaze kroz idealni niskopropusni filter sa graničnom frekvencijom $\omega_c > 0$. Odrediti optimalnu vrijednost ω_c tako da srednjekvadratna greška između $f(t)$ i $y(t)$ bude minimalna.

Rješenje:

Pošto se radi o idealnom niskopropusnom filteru, funkcija sistema je data sa:

$$H(\omega, \omega_c) = p \left(\frac{\omega}{2\omega_c} \right)$$

Srednjekvadratna greška je:

$$J(\omega_c) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) |1 - H(\omega, \omega_c)|^2 d\omega}_{=I_1} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn} |H(\omega, \omega_c)|^2 d\omega}_{=I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b^2}{\omega^2 + b^2} \left| 1 - p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \right|^2 d\omega \\
&= \int_{|\omega| \geq \omega_c} \frac{2b^2}{\omega^2 + b^2} d\omega \\
&= \int_{\omega_c}^{\infty} \frac{4b^2}{\omega^2 + b^2} d\omega
\end{aligned}$$

Primjenom Leibnitzovog pravila $\left(\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^b f(t) dt = -f(a(x)) \cdot \frac{da(x)}{dx}\right)$ se dobija:

$$\frac{dI_1}{d\omega_c} = -\frac{4b^2}{\omega_c^2 + b^2}$$

Analogno:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \left| p\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \right|^2 d\omega = \int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega = 2\omega_c$$

odnosno:

$$\frac{dI_2}{d\omega_c} = 2$$

Konačno, optimalna vrijednost se dobiva za:

$$\frac{dJ}{d\omega_c} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{dI_1}{d\omega_c} + \frac{dI_2}{d\omega_c} \right) = 0$$

odakle slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \left(-\frac{4b^2}{\omega_c^2 + b^2} + 2 \right) &= 0 \\
\frac{4b^2}{\omega_c^2 + b^2} &= 2 \\
\omega_c^2 + b^2 &= 2b^2 \\
\omega_c^2 &= b^2 \\
\omega_{cOPT} &= b
\end{aligned}$$

6.5.3 Optimalni sistem tipa I (nekauzalni)

Optimalni sistemi tipa I su u principu nekauzalni. Izlaz takvog sistema je dat sa:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \quad (6.48)$$

Potrebno je odrediti $h(t)$ takvo da srednjekvadratna vrijednost $E[e^2(t)]$ bude minimalna:

$$J = E [e^2(t)] = E \left[\left(f(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \right)^2 \right] \quad (6.49)$$

Prilikom aproksimacije jedne funkcije sa linearnom kombinacijom drugih, iz teorije determinističkih signala je poznato da će greška biti minimalna ako je signal greške $e(t)$ ortogonalan u odnosu na funkcije kojima se aproksimira. To znači da se relacija (6.49) može interpretirati na način da se signal $f(t)$ aproksimira sa linearnom kombinacijom funkcija $x(t - \tau)$ i koeficijentima $h(\tau)$. U skladu s tim, proširenjem koncepta ortogonalnosti, može se pokazati da se minimum dobiva kada je greška $e(t)$ ortogonalna na funkcije $x(t - \tau)$, odnosno:

$$E[e(t)x(t - \tau)] = R_{ex}(\tau) = 0, \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (6.50)$$

Ovo daje:

$$E \left[\left[f(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t - u)du \right] x(t - \tau) \right] = 0 \quad (6.51)$$

odnosno:

$$E \left[[f(t)x(t - \tau)] - \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)E[x(t - u)x(t - \tau)]du \right] = 0 \quad (6.52)$$

$$R_{fx}(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)R_{xx}(\tau - u)du = 0 \quad (6.53)$$

Primjenom Fourierove transformacije se dobivanje minimuma kriterija ekvivalentira sa uslovom (6.53) :

$$S_{fx}(j\omega) - S_{xx}(\omega)H(j\omega) = 0 \quad (6.54)$$

odnosno:

$$H(j\omega) = \frac{S_{fx}(j\omega)}{S_{xx}(\omega)} \quad (6.55)$$

Vrijednost kriterija J uz (6.55) se izračunava na sljedeći način:

$$\begin{aligned} J = E[e^2(t)] &= E[e(t)[f(t) - y(t)]] \\ &= E[e(t)f(t)] - \underbrace{E[e(t)y(t)]}_{=0} \\ &= E[(f(t) - y(t))f(t)] \\ &= E[f^2(t)] - E[y(t)(e(t) + y(t))] \\ &= E[f^2(t)] - \underbrace{E[y(t)e(t)]}_{=0} - E[y^2(t)] \\ &= E[f^2(t)] - E[y^2(t)] \\ &= F^{-1}\{S_{ff}(\omega)\}|_{\tau=0} - F^{-1}\{S_{yy}(\omega)\}|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{ff}(\omega) - S_{yy}(\omega)]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{ff}(\omega) - S_{xx}(\omega)|H(j\omega)|^2]d\omega \end{aligned} \quad (6.56)$$

odakle je:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{ff}(\omega) - S_{xx}(\omega) \left| \frac{S_{fx}(j\omega)}{S_{xx}(\omega)} \right|^2] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [S_{ff}(\omega) - \frac{|S_{fx}(j\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)}] d\omega \end{aligned} \quad (6.57)$$

Ako se iskoristi pretpostavka da su $f(t)$ i $n(t)$ statistički nezavisni, sa srednjim vrijednostima jednakim nuli, tada vrijedi:

$$S_{xx}(\omega) = S_{ff}(\omega) + S_{fn}(j\omega) + S_{nf}(j\omega) + S_{nn}(\omega) \quad (6.58)$$

$$S_{fx}(j\omega) = S_{ff}(\omega) + S_{fn}(j\omega) \quad (6.59)$$

U skladu s tim, izraz (6.57) se svodi na:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[S_{ff}(\omega) - \frac{|S_{fx}(j\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{S_{ff}(\omega)S_{xx}(\omega) - |S_{fx}(j\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)} \right] d\omega \end{aligned} \quad (6.60)$$

pa se uz korištenje relacija (6.58) i (6.59), izraz (6.60) se značajno uprošćava:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ff}(\omega)S_{ff}(\omega) + S_{ff}(\omega)S_{nn}(\omega) - S_{ff}^2(\omega)}{S_{xx}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ff}(\omega)S_{nn}(\omega)}{S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (6.61)$$

Primjer 6.5:

Dati su slučajni signali $f(t)$ i $n(t)$ sa spektralnim gustinama $S_{nn}(\omega) = N$, $S_{ff}(\omega) = \frac{k}{a^2 + \omega^2}$ ($a, k \in \mathbb{R}$), $S_{fn}(\omega) = 0$. Odrediti prenosnu funkciju i impulsni odziv optimalnog Wienerovog filtera tipa I, kao i grešku aproksimacije (minimalnu vrijednost kriterija J).

Rješenje:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{S_{fx}(j\omega)}{S_{xx}(\omega)} \\ &= \frac{S_{ff}(j\omega)}{S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)} \\ &= \frac{k/(a^2 + \omega^2)}{k/(a^2 + \omega^2) + N} \end{aligned}$$

$$= \frac{k}{2Nb} \frac{2b}{b^2 + \omega^2}$$

gdje je:

$$b^2 = a^2 + k/N$$

odakle je:

$$h(t) = \frac{k}{2Nb} e^{-b|t|}$$

Vrijednost kriterija je:

$$\begin{aligned} J_{\min} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{ff}(\omega)S_{nn}(\omega)}{S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{k}{a^2 + \omega^2} N}{\frac{k}{a^2 + \omega^2} + N} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{k/N + (a^2 + \omega^2)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{b^2 + \omega^2} d\omega \\ &= \frac{k}{2b} \end{aligned}$$

6.5.4 Optimalan sistem tipa II (kauzalni)

Prilikom izvođenja ovog optimalnog sistema polazi se od sličnih relacija kao i za optimalni sistem tipa I, međutim ovdje se usvaja pretpostavka da je impulsni odziv $h(t)$ kauzalan signal. Tada slijedi da je izlaz iz sistema dat sa:

$$y(t) = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (6.62)$$

U šuštni, moguće je koristiti isti uvjet kao u (6.50), samo što sada τ mora biti nenegativno jer $h(\tau)$ egzistira samo za $\tau \geq 0$. Relacija (6.53) sada postaje:

$$R_{fx}(\tau) - \int_0^{+\infty} h(u)R_{xx}(\tau - u)du = 0, \quad \tau \geq 0 \quad (6.63)$$

Relacija (6.63) je u literaturi poznata kao *Wiener-Hopfova jednačina*. Ova jednačina se rješava na način da se prethodno definiira tzv. *antikauzalna* funkcija $z(t)$. Termin antikauzalan se koristi za signale/funkcije koje su različite od nule za negativnu vrijednost promjenljive, a jednake nuli za nenegativne vrijednosti svoje promjenljive. Na taj način se može pisati da je:

$$z(\tau) = R_{fx}(\tau) - \int_0^{+\infty} h(u)R_{xx}(\tau - u)du \quad (6.64)$$

Odavde slijedi:

$$Z(j\omega) = S_{f_x}(j\omega) - S_{x_x}(\omega)H(j\omega) \quad (6.65)$$

Interesantno je uočiti da kauzalna funkcija $f(t)$ može imati oblik npr. $f(t) = e^{-at}u(t)$, odnosno Fourierovu transformaciju $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$. To znači da je pol dat sa $p = -\frac{a}{j} = ja$. S druge strane, antikauzalna funkcija $g(t)$ može imati oblik npr. $g(t) = e^{at}u(-t)$, odnosno Fourierovu transformaciju $G(j\omega) = \frac{1}{a-j\omega}$, odnosno pol $p = \frac{a}{j} = -ja$. Ova analiza se relativno jednostavno može i poopćiti, na način da se pokaže da kauzalne funkcije imaju polove u gornjoj poluravni kompleksne ravni, a nekauzalne funkcije imaju polove u donjoj poluravni kompleksne ravni.

U skladu sa prethodnim razmatranjem, pošto je $h(t)$ kauzalna funkcija, a $z(t)$ anti-kauzalna, tada $H(j\omega)$ treba da ima sve polove u gornjoj poluravni ω , a $Z(j\omega)$ polove u donjoj poluravni ω . Do rješenja se dolazi u tri koraka:

- **Korak 1** - $S_{x_x}(\omega)$ se predstavlja kao proizvod dvije funkcije:

$$S_{x_x}(\omega) = A^+(j\omega)A^-(j\omega) \quad (6.66)$$

pri čemu $A^+(j\omega)$ i $1/A^+(j\omega)$ imaju sve polove u gornjoj poluravni, a $A^-(j\omega)$ i $1/A^-(j\omega)$ imaju sve polove u donjoj poluravni ω .

- **Korak 2** - Formira se $S_{f_x}(j\omega)/A^-(j\omega)$ i predstavlja se kao suma dvije funkcije:

$$Q(j\omega) = \frac{S_{f_x}(\omega)}{A^-(j\omega)} = B^+(j\omega) + B^-(j\omega) \quad (6.67)$$

pri čemu $B^+(j\omega)$ ima sve polove u gornjoj poluravni, a $B^-(j\omega)$ ima sve polove u donjoj poluravni kompleksne ravni.

- **Korak 3** - Formira se $H(j\omega)$ kao:

$$H(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{A^+(j\omega)} \quad (6.68)$$

pa slijedi:

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= S_{f_x}(j\omega) - S_{x_x}(\omega)H(j\omega) \\ &= A^-(j\omega)[B^+(j\omega) + B^-(j\omega)] - A^+(j\omega)A^-(j\omega)\frac{B^+(j\omega)}{A^+(j\omega)} \\ &= A^-(j\omega)B^+(j\omega) + A^-(j\omega)B^-(j\omega) - A^-(j\omega)B^+(j\omega) \\ &= A^-(j\omega)B^-(j\omega) \end{aligned} \quad (6.69)$$

pa je jasno da je traženi $h(t) = F^{-1}[H(j\omega)]$ kauzalan, a $z(t) = F^{-1}[Z(j\omega)]$ antikauzalan signal.

Analogno kao u izvođenju za optimalni sistem tipa I, minimalna vrijednost kriterija se dobiva iz:

$$J = E[(f(t) - y(t))f(t)] \quad (6.70)$$

odnosno:

$$J_{\min} = E[f^2(t)] - E\left[\left(\int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right)f(t)\right]$$

$$\begin{aligned}
 &= R_{ff}(0) - \int_0^{+\infty} h(\tau) E[f(t)x(t-\tau)] d\tau \\
 &= R_{ff}(0) - \int_0^{+\infty} h(\tau) R_{fx}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Primjer 6.6:

Dati su slučajni signali $f(t)$ i $n(t)$ sa spektralnim gustinama $S_{nn}(\omega) = N$, $S_{ff}(\omega) = \frac{k}{a^2 + \omega^2}$ ($a, k \in \mathbb{R}$), $S_{fn}(\omega) = 0$. Odrediti prenosnu funkciju i impulsni odziv optimalnog Wienerovog filtera tipa II, kao i grešku aproksimacije (minimalnu vrijednost kriterija J).

Rješenje:

$$\begin{aligned}
 S_{xx}(\omega) &= S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega) \\
 &= \frac{k}{a^2 + \omega^2} + N \\
 &= \frac{Na^2 + k + N\omega^2}{a^2 + \omega^2} \\
 &= N \frac{a^2 + \frac{k}{N} + \omega^2}{a^2 + \omega^2} \\
 &= N \frac{\left(\omega - j\sqrt{a^2 + \frac{k}{N}}\right) \left(\omega + j\sqrt{a^2 + \frac{k}{N}}\right)}{(\omega - ja)(\omega + ja)} \\
 &= N \frac{(\omega - jb)(\omega + jb)}{(\omega - ja)(\omega + ja)}
 \end{aligned}$$

gdje je:

$$b^2 = a^2 + k/N$$

Odavde se zaključuje:

$$\begin{aligned}
 A^+(j\omega) &= N \frac{\omega - jb}{\omega - ja} = N \frac{b + j\omega}{a + j\omega} \\
 A^-(j\omega) &= \frac{\omega + jb}{\omega + ja} = \frac{b - j\omega}{a - j\omega}
 \end{aligned}$$

$$S_{fx}(j\omega) = S_{ff}(\omega) + S_{fn}(j\omega) = S_{ff}(\omega) = \frac{k}{a^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{fx}(j\omega)}{A^-(j\omega)} &= \frac{k}{(\omega + jb)(\omega - ja)} \\
 &= \frac{k}{j(a+b)} \left(\frac{1}{\omega - ja} - \frac{1}{\omega + jb} \right)
 \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je:

$$\begin{aligned} B^+(j\omega) &= \frac{k}{j(a+b)(\omega - ja)} \\ H(j\omega) &= \frac{B^+(j\omega)}{A^+(j\omega)} = \frac{k}{jN(a+b)(\omega - jb)} \\ &= \frac{k}{N\left(a + \sqrt{a^2 + \frac{k}{N}}\right)\left(\sqrt{a^2 + \frac{k}{N}} + j\omega\right)} \end{aligned}$$

Konačno se određuje:

$$h(t) = \frac{k}{N(a+b)} e^{-bt} u(t)$$

Dalje vrijedi:

$$\begin{aligned} R_{ff}(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ff}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{a^2 + \omega^2} d\omega = \frac{k}{2a} \\ R_{fx}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\{S_{fx}(\omega)\} = \frac{k}{2a} e^{-a|\tau|} \end{aligned}$$

Obzirom da je:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} h(\tau) R_{fx}(\tau) d\tau &= \frac{k^2}{2aN(a+b)} \int_0^{\infty} e^{-b\tau} e^{-a\tau} d\tau \\ &= \frac{k^2}{2aN(a+b)} \int_0^{\infty} e^{-(a+b)\tau} d\tau \\ &= \frac{k^2}{2aN(a+b)} \cdot \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{k^2}{2aN(a+b)^2} \end{aligned}$$

vrijednost kriterija se izračunava kao:

$$J_{\min} = R_{ff}(0) - \int_0^{\infty} h(\tau) R_{fx}(\tau) d\tau = \frac{k}{2a} \left[1 - \frac{k}{N(a+b)^2} \right]$$

6.5.5 Optimalni filtri za idealne odzive

Određivanje optimalnog impulsnog odziva $h(t)$ se može formulirati i na nešto drugačiji način. Naime, umjesto da se minimizira greška između $f(t)$ i $y(t)$ moguće je problem minimizacije razmatrati kao problem minimizacije greške između idealnog $y_{id}(t)$ odziva na $f(t)$ i realnog odziva $y(t)$ i težiti da se ta greška minimizira. Ovo predstavlja svojevrsno poopštavanje koncepta Wienerovog filtera, jer se za $y_{id}(t) = f(t)$ ovaj koncept svodi na

prethodno razmatrane slučajeve.

Moguće je napisati:

$$y_{id}(t) = f(t) * h_{id}(t) \quad (6.72)$$

a greška je u tom slučaju data sa:

$$\begin{aligned} e(t) = y_{id}(t) - y(t) &= f(t) * h_{id}(t) - x(t) * h(t) \\ &= f(t) * h_{id}(t) - f(t) * h(t) - n(t) * h(t) \end{aligned} \quad (6.73)$$

Primjenom principa ortogonalnosti se dobiva:

$$E[e(t)x(t - \tau)] = 0 \quad (6.74)$$

odnosno:

$$E \left[[y_{id}(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)x(t-u)du]x(t-\tau) \right] = 0 \quad (6.75)$$

$$R_{y_{id}x}(\tau) - \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau-u)h(u)du = 0 \quad (6.76)$$

Primjenom Fourierove transformacije se dobiva:

$$S_{y_{id}x}(j\omega) = S_{xx}(\omega)H(j\omega) \quad (6.77)$$

odnosno:

$$H(j\omega) = \frac{S_{y_{id}x}(j\omega)}{S_{xx}(j\omega)} \quad (6.78)$$

Važno je primijetiti da vrijedi:

$$R_{y_{id},x}(\tau) = E[y_{id}(t+\tau)x(t)] = E[y_{id}(t+\tau)f(t)] + \underbrace{E[y_{id}(t+\tau)n(t)]}_{=0} = R_{y_{id}f}(\tau) \quad (6.79)$$

pa iz prethodne relacije slijedi:

$$\begin{aligned} S_{y_{id}x}(j\omega) &= S_{y_{id}f}(j\omega) \\ &= S_{fy_{id}}(-j\omega) \\ &= S_{ff}(-\omega)H_{id}(j\omega) \\ &= S_{ff}(\omega)H_{id}(j\omega) \end{aligned} \quad (6.80)$$

Kombinovanjem relacija (6.78) i (6.80) se dobiva:

$$H(j\omega) = \frac{S_{ff}(\omega)H_{id}(j\omega)}{S_{xx}(j\omega)} = \frac{S_{ff}(\omega)}{\underbrace{S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)}_{\text{"čisti od šuma"}}} \cdot \underbrace{H_{id}(\omega)}_{\text{"daje oblik signalu"}} \quad (6.81)$$

U slučaju dizajniranja **kauzalnog optimalnog filtera**, tada se može postupiti analogno kao i u slučaju izvođenja Wienerovog filtera tipa II, pri čemu relacija (6.63) postaje:

$$z(\tau) = R_{y_{id}x}(\tau) - \int_0^{+\infty} h(u)R_{xx}(\tau-u)du \quad (6.82)$$

Primjer 6.7:

Dati su slučajni signali $f(t)$ i $n(t)$ sa spektralnim gustinama $S_{nn}(\omega) = N$, $S_{ff}(\omega) = \frac{k}{a^2 + \omega^2}$ ($a, k \in \mathbb{R}$), $S_{fn}(\omega) = 0$. Odrediti prenosnu funkciju i impulsni odziv kauzalnog optimalnog filtera ako se traži $y_{id}(t) = f(t + T)$ (ovakav filter se u literaturi naziva i **optimalni prediktor**).

Rješenje:

Može se pokazati:

$$S_{xx}(\omega) = S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega) = \sqrt{N} \frac{b + j\omega}{a + j\omega} \sqrt{N} \frac{b - j\omega}{a - j\omega} = A^+(j\omega)A^-(j\omega)$$

Nadalje:

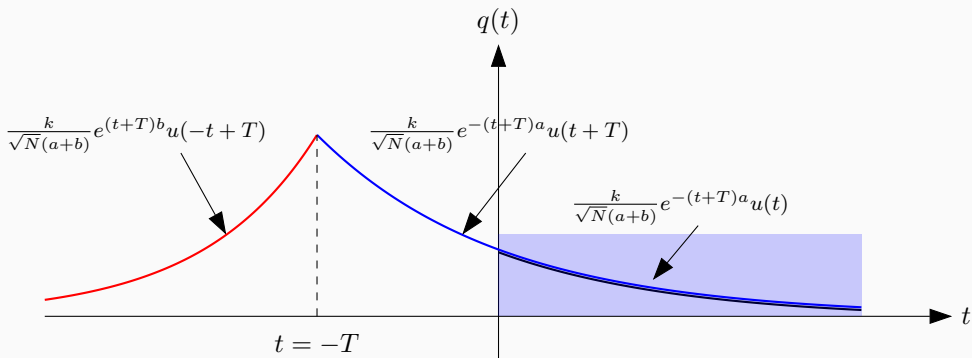
$$Q(j\omega) = \frac{S_{y_{id}f}(j\omega)}{A^-(j\omega)} = \frac{S_{ff}(j\omega)H_{id}(j\omega)}{A^-(j\omega)} = \frac{\frac{k}{a^2 + \omega^2}e^{j\omega T}}{\sqrt{N} \frac{b - j\omega}{a - j\omega}}$$

Potrebno je odrediti kauzalni i antikauzalni dio odziva:

$$\begin{aligned} Q(j\omega) &= \frac{k}{\sqrt{N}(a + j\omega)(b - j\omega)} e^{j\omega T} \\ &= \frac{k}{\sqrt{N}(a + b)(a + j\omega)} e^{j\omega T} + \frac{k}{\sqrt{N}(a + b)(b - j\omega)} e^{j\omega T} \end{aligned}$$

odnosno:

$$q(t) = \frac{k}{\sqrt{N}(a + b)} e^{-(t+T)a} u(t + T) + \frac{k}{\sqrt{N}(a + b)} e^{(t+T)b} u(-t + T)$$



Jasno je da se kauzalni dio odziva dobiva kao:

$$\begin{aligned} b^+(t) &= q(t)u(t) \\ &= \frac{k}{\sqrt{N}(a + b)} e^{-(t+T)a} u(t) \end{aligned}$$

$$B^+(j\omega) = \frac{ke^{-aT}}{\sqrt{N}(a + b)(a + j\omega)}$$

Pa je prema tome:

$$H(j\omega) = \frac{B^+(j\omega)}{A^+(j\omega)} = \frac{ke^{-aT}}{N(a+b)(b+j\omega)}$$

odnosno:

$$h(t) = \frac{ke^{-aT}}{N(a+b)} e^{-bt} u(t)$$

Primjer 6.8:

Dati su slučajni signali $f(t)$ i $n(t)$ sa spektralnim gustinama $S_{nn}(\omega) = N$, $S_{ff}(\omega) = \frac{k}{a^2 + \omega^2}$ ($a, k \in \mathbb{R}$), $S_{fn}(\omega) = 0$. Odrediti prenosnu funkciju i impulсни odziv optimalnog filtera ako se traži $y_{id}(t) = f(t - T)$.

Rješenje:

Obzirom da je $H_{id}(j\omega) = e^{-j\omega T}$ to slijedi:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{S_{ff}(\omega)}{S_{ff}(\omega) + S_{nn}(\omega)} H_{id}(j\omega) \\ &= \frac{\frac{k}{a^2 + \omega^2} e^{-j\omega T}}{\frac{k}{a^2 + \omega^2} + N} \\ &= \frac{ke^{-j\omega T}}{N \left(a^2 + \frac{k}{N} + \omega^2 \right)} \end{aligned}$$

pa se lako dolazi do izraza:

$$h(t) = \frac{k}{2N \sqrt{a^2 + \frac{k}{N}}} e^{-|t-T| \sqrt{a^2 + \frac{k}{N}}}$$

Važno je napomenuti da ovaj sistem nije kauzalan, ali za dovoljno veliko T nekauzalni dio signala $h(t)$ postaje dovoljno mali da se može zanemariti.

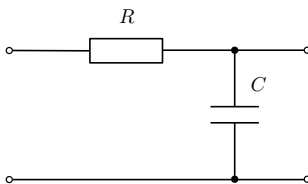
Zadaci za samostalan rad

1. Signal $x(t)$ prolazi kroz pojasnopropusni filter, čija je spektralna karakteristika jednaka:

$$S(\omega) = \begin{cases} K, & \omega_1 < |\omega| < \omega_2 \\ 0, & |\omega| \leq \omega_1 \vee |\omega| \geq \omega_2 \end{cases}$$

Odrediti srednjekvadratnu vrijednost izlaznog signala $\overline{y^2(t)}$, ako je ulazni signal bijeli šum intenziteta K_0 .

2. Zadan je slučajni proces $X(t) = A \sin(\omega t + \theta)$, gdje su A i ω pozitivne realne konstante, dok je θ slučajna varijabla sa uniformnom raspodjelom na intervalu $[-\pi, \pi]$. Proces $X(t)$ je doveden na ulaz kauzalnog linearnog vremenski invarijantnog sistema sa impulsnim odzivom $h(t) = be^{-bt}u(t)$. Odrediti izlazni proces $Y(t)$.
3. Na ulaz linearnog vremenski invarijantnog sistema sa impulsnim odzivom $h(t) = e^{-2t}u(t)$ doveden je slučajni proces $X(t) = \sin(t + \theta)$, gdje je θ slučajna varijabla sa uniformnom raspodjelom na $[-\pi, \pi]$. Odrediti izlazni proces $Y(t)$ i njegovu autokorelacionu funkciju.
4. Autokorelaciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$ je data sa $R_{XX}(\tau) = A^2 + Be^{-|\tau|}$, gdje su A i B realne pozitivne konstante. Odrediti očekivanu vrijednost procesa $Y(t)$ koji nastaje propuštanjem procesa $X(t)$ kroz linearni sistem sa impulsnim odzivom $h(t) = e^{-bt}u(t)$, gdje je b realna pozitivna konstanta.
5. Slučajni proces $X(t)$ ima autokorelacijsku funkciju $R_{XX}(\tau) = ae^{-b|\tau|}$, gdje su a i b pozitivne realne konstante. Dovede li se taj proces na ulaz linearnog sistema sa impulsnim odzivom $h(t) = \alpha e^{-\alpha t}u(t)$, gdje je α realna pozitivna konstanta, odrediti autokorelacijsku funkciju izlaznog procesa $Y(t)$.
6. Odrediti prenosnu funkciju snage kola sa slike 6.5. Ako ulaz dovede bijeli šum srednje snage σ^2 , odrediti srednju snagu izlaznog procesa.



Slika 6.5: RC krug (za Zadatak 6)

7. Slučajni proces $X(t)$ i nekorelirani bijeli šum $N(t)$ imaju autokorelacione funkcije $R_{XX}(\tau) = \frac{\alpha\omega_0}{2}e^{-\omega_0|\tau|}$ i $R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$, gdje su α, ω_0 i N_0 pozitivne realne konstante. Potrebno je odrediti prenosnu funkciju i impulsni odziv Wienerovog filtera.
8. Odrediti očekivanu kvadratnu grešku za primjer iz prethodnog zadatka.
9. Neka je $X(t)$ slučajni telegrafski signal kojem je dodan aditivni bijeli šum $N(t)$. Odrediti Wienerov filter za dati signal ako su spektralne gustine date sa $S_{XX}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ i $S_{NN}(\omega) = N_0$. Odrediti i odgovarajući kauzalni Wienerov filter i usporediti rješenja!
10. Potrebno je uz najmanju kvadratnu grešku estimirati slučajni proces $X(t)$ iz aditivne kombinacije $X(t) + N(t)$, gdje je $N(t)$ nekorelirani šum poznate autokorelacione funkcije $R_{NN}(\tau) = e^{-3|\tau|}$. Također, poznata je autokorelaciona funkcija slučajnog procesa $X(t)$:

$$R_{XX}(\tau) = e^{-2|\tau|}$$

- Odrediti prenosnu funkciju traženog filtera.
- Izračunati i skicirati impulsni odziv traženog filtera. Može li filter biti kauzalan? Objasniti.
- Odrediti očekivanu kvadratnu grešku estimacije.

7. Kalmanov filter

7.1 Linearni Kalmanov filter

Kalmanov filter je alat koji omogućava estimaciju varijabli iz različitih tipova procesa. Matematičkim jezikom rečeno, Kalmanov filter estimira stanja linearnog sistema. Ne samo da Kalmanov filter dobro radi u praksi, već je i teoretski zanimljiv, jer se može pokazati da od svih mogućih filtera Kalmanov filter minimizira varijansu greške estimacije. Kalmanov filter se koristi često u sistemima upravljanja, jer se obično zahtjeva precizna estimacija procesnih varijabli kako bi se kvalitetno upravljalo procesom.

Za razliku od „standardnih” filtera, koji npr. filtriraju odnosno eliminiraju visokofrekventni šum, zadatak Kalmanovog filtera je da smanji (reducira) nesigurnost mjerenja. Kako bi se Kalmanovim filterom eliminirala nesigurnost mjerenja, koja se može modelirati šumom, proces koji se analizira mora biti moguće opisati, ili barem aproksimirati, linearnim sistemom:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad (7.1)$$

$$y_k = Cx_k + z_k \quad (7.2)$$

gdje su $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ i $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ matrice koje opisuju sistem u prostoru stanja, k je indeks koji predstavlja diskretni vremenski trenutak, $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ predstavlja vektor stanja sistema, $u \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ je vektor ulaza u sistem, y je mjereni izlaz, a w i z predstavljaju šum, pri čemu se w naziva procesni šum (eng. *process noise*), a z šum mjerenja (eng. *measurement noise*).

Tipično, stanje sistema x se ne može mjeriti, ali se može mjeriti y koji predstavlja funkciju stanja korumpiranu šumom z . Mjerenje y je mjerenje koje djelimično može pomoći da se estimira x , ali ne može mu se potpuno vjerovati, jer u sebi sadrži mjerni šum.

Prilikom uvođenja Kalmanovog filtera, obično se koristi primjer upravljanja vozilom ili mobilnim robotom (gdje se Kalmanov filter veoma često i koristi). Neka se stanje sistema sastoji od pozicije p i brzine v . Upravljanje u je dodani „gas” (zadano ubrzanje), a y je mjerena pozicija. Neka je moguće mijenjati upravljanje u i mjeriti poziciju svako T sekundi. Na taj način je moguće analitički modelirati promjenu brzine sa:

$$v_{k+1} = v_k + Tu_k \quad (7.3)$$

Nažalost, prethodna relacija ne odražava stvarno stanje sistema. Vjetar, promjena uslova i slično će utjecati na procjenu brzine, tako da neće biti moguće dati tačnu vrijednost

v_{k+1} nego će ona biti slučajna promjenljiva koja se mijenja u vremenu. Model koji više odgovara realnosti je dat sa:

$$v_{k+1} = v_k + T u_k + \tilde{v}_k \quad (7.4)$$

gdje je \tilde{v}_k „šum” signala brzine. Analogna relacija se može napisati za poziciju vozila:

$$p_{k+1} = p_k + T v_k + \frac{1}{2} T^2 u_k + \tilde{p}_k \quad (7.5)$$

gdje je \tilde{p}_k „šum” signala pozicije.

Neka se sada definira vektor stanja x koji se sastoji od pozicije i brzine:

$$x_k = \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Tada se sistem može zapisati u prostoru stanja kao:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (7.7)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + z_k \quad (7.8)$$

Osnovni zadatak Kalmanovog filtera je estimacija stanja x uz prisustvo mjernog i procesnog šuma. Da bi se obavila najbolja moguća estimacija, prvi zahtjev je da očekivana vrijednost estimacije stanja bude što je moguće bliža očekivanoj vrijednosti stvarnog stanja. Drugi zahtjev je da estimirano stanje što je manje moguće varira oko stvarnog stanja. To znači ne samo da „srednja vrijednost” estimacije treba da bude jednaka „srednjoj vrijednosti” stvarnog stanja, već i da estimator daje najmanju moguću varijaciju estimacije stanja oko stvarnog stanja. Matematički, to znači da se očekuje estimator sa najmanjom mogućom kovarijansom greške.

Kalmanov filter zadovoljava oba ova uvjeta, ali zahtijeva postojanje/uspostavljanje određenih pretpostavki na šum koji utiče na sistem. Prvi uvjet je da očekivane vrijednosti w i z budu nula, a drugi da ne postoji nikakva korelacija između w i z . To znači da su za svako k , slučajne promjenljive w_k i z_k međusobno nezavisne slučajne promjenljive. Prema tome, kovarijantne matrice se mogu definirati kao:

$$S_w = Q_k = E[w_k w_k^T] \quad (7.9)$$

$$S_z = R_k = E[z_k z_k^T] \quad (7.10)$$

Ako se procjena sistema zapiše na sljedeći način:

$$\hat{x}_k^- = A \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1} \quad (7.11)$$

gdje \hat{x}_k^- predstavlja *apriori* procjenu stanja u trenutku k na osnovu jednačine stanja sistema, a \hat{x}_k predstavlja *aposteriori* procjenu stanja u diskretnom trenutku k nakon obavljanja mjerenja y_k (na osnovu observacija sistema). U tom slučaju se može definirati *apriori* i *aposteriori* greška estimacije:

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^- \quad (7.12)$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k \quad (7.13)$$

Prema tome, kovarijansa apriori greške predikcije je data sa:

$$P_k^- = E [e_k^- e_k^{-T}] = E [(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \quad (7.14)$$

Zbog nekoreliranosti greške estimacije i procesnog šuma sledi:

$$\begin{aligned} P_k^- &= E [(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] \\ &= E [[A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_k] [A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_k]^T] \\ &= AE [(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^T] A^T + E [w_k w_k^T] \end{aligned} \quad (7.15)$$

odnosno:

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + S_w \quad (7.16)$$

U narednom koraku se uključuje i mjerenje. To znači:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + \underbrace{K_k(y_k - C\hat{x}_k^-)}_{\text{korektivni član (inovacija)}} \quad (7.17)$$

odnosno:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(Cx_k + z_k - C\hat{x}_k^-) = \hat{x}_k^- + K_kC(x_k - \hat{x}_k^-) + K_kz_k \quad (7.18)$$

Prema tome, kovarijansa aposteriori greške predikcije je data sa:

$$P_k = E[e_k e_k^T] = E [(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \quad (7.19)$$

Zbog nekoreliranosti greške estimacije i mjernog šuma, smjenom (7.18) u relaciju (7.19) se izvodi:

$$\begin{aligned} P_k &= E [(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \\ &= E [(x_k - \hat{x}_k^- - K_kC(x_k - \hat{x}_k^-) - K_kz_k)(x_k - \hat{x}_k^- - K_kC(x_k - \hat{x}_k^-) \\ &\quad - K_kz_k)^T] \\ &= E [[(I - K_kC)(x_k - \hat{x}_k^-) - K_kz_k] [(I - K_kC)(x_k - \hat{x}_k^-) - K_kz_k]^T] \\ &= (I - K_kC)E [(x_k - \hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^T] (I - K_kC)^T + K_kE [z_k z_k^T] K_k^T \end{aligned} \quad (7.20)$$

Ako se relacija (7.20) zapiše drugačije, tad se dolazi do tzv. *Josephovog* oblika:

$$P_k = (I - K_kC)P_k^-(I - K_kC)^T + K_kS_zK_k^T \quad (7.21)$$

Iz ove relacije je potrebno odrediti optimalno pojačanje K_k tako da se minimizira srednjekvadratna greška estimacije stanja, koja je u suštini reprezentovana tragom matrice P_k koji odgovara sumi njenih dijagonalnih elemenata. Relacija (7.21) se može napisati kao:

$$P_k = P_k^- - K_kCP_k^- - P_k^-C^TK_k^T + K_k(CP_k^-C^T + S_z)K_k^T \quad (7.22)$$

Pravljenjem izvoda traga matrice P_k se izračunava optimalno pojačanje:

$$K_k = P_k^-C^T(CP_k^-C^T + S_z)^{-1} \quad (7.23)$$

Uvrštavanjem (7.23) u (7.22) dobiva se:

$$P_k = (I - K_k C)P_k^- \quad (7.24)$$

Prema tome, linearni Kalmanov filter se može opisati koracima prikazanim u tabeli 7.1.

Predviđanje	1 ^o	Inicijalna estimacija	$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu$
	2 ^o	Projektovana predikcija	$P_k^- = AP_{k-1}A^T + S_w$
Osvježavanje	3 ^o	Na osnovu mjerenja	$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + S_z)^{-1}$ $\hat{x}_k = \underbrace{(A\hat{x}_{k-1} + Bu)}_{\text{prediktivni član } \hat{x}_k^-} + \underbrace{K_k(y_k - C\hat{x}_k^-)}_{\text{korektivni član}}$
	4 ^o	Osvježena kovarijansa greške	$P_k = (I - K_k C)P_k^-$

Tabela 7.1: Relacije koje opisuju linearni Kalmanov filter

Matrica K se zove Kalmanovo pojačanje, a P je kovarijantna matrica greške estimacije stanja. Korektivni član u koraku 3^o (u tabeli 7.1) služi za korekciju estimacije stanja na osnovu mjerenja. Navedeni koncept se naziva još i prediktor-korektor metoda, kao i predikcija-osvježavanje (eng. *predictor-update*)

Fizikalno gledajući, ukoliko je mjerni šum veliki, tada će S_z biti veliko, pa će K imati manju vrijednost, samim time će vjerodostojnost mjerenja y biti malena. S druge strane ako je mjerni šum mali, tada će K biti veliko, pa će mjerenju y biti dat veći značaj.

Alternativni zapis koraka 3^o (u tabeli 7.1) je:

$$\hat{x}_k = (I - K_k C)\hat{x}_k^- + K_k(Cx_k + z_k) \quad (7.25)$$

iz kojeg se jasnije vidi kako se u procjeni stanja uzima u obzir „pojačanje”.

Neka se Kalmanov filter želi iskoristiti za ocjenu navigacije robota koje se kreće duž puta. Neka se pozicija vozila može mjeriti sa greškom od $\sigma_z = 10$ cm (jedna standardna devijacija). Neka je zadano ubrzanje konstantno (npr. 1 cm/s^2), a standardna devijacija signala ubrzanja $\sigma_u = 0.2 \text{ cm/s}^2$. Neka se pozicija mjeri 10 puta u sekundi ($T = 0.1$ s). U tom slučaju se sistem može opisati sa:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.1 \end{bmatrix} u_k + w_k \quad (7.26)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + z_k \quad (7.27)$$

Pošto je standardna devijacija mjernog šuma 10 cm tada je matrica $S_z = [100]$.

Da bi se dobila početna estimacija za S_w , može se koristiti sljedeća metodologija. Pošto je pozicija proporcionalna ubrzanju sa koeficijentom proporcionalnosti 0.005 (zbog

$p \sim \frac{T^2}{2} u$), a $\sigma_u = 0.2 \text{ cm/s}^2$ tada je varijansa šuma pozicije $(0.005)^2 \cdot (0.2)^2 = 10^{-6}$. Slično, pošto je brzina proporcionalna sa ubrzanjem ($v \sim Tu$) koeficijentom 0.1, tada je varijansa „šuma” brzine data sa $(0.1)^2 \cdot (0.2)^2 = 4 \cdot 10^{-4}$. Konačno, kovarijansa šuma pozicije i brzine je jednaka umnošku standardne devijacije šuma pozicije i standardne devijacije šuma brzine, odnosno $(0.005 \cdot 0.2) \cdot (0.1 \cdot 0.2) = 2 \cdot 10^{-5}$. Na taj način se izračunava matrica:

$$S_w = E [xx^T] = E \left[\begin{bmatrix} p \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & v \end{bmatrix} \right] \quad (7.28)$$

$$= E \left[\begin{bmatrix} p^2 & pv \\ vp & v^2 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 10^{-6} & 2 \cdot 10^{-5} \\ 2 \cdot 10^{-5} & 4 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

Nakon toga se inicijalizira \hat{x}_0 na najbolji mogući način (najbolja apriori estimacija pozicije i brzine), i inicijalizira se P_0 kao nesigurnost u početnu estimaciju stanja, te se iterativno izvršava procedura Kalmanovog filtera.

Jasno je da postoji greška mjerenja pozicije (razlika stvarne pozicije i mjerene), kao i greška estimacije (razlika estimirane pozicije i stvarne), koje mogu postati nešto veće kako bude odmicalo vrijeme.

Ilustracija implementacije Kalmanovog filtera je data programskim kodovima 7.1-7.5.

PROGRAMSKI KOD 7.1

```
# Parametri
trajanje = 150
dt = 0.01
greska_mjerenja = 0.3 # greška mjerenja pozicije
greska_ubrzanja = 0.2 # greška ubrzanja

A = np.array([[1, dt], [0, 1]]) # matrica prelaza
B = np.array([[dt**2 / 2], [dt]]) # matrica ulaza
C = np.array([1, 0]) # matrica mjerenja
```

PROGRAMSKI KOD 7.2

```
# Inicijalizacija stanja
x = np.array([[0], [0]]) # vektor početnog stanja
x_est = x # početna estimacija stanja

# Kovarijansa greške mjerenja
Sz = greska_mjerenja**2
# Kovarijansa procesnog šuma
Sw = greska_ubrzanja**2 * np.array([[dt**4 / 4, dt**3 / 2],
                                     [dt**3 / 2, dt**2]])
P = Sw # početna estimacija kovarijanse
```

PROGRAMSKI KOD 7.3

```
# Pomoćne varijable
pozicija = np.empty((1, 1))
pozicija_est = np.empty((1, 1))
pozicija_mjerena = np.empty((1, 1))
brzina = np.empty((1, 1))
brzina_est = np.empty((1, 1))
```

PROGRAMSKI KOD 7.4

```

# Glavna petlja
for t in np.linspace(0, trajanje, int(trajanje / dt)):
    # ulazni signal
    if (t<50):
        u = 0.1
    elif (t<100):
        u = -0.1
    else:
        u = 0

    # Simulacija procesnog šuma:
    ProcesniShum = greska_ubrzanja * np.array([[dt**2 / 2) * np.random.normal(0, 1)],
                                                [dt * np.random.normal(0, 1)]]

    # Simulacija mjernog šuma:
    MjerniShum = greska_mjerenja * np.random.normal(0, 1)

    # Racunanje stvarnog procesa:
    x = A @ x + B * u + ProcesniShum
    y = C @ x + MjerniShum

    # Implementacija Kalmanovog filtera -----

    # 1. Inicijalna estimacija
    x_est = A @ x_est + B * u

    # 2. Projektovana predikcija (Računanje kovarijanse greške estimacije)
    P = A @ P @ A.T + Sw

    # 3. Kalmanovo pojačanje
    K = P @ C.T * (np.linalg.inv(np.atleast_2d(C @ P @ C.T + Sz)))

    x_est = x_est + K * (y - C @ x_est)

    # 4. Osvježena kovarijanza greške

    P = (np.eye(2) - K @ C) @ P

    # -----

    # Variable za prikaz
    pozicija = np.vstack((pozicija, x[0, 0]))
    pozicija_mjerena = np.vstack((pozicija_mjerena, y[0]))
    pozicija_est = np.vstack((pozicija_est, x_est[0, 0]))
    brzina = np.vstack((brzina, x[1, 0]))
    brzina_est = np.vstack((brzina_est, x_est[1, 0]))

```

PROGRAMSKI KOD 7.5

```

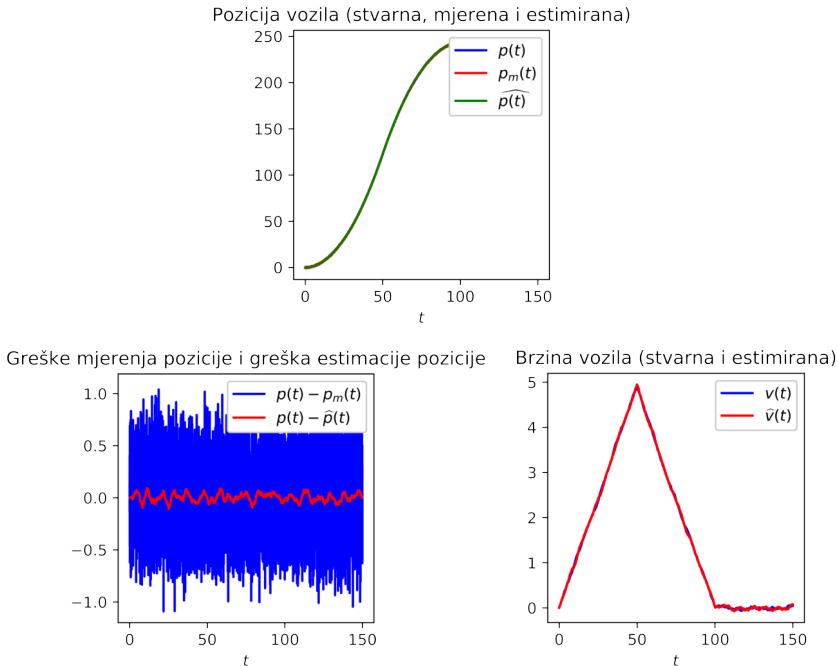
# Prikaz rezultata
t = np.linspace(0, trajanje, int(trajanje / dt))

ssp.slprom1D.grafik(t, pozicija[1:, :], t, pozicija_mjerena[1:, :],
                   t, pozicija_est[1:, :],
                   naslov = 'Pozicija vozila (stvarna, mjerena i estimirana)',
                   legenda = ['$p(t)$', '$p_m(t)$', '$\widehat{p}(t)$'])

```

```
ssp.slprom1D.grafik(t, pozicija[1:, :] - pozicija_mjerena[1:, :],
    t, pozicija[1:, :] - pozicija_est[1:, :],
    naslov = 'Greške mjerenja pozicije i greška estimacije pozicije',
    legenda = ['$p(t)-p_m(t)$', '$p(t)-\widehat{p}(t)$'])

ssp.slprom1D.grafik(t, brzina[1:, :], t, brzina_est[1:, :],
    naslov = 'Brzina vozila (stvarna i estimirana)',
    legenda = ['$v(t)$', '$\widehat{v}(t)$'])
```



7.2 Varijante Kalmanovog filtera

Ukoliko je sistem nelinearan onda se izvodi tzv. prošireni Kalmanov filter (eng. *extended Kalman filter*) koji predstavlja praktično ekstenziju primjene filtera na nelinearne sisteme. Osnovna ideja se sastoji od sljedećeg. Ako je sistem zapisan u nelinearnoj formi:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (7.30)$$

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad (7.31)$$

tada se predikcija definira korištenjem:

$$A_k = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \quad (7.32)$$

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}) \quad (7.33)$$

$$P_k^- = A_{k-1} P_{k-1} A_{k-1}^T + S_w \quad (7.34)$$

a osvježavanje definira preko:

$$C_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}^-} \quad (7.35)$$

$$K_k = P_k^- C_k^T (C_k P_k^- C_k^T + S_z)^{-1} \quad (7.36)$$

te relacija:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - h(\hat{x}_k^-)) \quad (7.37)$$

$$P_k = (I - K_k C_k) P_k^- \quad (7.38)$$

Ukoliko pak se Kalmanov filter ne primjenjuje korak po korak, već se za ocjenu stanja koriste i sva prethodna (već „snimljena” mjerenja) tada se ta implementacija zove Kalmanov izgladivač (eng. *Kalman smoother*).

Za Kalmanov filter se može pokazati da je implementacija koja minimizira varijansu greške estimacije. Međutim, ukoliko se zahtijeva da se minimizira „najlošija” greška estimacije umjesto „srednje” greške estimacije, tada se taj problem rješava sa tzv. H_∞ filterom (eng. *H-infinity*).

Zadaci za samostalan rad

1. Neka je dat sljedeći sistem zapisan u prostoru stanja:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + u(t) + w_1(t) \\ y(t) &= x(t) + w_2(t)\end{aligned}$$

Gdje su $w_1(t)$ i $w_2(t)$ nekorelirani bijeli šumovi s intenzitetima R_1 i R_2 respektivno.

- Pokazati da pojačanje Kalmanovog filtera zavisi samo od odnosa $\beta = \frac{R_1}{R_2}$.
- Odrediti dinamiku greške estimacije $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.
- Kako dinamika greške zavisi od β ? Razmotriti slučaj za veliko β (šum procesa mnogo veći od šuma mjerenja) i malo β (šum mjerenja mnogo veći od šuma procesa).

2. Dizajnira se Kalmanov filter za sistem drugog reda:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + w_2(t)\end{aligned}$$

gdje su w_1 i w_2 nekorelirani bijeli šumovi intenziteta $R_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ i $R_2 = 1$.

- Izračunati minimalnu kovarijansu greške estimacije P i optimalno pojačanje Kalmanovog filtera K .
 - Zapisati jednačine filtera,
 - Pokušati softverskim putem pronaći minimalnu kovarijansu greške P i optimalno pojačanje filtera K .
3. Razmotriti sljedeći sistem (integrator) pobuđen bijelim šumom jediničnog intenziteta:

$$\dot{x}(t) = w_1(t), \quad R_1 = 1$$

Za svaki od sljedećih slučajeva, dizajnirati optimalni Kalmanov filter i pronaći minimalnu kovarijansu greške estimacije za:

- jedno mjerenje: $y(t) = x(t) + w_2(t)$, $R_2 = 1$.
- dva nezavisna mjerenja:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x(t) + w_{21}(t), & R_{21} &= 1 \\ y_2(t) &= x(t) + w_{22}(t), & R_{22} &= 10\end{aligned}$$

- dva zavisna mjerenja:

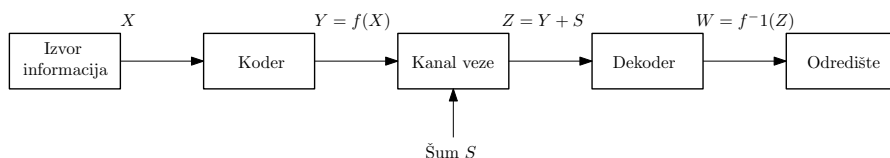
$$\begin{aligned}y_1(t) &= x(t) + w_{21}(t) \\ y_2(t) &= x(t) + w_{22}(t)\end{aligned}$$

gdje je $R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$.

8. Primjena slučajnih signala u teoriji informacija

8.1 Uvodna razmatranja

Sistemi za prenos poruka se u današnje vrijeme po pravilu izvode kao digitalni. Tipična struktura sistema za prenos digitalnog signala je data na slici 8.1.



Slika 8.1: Sistem za prenos informacija

Kao što se može vidjeti, postoji nekoliko tipičnih dijelova sistema za prenos informacija. Zadatak sistema je da se prenese željena poruka od izvora do odredišta (primaoca). U tehničkim primjenama vrlo često je skup mogućih poruka koje se prenose konačan, npr. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Npr. poruke mogu biti alfanumerički karakteri, slova na tastaturi i slično. Za pretvaranje „apstraktnih” poruka u fizičke signale koji se mogu prenositi koristi se *koder*. Tipično, kanalom veze se prenose dva digitalna signala iz skupa $Y = \{0, 1\}$, ili u opštem slučaju 2^n binarnih kombinacija, tako da je zadatak kodera da odgovarajuće poruke kodira na adekvatan način i pretvori ih u „nizove” nula i jedinica. Signali koji se pojavljuju na izlazu iz kodera, a na ulazu u komunikacioni kanal su y_1, y_2, \dots . Prilikom prenosa u komunikacionom kanalu se pojavljuju različiti izvori smetnji, tako da poslani signali iz kodera obično ne stignu u izvornom obliku do dekodera ($Z = Y + S$), čiji je zadatak da pretvori primljenu „kodiranu” poruku u izvornu poruku koja je poslana iz izvora.

Dakle, pojavljuju se dva osnovna pitanja: kako kodirati/dekodirati poruke da bi se povećao kapacitet kanala, te kako smanjiti ili eliminirati grešku prilikom prenosa.

8.2 Informacija

Informacija se može definirati kao „ono što izaziva iznenađenje”. Za neki događaj se kaže da je informativan ukoliko sadrži znanje o nečemu koje do tada nije postojalo. Npr.

događaj da je „pas ugrizao čovjeka” ne sadrži mnogo informacije, ali „čovjek je ugrizao psa” je nešto što sadrži mnogo informacije. Informacija se može posmatrati i kao „broj pitanja koja se moraju postaviti”, a koja se mogu odgovoriti sa „da” ili „ne”, da bi se saznao odgovor na traženo pitanje.

Za događaj čija je vjerovatnoća P , informacija se definira kao:

$$\text{informacija} = \log_2 \frac{1}{P} \quad (8.1)$$

Još formalnije, pojam informacije se može uvesti preko teorije vjerovatnoće. Neka je dat skup događaja $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sa odgovarajućim vjerovatnoćama P_i , tako da je $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. Neka je nad ovim skupom izvršen eksperiment koji može da ima ishode $\{y_j\}$ ($j = 1, \dots, m$). Rezultat eksperimenta formira informaciju, na način da je informacija koja se dobiva o događaju x_i , ako je rezultat eksperimenta y_j , data sa:

$$I(x_i, y_j) = I_{\text{apriori}} - I_{\text{aposteriori}} = \log_2 \frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)} \quad (8.2)$$

pri čemu je $P(x_i)$ apriori vjerovatnoća događaja x_i , a $P(x_i/y_j)$ je (aposteriori) vjerovatnoća događaja x_i pod uslovom da je ishod eksperimenta y_j .

8.3 Entropija

Neka je dat skup događaja x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sa odgovarajućim vjerovatnoćama P_i , tako da je $\sum_{i=1}^n P_i = 1$. Neka je nad ovim skupom izvršen eksperiment koji može da ima ishode $y_i = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). U tom slučaju se nakon izvršenog eksperimenta tačno zna koji je događaj bio u pitanju. To znači da vrijedi:

$$P(x_i/y_i) = 1 \quad (8.3)$$

$$P(x_i/y_j) = 0 \quad (i \neq j) \quad (8.4)$$

Odavde se dobivaju informacije:

$$I(x_i, y_i) = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \quad (8.5)$$

$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{0}{P(x_i)} = -\infty \quad (8.6)$$

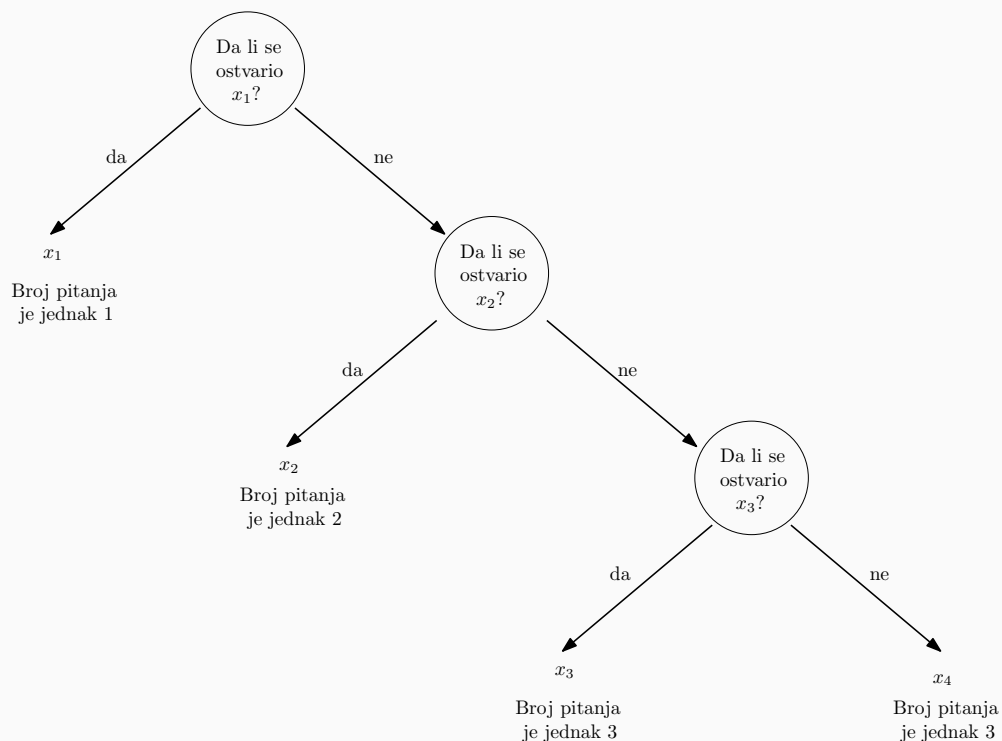
U skladu sa ranije navedenim, informacija se može interpretirati kao „broj pitanja” koja se trebaju postaviti da bi se došlo do određenog odgovora. U zavisnosti od rezultata eksperimenta, ovaj „broj pitanja” može biti različit.

Primjer 8.1:

Dat je hipotetički skup događaja $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ pri čemu su vjerovatnoće date sa $P(x_1) = 0.5$, $P(x_2) = 0.25$, $P(x_3) = 0.125$ i $P(x_4) = 0.125$. Odrediti informaciju koju nosi svaki od događaja.

Rješenje:

Neka se nizom pitanja pokušava utvrditi koji od događaja se ostvario. Usljed poznavanja vjerovatnoća događaja, najbrži put za dolazak do odgovora u općem slučaju bi bio postavljati sljedeća pitanja: „1. Da li se ostvario događaj x_1 ?”, „2. Da li se ostvario događaj x_2 ?” i „3. Da li se ostvario događaj x_3 ?”, i to navedenim redom, kao što je ilustrovano na slici.



Sa slike je jasno da je $I(x_1) = 1$, $I(x_2) = 2$ i $I(x_3) = I(x_4) = 3$, a što se i lahko provjerava relacijom $I(x_i) = \log_2 \left(\frac{1}{P(x_i)} \right)$. Prosječan broj pitanja je u ovom slučaju $E[I(x_i)] = \frac{1+2+3+3}{4} = 2.25$.

Prosječan „broj pitanja” je taj koji određuje neizvjesnost. Naime, ako je ovaj broj pitanja veliki, tada je očigledno neizvjesnost velika. To se opisuje korištenjem očekivane vrijednosti informacije, što je prikazano sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned}
 E[I(x_i, y_j)] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(x_i, y_j) P(x_i, y_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n I(x_i, y_j) P(x_i) P(y_j/x_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n I(x_i, y_i) P(x_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 \frac{1}{P(x_i)} \\
&= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Relacija (8.7) se uz smjenu $P(x_i) = P_i$ svodi na:

$$H(P_1, \dots, P_n) = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i \tag{8.8}$$

Relacija (8.8) definira **entropiju** skupa događaja. Entropija se također i označava sa $H(x)$.

Jasno je da za entropiju vrijedi:

$$0 \leq H(P) \leq H_{max} \tag{8.9}$$

Korištenjem Lagrangeovih multiplikatora se može jednostavno pokazati da se maksimalna vrijednost H_{max} postiže za $P_i = \frac{1}{n}$, jer je tada neizvjesnost zapravo najveća, a da je entropija najmanja ukoliko se tačno zna ishod događaja (npr. $P_1 = 1$, $P_i = 0$, $i = 2, 3, \dots, n$).

Primjer 8.2:

Pokazati da se maksimalna vrijednost entropije H_{max} postiže za $P_i = \frac{1}{n}$ (odnosno kada su svi događaji jednako vjerovatni).

Rješenje:

Potrebno je maksimizirati funkciju:

$$H(P_1, \dots, P_n) = - \sum_{i=1}^n P_i \log_2 P_i$$

uz ograničenje:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1 \tag{8.10}$$

što će biti urađeno metodom Lagrangeovih multiplikatora, odnosno minimizacijom funkcije:

$$\mathcal{L}(P_1, P_2, \dots, P_n, \lambda) = H(P_1, P_2, \dots, P_n) + \lambda G(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

pri čemu je ograničenje ((8.10)) zapisano kao:

$$G(P_1, \dots, P_n) = \sum_{i=1}^n P_i - 1 = 0$$

Pravljenjem izvoda po promjenljivim P_i i Lagrangeovom multiplikatoru λ slijedi:

$$\frac{\partial H}{\partial P_i} = - \left(\log_2 P_i + \frac{1}{\ln 2} \right) = -(\log_2 P_i + \log_2 e)$$

$$\frac{\partial G}{\partial P_i} = 1$$

Sistem jednačina u skladu sa metodom Lagrangeovih multiplikatora je dat sa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_i} + \lambda \frac{\partial G}{\partial P_i} &= 0, i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n P_i &= 1 \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \log_2 P_i + \log_2 e - \lambda &= 0 \\ \log_2 P_i &= -\log_2 e + \lambda \\ P_i &= \frac{2^\lambda}{e} = P = \text{const}, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Uvrštavanjem posljednje jednakosti u (8.10) dobije se:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i = nP &= 1 \\ P_i = P &= \frac{1}{n}, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (8.11)$$

Međutim, ovim je pokazano samo da funkcija $\mathcal{L}(\cdot)$, odnosno $H(\cdot)$, ima lokalni ekstrem u tački $P_m = (1/n, \dots, 1/n)$, pri čemu je $H(P_m) = \log_2 n$. Analizom Hesijana funkcije $\mathcal{L}(\cdot)$ u tački datoj sa relacijom (8.11), se može pokazati da se u toj tački ostvaruje i globalni ekstrem funkcije, odnosno može se zaključiti da će entropija H biti maksimalna kada su svi događaji jednako vjerovatni.

8.3.1 Uslovna entropija

Vrlo često apriori vjerovatnoće nisu poznate ($P(x_i)$), ali su poznate (aposteriori) uslovne verovatnoće $P(x_i/y_j)$, odnosno vjerovatnoće da se desio ishod x_i ukoliko se desio y_j . Ilustracija apriori i aposteriori vjerovatnoća je data na slici (8.2).

Kako vrijedi:

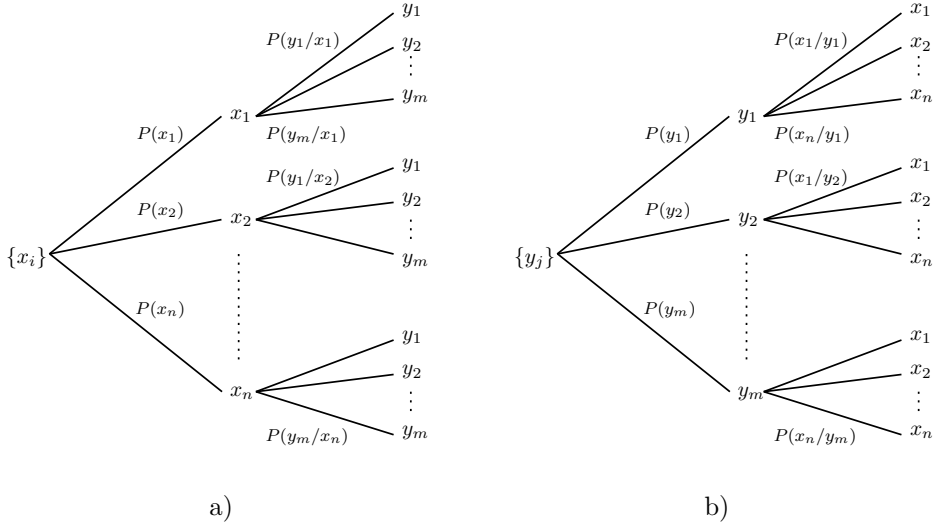
$$I_{\text{apriori}} - I_{\text{aposteriori}} = \log_2 \frac{1}{P(x_i)} - \log_2 \frac{1}{P(x_i/y_j)} = \log_2 \frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)} = I(x_i, y_j) \quad (8.12)$$

to slijedi:

$$I(x_i, y_j) = \log_2 \frac{P(x_i/y_j)}{P(x_i)} = \log_2 \frac{P(x_i/y_j)P(y_j)}{P(x_i)P(y_j)} = \log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \quad (8.13)$$

Entropija događaja x_i se definiira kao:

$$H(y/x_i) = - \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) \log_2 P(y_j/x_i) \quad (8.14)$$



Slika 8.2: Ilustracija a) apriori vjerovatnoće, b) aposteriori vjerovatnoće.

Očekivana vrijednost entropije događaja se naziva *uslovna entropija*:

$$\begin{aligned}
 H(y/x) &= E[H(y/x_i)] \\
 &= - \sum_{i=1}^n P(x_i) \sum_{j=1}^m P(y_j/x_i) \log_2 P(y_j/x_i) \\
 &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j/x_i) \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

Velika vrijednost $H(y/x)$ znači da je teško predvidjeti šta će biti ishod eksperimenta y , ako je poznat ishod x . Analogno, moguće je pokazati da vrijedi:

$$H(x/y) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i/y_j) \quad (8.16)$$

Može se jednostavno pokazati da za slučaj $x_i = y_i$ vrijedi $H(y/x) = 0$, dok ukoliko je ishod eksperimenta y neovisan od x tada vrijedi $H(y/x) = H(y)$ i $H(x/y) = H(x)$.

8.3.2 Entropija zajedničkih događaja

Neka su data dva skupa događaja x_i i y_j ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$). Parovi ovih događaja formiraju novi skup događaja $z_{ij} = (x_i, y_j)$. Neka su vjerovatnoće zajedničkih događaja $P_{ij} = P(x_i, y_j)$. Tada se definira *entropija zajedničkih događaja*:

$$H(xy) = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \quad (8.17)$$

Može se jednostavno pokazati da vrijedi:

$$H(xy) = H(x) + H(y/x) = H(y) + H(x/y) \quad (8.18)$$

S obzirom na činjenicu da poznavanje ishoda eksperimenta može samo da smanji neizvjesnost, jasno je da vrijedi:

$$0 \leq H(y/x) \leq H(y) \quad (8.19)$$

$$0 \leq H(x/y) \leq H(x) \quad (8.20)$$

pa slijedi:

$$H(xy) \leq H(x) + H(y) \quad (8.21)$$

8.3.3 Srednja vrijednost informacije

Od interesa je analizirati očekivanu vrijednost informacije za slučaj $x_i \neq y_i$. Na osnovu relacije (8.13) se dobiva:

$$\begin{aligned} E[I(x_i, y_j)] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)P(y_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \log_2 P(y_j) \\ &= -H(xy) - \sum_{i=1}^n \log_2 P(x_i) \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \log_2 P(y_j) \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) \\ &= -H(xy) - \sum_{i=1}^n \log_2 P(x_i)P(x_i) - \sum_{i=1}^n \log_2 P(y_j)P(y_j) \\ &= -H(xy) + H(x) + H(y) \end{aligned} \quad (8.22)$$

Ova očekivana vrijednost se naziva *međusobna informacija*. Također vrijedi:

$$I(x, y) = H(x) + H(y) - H(xy) \quad (8.23)$$

$$= H(x) - H(x/y) \quad (8.24)$$

$$= H(y) - H(y/x) \quad (8.25)$$

Za kanale bez šuma očigledno važi $I(x, y) = H(x) = H(y)$.

Primjer 8.3:

Izvor informacija šalje 3 poruke x_1 , x_2 i x_3 koje prijemnik potom razvrstava na tri događaja y_1 , y_2 i y_3 . Neka su zajedničke vjerovatnoće $P(x_i, y_j)$ date tabelom:

$P(x_i, y_j)$	y_1	y_2	y_3
x_1	0	0.1	0.2
x_2	0.25	0.05	0
x_3	0.25	0	0.15

Odrediti entropije $H(X)$, $H(Y)$, $H(XY)$, $H(X/Y)$ i $H(Y/X)$, te informaciju $I(XY)$.

Rješenje:

Iz postavke zadatka se može odrediti sljedeće:

$$P(x_i) = \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \implies P(x_1) = 0.3, P(x_2) = 0.3, P(x_3) = 0.4$$

$$P(y_j) = \sum_{i=1}^3 P(x_i, y_j) \implies P(y_1) = 0.5, P(y_2) = 0.15, P(y_3) = 0.35$$

Nadalje:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^3 P(x_i) \log_2 P(x_i) = 1.571$$

$$H(Y) = - \sum_{j=1}^3 P(y_j) \log_2 P(y_j) = 1.441$$

$$H(XY) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(x_i, y_j) \log_2 P(x_i, y_j) = 2.423$$

Na kraju, jednostavno se izračunava:

$$H(X/Y) = H(XY) - H(Y) = 0.982$$

$$H(Y/X) = H(XY) - H(X) = 0.852$$

$$I(X, Y) = H(X) - H(X/Y) = 0.588$$

U okviru programskih kodova 8.1-8.2 je data implementacija zadatka 8.3, koja omogućava unos bilo koje tabele zajedničkih vjerovatnoća, te izračunavanje odgovarajućih entropija.

PROGRAMSKI KOD 8.1

```

# Unos tabele vjerovatnoća

A = [[0, 0.1, 0.2], [0.25, 0.05, 0], [0.25, 0, 0.15]]
A = np.array(A)
m, n = A.shape

# Računanje vjerovatnoća

p_x = np.zeros((m))
p_y = np.zeros((n))

for i in range(m):
    for j in range(n):
        p_x[i] = p_x[i] + A[i,j]
        p_y[i] = p_y[i] + A[j,i]

print("p(x) = ", p_x)
print("p(y) = ", p_y)

```

```

p(x) = [0.3 0.3 0.4]
p(y) = [0.5 0.15 0.35]

```

PROGRAMSKI KOD 8.2

```

# Računanje H(X) i H(Y)

H_X, H_Y = 0, 0
for i in range(m):
    H_X = H_X - p_x[i]*np.log2(p_x[i])

for j in range(n):
    H_Y = H_Y - p_y[j]*np.log2(p_y[j])

print("H(X) = ", "{:.4f}".format(H_X))
print("H(Y) = ", "{:.4f}".format(H_Y))

# Računanje H(XY)

H_XY = 0

for i in range(m):
    for j in range(n):
        if (A[i,j] != 0):
            H_XY = H_XY - A[i,j]*np.log2(A[i,j])

print("H(XY) = ", "{:.4f}".format(H_XY))

# Računanje H(X/Y) i H(Y/X)

print("H(X/Y) = H(XY) - H(Y) = ", "{:.4f}".format(H_XY-H_Y))
print("H(Y/X) = H(XY) - H(X) = ", "{:.4f}".format(H_XY-H_X))
print("I(XY) = H(X) - H(X/Y) = ", "{:.4f}".format(H_X-(H_XY-H_Y)))

```


$$\begin{aligned}
H(X) &= 1.5710 \\
H(Y) &= 1.4406 \\
H(XY) &= 2.4232 \\
H(X/Y) &= H(XY) - H(Y) = 0.9826 \\
H(Y/X) &= H(XY) - H(X) = 0.8523 \\
I(XY) &= H(X) - H(X/Y) = 0.5884
\end{aligned}$$

8.4 Izvori informacija

U nastavku će biti analizirani samo izvori informacija sa konačno mnogo mogućih poruka (npr. a_1, a_2, \dots, a_n). Tipično, poruke od izvora dolaze u sekvencama, npr. $a_5 a_3 a_1 a_3$ itd. Kako bi se jednostavnije analizirali izvori informacija i prenesene poruke uvodi se notacija $A^R(k)$ koja označava sekvencu dužine R čiji je posljednji član bio $k - ti$ po redu. Tako npr.:

$$\underbrace{a_1}_{A^1(1)} \underbrace{a_3 a_4 a_2}_{A^3(4)} \underbrace{a_7 a_6}_{A^2(6)} \quad (8.26)$$

Korištenjem ove notacije može se definirati vjerovatnoća neke sekvence dužine k :

$$\begin{aligned}
P(A^k(k)) &= P(A(1)) \cdot P(A(2)/A(1)) \cdot P(A(3)/A(1)A(2)) \cdot \dots \\
&\dots \cdot P(A(k)/A(1)A(2)\dots A(k-1))
\end{aligned} \quad (8.27)$$

Jasno je da vrijedi:

$$P(A(r)/A(1)A(2)\dots A(r-1)) = P(A/A^{r-1}(r-1)) \quad (8.28)$$

Za izvor se kaže da je *stacionaran* ako vrijedi:

$$P(A(k+j)/A^R(k-1+j)) = P(A(k)/A^R(k-1)), \quad \forall j \geq 0, \quad k-1 \geq R \quad (8.29)$$

Dakle, za stacionarne izvore postoji „stacionarna” zavisnost R poruka unazad. Obično se za stacionarne izvore izostavlja oznaka k tako da se piše:

$$P(A(k)/A^R(k-1)) = P(A/A^R) \quad (8.30)$$

Ukoliko ne bude drugačije naglašeno, u nastavku teksta će svi razmatrani izvori biti stacionarni.

8.4.1 Entropija sekvence i entropija izvora

Ukupan broj različitih sekvenci dužine m od ukupno n mogućih poruka je dat sa n^m . Ako sve sekvence čine skup događaja, tada je entropija tog skupa događaja nazvana **entropija sekvence** i označena sa $H(A^m)$:

$$H(A^m) = - \sum_{i=1}^{n^m} P(A_i^m) \log_2 P(A_i^m) \quad (8.31)$$

pri čemu je sa A_i^m označena i -ta sekvenca dužine m . Važno je primijetiti da se $H(A^m)$ može posmatrati kao $H(AAA\dots A) = H(A(1), A(2), A(3), \dots, A(m))$. Naime, $H(A^m)$ predstavlja entropiju zajedničkih događaja $A, A \dots A$:

$$H(A^m) = H(A) + H(A/A) + H(A/A^2) + \dots + H(A/A^{m-1}) \quad (8.32)$$

Uslovna entropija se može napisati kao:

$$\begin{aligned} H(A/A^r) = E[H(A/A_i^r)] &= \sum_{j=1}^{n^R} P(A_j^r) H(A/A_j^r) \\ &= \sum_{j=1}^{n^R} P(A_j^r) \sum_{k=1}^n P(a_k/A_j^r) \log_2 \frac{1}{P(a_k/A_j^r)} \\ &= \sum_{j=1}^{n^R} \sum_{k=1}^n P(a_k, A_j^r) \log_2 \frac{1}{P(a_k/A_j^r)} \end{aligned} \quad (8.33)$$

Može se pokazati da će svaka entropija biti manja od prethodne, odnosno:

$$H(A) \geq H(A/A) \geq \dots \geq H(A/A^{k-1}) \geq H(A/A^k) \quad (8.34)$$

što je na određen način i logično. Naime, neizvjesnost se smanjuje ukoliko je poznata „što duža“ sekvenca nastala do trenutka razmatranja.

Entropija izvora se definira kao granična vrijednost:

$$H(A/A^\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} H(A/A^{m-1}) \quad (8.35)$$

Može se pokazati da vrijedi:

$$0 \leq H(A/A^\infty) \leq H(A) \leq \log_2 n \quad (8.36)$$

Također, može se pokazati da vrijedi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{H(A^m)}{m} = H(A/A^\infty) \quad (8.37)$$

odnosno, ako je sekvenca dovoljno dugačka, entropija izvora se može naći kao vrijednost entropije po članu sekvence.

8.4.2 Markovljevi izvori

Izvori kod kojih uslovne vjerovatnoće zadovoljavaju uslov:

$$P(A/A^{k-1}) = P(A/A^R), \quad k - 1 \geq R \quad (8.38)$$

nazivaju se Markovljevi izvori. Drugim riječima, vjerovatnoća pojave neke poruke/simbola u sekvenci/poruci zavisi samo od R prethodnih poruka. Entropija sekvence kod Markovljevih izvora ima oblik:

$$H(A^m) = H(A) + H(A/A) + H(A/A^2) + \dots + H(A/A^{m-1})$$

$$\begin{aligned}
&= H(A) + H(A/A) + \dots + H(A/A^{R-1}) + H(A/A^R) + \dots + H(A/A^m) \\
&= \underbrace{H(A) + H(A/A) + \dots + H(A/A^{R-1})}_{R \text{ članova}} + \underbrace{H(A/A^R) + \dots + H(A/A^m)}_{(m-R) \text{ članova}} \\
&= H(A^R) + (m-R)H(A/A^R)
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Oдавde slijedi da je entropija Markovljevog izvora data sa:

$$H(A/A^\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{H(A^m)}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{m} H(A^R) + \frac{m-R}{m} H(A/A^R) \right] = H(A/A^R) \tag{8.41}$$

Markovljevi izvori se mogu opisati korištenjem automata. Naime, svakoj sekvenci dužine R odgovara jedno stanje S_j ($j = 1, \dots, n^R$). Ako se izvor nalazi u stanju S_k i ako se pojavi sljedeća poruka a_p sa vjerovatnoćom $P(a_p/A_k^R)$ izvor prelazi u drugo stanje S_g (koje može biti i stanje S_k). Tada vrijedi:

$$P(S_g/S_k) = P(a_p/S_k) = P(a_p/A_k^R) \tag{8.42}$$

Prema tome, uslovna entropija (koja predstavlja i entropiju izvora) se može izračunati kao:

$$\begin{aligned}
H(A/A^R) &= \sum_{j=1}^{n^R} P(S_j) \sum_{k=1}^n P(a_k/S_j) \log_2 \frac{1}{P(a_k/S_j)} \\
&= \sum_{j=1}^{n^R} P(S_j) H(S_j) \\
&= E[H(S_j)]
\end{aligned} \tag{8.43}$$

8.4.3 Redundanca

Izvor ima maksimalnu vrijednost entropije po članu sekvence kada su zadovoljeni uslovi: $R = 0$ (prethodne poruke nemaju utjecaja na sljedeće) i sve poruke su jednako vjerovatne. Pod tim uslovima se dobije maksimalna moguća vrijednost entropije izvora $H_{\max} = \log_2 n$.

Redundanca se definira kao:

$$R = \frac{H_{\max} - H(A/A^\infty)}{H_{\max}} \tag{8.44}$$

Redundanca je poželjna jer omogućava detekciju grešaka i pogrešnog prenosa, korištenjem činjenice da su neke poruke i sekvence više vjerovatne nego neke druge. Primjera radi, riječ „trambaj” će u razgovoru skoro sigurno biti interpretirana kao „tramvaj” zahvaljujući redundanciji govora/jezika. Manja entropija izvora i povećana redundancija smanjuje brzinu prenosa informacija, ali povećava sigurnost ispravnog prenosa.

Primjer 8.4:

Markovljev izvor informacija drugog reda (zavisnost od dvije poruke unazad) emitira dvije različite poruke 0 i 1. Ovisno od toga koje su dvije poruke posljednje emitirane, izvor se može naći u jednom od 4 moguća stanja S_{00} , S_{01} , S_{10} odnosno

S_{11} (recimo, ukoliko su posljednje dvije emitirane poruke 0 i 1 tim redom, izvor će se nalaziti u stanju S_{01}). Vjerovatnoće emitiranja poruke 0 u svakom od tih stanja iznose:

- $P(0/S_{00}) = 0.4$
- $P(0/S_{01}) = 0.2$
- $P(0/S_{10}) = 0.2$
- $P(0/S_{11}) = 0.2$

Odredite entropiju i redudansu ovog izvora, zatim entropiju sekvenci dužine 4, te vjerovatnoću pojave sekvence 11110101.

Rješenje:

Prvo je potrebno odrediti vjerovatnoće pojedinih stanja. Ako se uvede oznaka $P_{ij} = P(S_{ij})$, onda se ove vjerovatnoće mogu odrediti iz sljedećeg sistema jednačina:

$$\begin{aligned} P_{00} &= P_{00}P(0/S_{00}) + P_{10}P(0/S_{10}) \\ P_{01} &= P_{00}P(1/S_{00}) + P_{10}P(1/S_{10}) \\ P_{10} &= P_{01}P(0/S_{01}) + P_{11}P(0/S_{11}) \\ 1 &= P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} \end{aligned}$$

Grupisanjem i sređivanjem se dobije sljedeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} -6P_{00} + 2P_{10} &= 0 \\ 6P_{00} - 10P_{01} + 8P_{10} &= 0 \\ 2P_{01} - 10P_{10} + 2P_{11} &= 0 \\ P_{00} + P_{01} + P_{10} + P_{11} &= 1 \end{aligned}$$

Rješenje ovog sistema je:

$$P(S_{00}) = 0.0526, P(S_{01}) = 0.1579, P(S_{10}) = 0.1579, P(S_{11}) = 0.6316$$

Entropija izvora se može izračunati kao:

$$\begin{aligned} H(A/A^\infty) &= H(A/A^2) \\ &= - \sum_{j=1}^4 P(S_j) \sum_{i=1}^2 P(a_i/S_j) \log_2 P(a_i/S_j) \\ &= - \sum_{j=1}^4 P(S_j) [P(0/S_j) \log_2 P(0/S_j) + \\ &\quad + P(1/S_j) \log_2 P(1/S_j)] \\ &= 0.735 \end{aligned}$$

Redundansa izvora je:

$$R = 1 - \frac{H(A/A^\infty)}{\log_2 2} = 0.265$$

Entropija sekvenci dužine 4 iznosi:

$$H(A^4) = H(A^2) + (4 - 2)H(A/A^2) = 2.953$$

pri čemu je iskorišten sljedeći međurezultat:

$$H(A^2) = - \sum_{j=1}^4 P(S_j) \log_2 P(S_j) = 1.483$$

Vjerovatnoća pojave sekvence 11110101 iznosi:

$$\begin{aligned} P("11110101") &= P_{11} \cdot P(1/S_{11}) \cdot P(1/S_{11}) \cdot P(0/S_{11}) \cdot \dots \\ &\quad \dots \cdot P(1/S_{10}) \cdot P(0/S_{01}) \cdot P(1/S_{10}) \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

8.5 Prenos informacija kroz komunikacioni kanal

Prilikom prenosa informacija kroz komunikacioni kanal (slika 8.1) pojavljuju se dva zahtjeva:

- ukoliko šum u kanalu ne postoji, tada se zahtijeva što je moguće veća brzina prenosa,
- ukoliko šum postoji, tada se želi maksimalna brzina i postupak kodiranja koji će maksimizirati vjerovatnoću ispravnog prenosa. Osnovni tehnički izazov je taj što su zahtjevi za maksimalnom brzinom i ispravnim prenosom nažalost oprečni.

$$W = f^{-1}(Z) = f^{-1}(Y + S) = f^{-1}(f(X) + S) \quad (8.45)$$

Od značaja je razmotriti brzinu prenosa informacija kroz kanal veze.

Ako sve poruke *imaju isto trajanje* (τ), tada sekvenca od m poruka/simbola ima trajanje $m\tau$, koje se u literaturi označava sa τ^m . Bitno je napomenuti da τ^m ne označava stepenovanje (eksponent), već ukupno trajanje pri prenosu m poruka. Prenesena informacija u jedinici vremena je data sa:

$$\frac{I(Y^m)}{\tau^m} = \frac{I(Y^m)}{m\tau} \quad (8.46)$$

Brzina prenosa informacija kroz kanal se formira puštanjem da m teži u beskonačnost:

$$\overline{I(Y)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I(Y^m)}{m\tau} = \frac{H(Y/Y^\infty)}{\tau} \quad (8.47)$$

Maksimalna brzina prenosa informacija (tzv. **kapacitet kanala veze**) se ostvaruje kada su svi simboli podjednako vjerovatni i ne postoji zavisnost od prethodnih simbola. Kapacitet kanala veze se obilježava sa C_c i računa kao:

$$C_c = \max \overline{I(Y)} = \frac{\log_2 n}{\tau} \quad (8.48)$$

Ako pak poruke imaju *različito trajanje*, tada je prenesena informacija u jedinici vremena:

$$\frac{I(Y^m)}{\tau^m} \approx \frac{I(Y^m)}{\sum_{i=1}^n m_i \tau_i} = \frac{I(Y^m)}{m \sum_{i=1}^n p(m_i) \tau_i} = \frac{I(Y^m)}{m E[\tau_i]} = \frac{I(Y^m)}{m \tau_{sr}} \quad (8.49)$$

pa je:

$$\overline{I(Y)} = \frac{H(Y/Y^\infty)}{\tau_{sr}} \quad (8.50)$$

odnosno kapacitet kanala veze se računa korištenjem:

$$C_c = \max \frac{H(Y/Y^\infty)}{\tau_{sr}} \quad (8.51)$$

Važno je napomenuti da kada se kodiraju poruke sa kodovima jednakog trajanja, tada mora postojati bijektivnost kodiranja, a broj simbola po poruci mora biti dovoljno veliki da opiše sve moguće poruke. S druge strane, za kodove s promjenljivom dužinom kodirane poruke, mora vrijediti tzv. prefikсни uvjet - nijedna kraća riječ ne smije biti prefiks niti jedne duže kodne riječi.

U slučaju **kanala sa šumom**, definira se i tzv. *protok informacija*:

$$\overline{I(Z, Y)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I(Y^m, Z^m)}{T_m} \quad (8.52)$$

što se za kanale bez memorije svodi na:

$$\overline{I(Z, Y)} = \frac{I(Y, Z)}{T_{sr}} = \frac{I(Y, Z)}{\sum_i p(Y_i) T(Y_i)} \quad (8.53)$$

Kapacitet kanala sa šumom se definira sa:

$$C_c = \max \overline{I(Z, Y)} \quad (8.54)$$

pri čemu je očigledno da je kapacitet kanala sa šumom manji od kapaciteta kanala bez šuma.

Zadaci za samostalan rad

1. Diskretni izvor informacija generira listu simbola $S_i, i = 1, 2, 3, 4$. Vjerovatnoća pojavljivanja pojedinih simbola izvora data je u tabeli. Potrebno je odrediti entropiju ovog izvora.

S_i	S_1	S_2	S_3	S_4
$P(S_i)$	0.45	0.3	0.2	0.05

2. Diskretni izvor informacija bez memorije generira simbole S_i , pri čemu su vjerovatnoće pojavljivanja pojedinih simbola date u tabeli. Odrediti entropiju ovog izvora i entropiju drugog i trećeg proširenja ovog izvora.

S_i	S_1	S_2	S_3
$P(S_i)$	0.5	0.25	0.25

3. Dati su skupovi od četiri događaja x_i , kao i četiri događaja y_i sa odgovarajućim vjerovatnoćama prikazanim u tabelama. Događaji x_i i y_i su međusobno nezavisni. Naći entropiju za skup događaja X , za skup događaja Y i naći entropiju zajedničkog događaja $H(x, y)$.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	y_i	y_1	y_2	y_3	y_4
$P(x_i)$	1/3	1/4	1/3	1/12	$P(y_i)$	1/5	1/3	1/3	2/15

4. Data je tabela vjerovatnoće zajedničkih događaja x_i, y_i . Naći entropije $H(x)$, $H(y)$, $H(x, y)$, $H(y/x)$ i $H(x/y)$.

$p(x_i, y_i)$	y_1	y_2	y_3
x_1	1/32	3/32	1/16
x_2	0	5/32	1/32
x_3	1/16	7/32	1/16
x_4	1/32	3/16	1/16

5. Neka je dat izvor koji emitira tri simbola A, B i C i ima ovisnost od jednog simbola unatrag. Data je tablica vjerovatnoće prelaza iz pojedinih stanja. Naći entropiju izvora, entropiju sekvence dužine 7 i naći vjerovatnoću sekvence ABCABC.

	A	B	C
S_A	0.8	0.1	0.1
S_B	0.2	0.7	0.1
S_C	0.05	0.05	0.9

6. Izvor emitira 4 simbola a_1, a_2, a_3, a_4 , pri čemu postoji ovisnost od jednog simbola unatrag. Data je tabela vjerovatnoće prelaza u pojedina stanja. Naći entropiju izvora.

	a_1	a_2	a_3	a_4
S_1	0.5	0.5	0	0
S_2	0.5	0.5	0	0
S_3	0	0	0.25	0.75
S_4	0	0	0.25	0.75

7. Izvor emitira dva simbola 0 i 1 pri čemu postoji ovisnost o dva simbola unatrag. Date su sljedeće uslovne vjerovatnoće: $p(0/00) = 0.25$, $p(0/01) = 0.35$, $p(0/10) = 0.5$ i $p(0/11) = 0.4$. Nacrtati dijagram prelaza stanja, odrediti vjerovatnoću pojedinih stanja i entropiju tih stanja, kao i entropiju izvora. Odrediti vjerovatnoću sekvence 1010101010 kao i entropiju sekvence dužine 8.

9. Markovljevi lanci i Skriveni Markovljevi modeli (HMM)

9.1 Markovljevi lanci

Markovljevi lanci predstavljaju matematički koncept koji se koristi za modeliranje sistema koji se zasnivaju na prijelazima između različitih stanja, pri čemu vjerovatnoća prelaska u bilo koje stanje zavisi isključivo od trenutnog stanja i vremena, a ne od prethodnih stanja, odnosno događaja koji su prethodili trenutnom stanju. Ključne karakteristike Markovljevog lanca su:

- *prostor stanja* - opis skupa svih mogućih stanja u kojima sistem može biti,
- *vjerovatnoće prijelaza* - vjerovatnoće prelaska iz jednog stanja u drugo, obično predstavljene matricom prijelaza i
- *Markovljevo svojstvo* - vjerovatnoća prelaska u bilo koje određeno stanje zavisi samo od trenutnog stanja.

Neka je skup svih stanja $S = 0, 1, 2, \dots$ konačan i varijable X_0, X_1, \dots predstavljaju slučajne varijable koje uzimaju vrijednosti iz skupa S . Lanac X_1, X_2, \dots je Markovljev, ukoliko za sve izbore stanja i_1, \dots, i_n vrijedi:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n) \quad (9.1)$$

Vjerovatnoća prelaska iz stanja i u stanje j je data izrazom $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$.

Markovljev lanac je *homogen* ukoliko vjerovatnoće prelaska ovise samo o stanjima i i j , odnosno ne ovise o trenutka (n) u kojem se prijelaz dešava, odnosno ako za svako cjelobrojno m i n vrijedi:

$$p_{ij} := P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_{m+1} = j | X_m = i). \quad (9.2)$$

Matrica prelaza \mathbf{A} je matrica elemenata $A = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,n}}$ čiji redovi određuju trenutna, a kolone buduća stanja. Dakle, element matrice p_{ij} predstavlja vjerovatnoću prelaska u stanje j iz stanja i :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \quad (9.3)$$

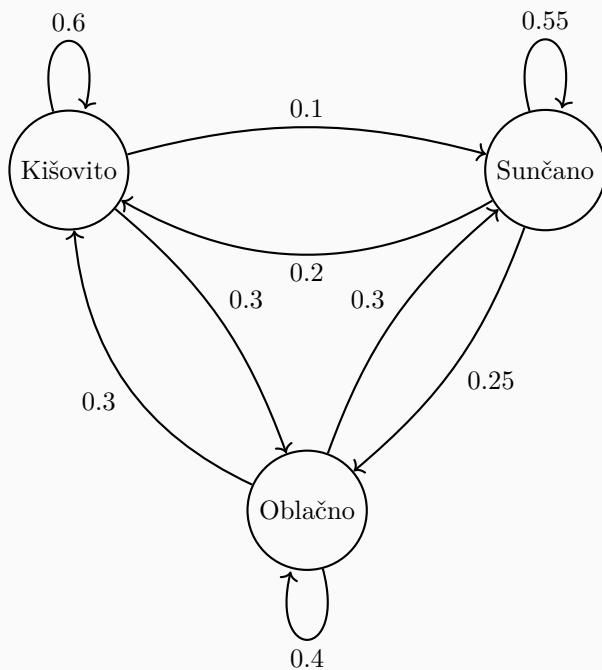
Interesantno je primijetiti da je ovo tzv. *stohastička matrica* jer su njeni elementi nenegativni i zbir elemenata u svakom redu i koloni matrice je jednak jedinici. Osnovni koncepti Markovljevih lanaca će biti ilustrirani kroz primjere. Matrica \mathbf{A} omogućava određivanje vjerovatnoće prijelaza iz jednog stanja, kako u narednom koraku, tako i nakon određenog broja koraka.

Primjer 9.1:

Neka su u gradu moguća tri vremenska stanja: kišovito, oblačno i sunčano, te neka sutrašnje vrijeme ovisi samo od toga kakvo je vrijeme danas. Ako je vrijeme sunčano, vjerovatnoća da će sutra biti kišovito je 0.2; da će biti oblačno je 0.25, da će biti opet sunčano je 0.55. Ako je vrijeme kišovito vjerovatnoća da će sutra biti kišovito iznosi 0.6, da će biti oblačno je 0.3, i da će biti sunčano je 0.1. Ako je vrijeme oblačno vjerovatnoća da će biti kišovito je 0.3, da će biti oblačno je 0.4, i da će biti sunčano je 0.3. Koja je vjerovatnoća da ukoliko je danas sunčano, za dva dana vrijeme bude oblačno?

Rješenje:

Ovaj primjer je očigledno Markovljev lanac jer zadovoljava njegove karakteristike. Prostor stanja čine 3 stanja: kišovito, oblačno i sunčano, date su vjerovatnoće prijelaza i poznato je da sutrašnje vrijeme ovisi isključivo od današnjeg. Ovaj Markovljev lanac prikazan je na slici.

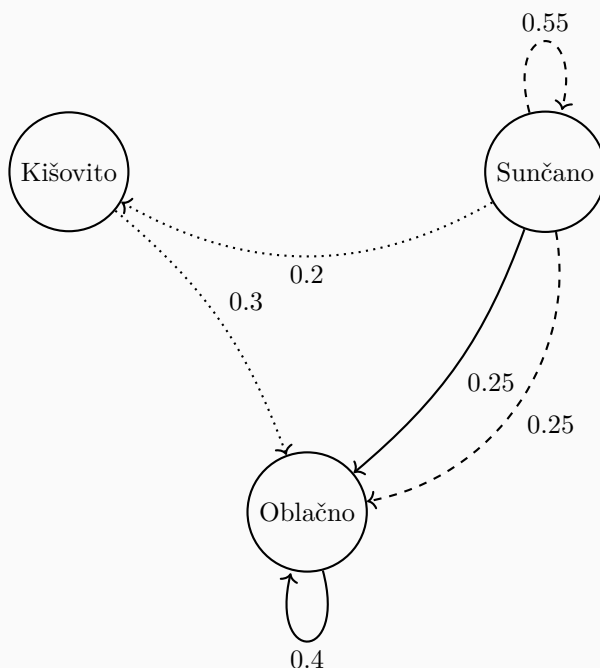


Uzme li se u datom primjeru da su stanja respektivno kišovito, sunčano i oblačno,

matrica prelaza je data sa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.55 & 0.25 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Da bi se riješio ovaj problem, potrebno je posmatrati sve moguće prijelaze u stanje „oblačno” iz stanja „sunčano”, u dva koraka, i njihove vjerovatnoće. Na slici je dat prikaz automata bez ucrtanih prelaza koji nisu relevantni za razmatranje. Također, različitim tipovima linija su prikazane različite putanje do stanja „oblačno”, pa je putanja od „sunčano” do „oblačno” ucrtana dva puta.



Neka je prvi dan vrijeme sunčano, a treći dan vrijeme oblačno. Jasno je da za drugi dan postoje tri moguće opcije: kišovito (plava putanja), sunčano (zelena putanja), oblačno (crvena putanja). Tražena vjerovatnoća $p_{SO}(2)$ (oznaka za prelazak iz stanja S („sunčano”) u stanje O („oblačno”) u dva koraka) se može odrediti kao:

$$p_{SO}(2) = 0.2 \cdot 0.3 + 0.55 \cdot 0.25 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.2975 \quad (9.5)$$

Postupak određivanja ove vjerovatnoće je intuitivan i jednostavan, pri manjem broju koraka. Detaljnijom analizom relacije (9.5) se može primijetiti da je ona zapravo proizvod dva vektora, i to:

$$p_{SO}(2) = [0.2 \quad 0.55 \quad 0.25] \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.25 \\ 0.4 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Prvi vektor u relaciji (9.6) je zapravo drugi red matrice prijelaza (9.4) koji odgovara trenutnom stanju „sunčano”, dok je drugi vektor treća kolona iste matrice koja odgovara budućem stanju „oblačno”. Očigledno, ako se isti postupak sprovede za sva stanja, dobivaju se elementi matrice matrice \mathbf{A}^2 :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0.47 & 0.205 & 0.325 \\ 0.305 & 0.3975 & 0.2975 \\ 0.36 & 0.315 & 0.325 \end{bmatrix} \quad (9.7)$$

Ova matrica predstavlja vjerovatnoće prelaska iz bilo kojeg stanja u bilo koje drugo u dva koraka.

Intuitivno izlaganje u prethodnom zadatku se može formalizirati tzv. *Chapman-Kolmogorovljevom teoremom*, koja glasi:

$$p_{ij}(m) = \sum_{(k)} p_{ik}(r)p_{kj}(m-r), \quad r = 1, 2, \dots, m-1 \quad (9.8)$$

a govori da je vjerovatnoća prelaza iz i -tog stanja u j -to stanje u m koraka jednaka sumi proizvoda vjerovatnoća prelaza iz stanja i u stanje k nakon r koraka, i vjerovatnoće prelaska iz stanja k u stanje j u $m-r$ koraka, po svim mogućim putevima (ukupno k). Posljedično, za matricu prelaza vrijedi da:

$$\mathbf{A}(m) = \mathbf{A}(r)\mathbf{A}(m-r) = \mathbf{A}^m \quad (9.9)$$

Dakle, da bi se odredila vjerovatnoća prelaska iz jednog stanja u drugo u m koraka, dovoljno je matricu prelaza stepenovati sa m i iz nje pročitati traženu vjerovatnoću.

9.2 Početne i stacionarne vrijednosti Markovljevih lanaca

Matrica \mathbf{A} sadrži vjerovatnoće prelaza između stanja u jednom koraku, gdje a_{ij} označava vjerovatnoću prelaza iz stanja i u stanje j . Da bi Markovljev lanac bio potpuno opisan potrebno je poznavati i vektor **početnih vrijednosti**:

$$\mathbf{p}(0) = [p_1(0), p_2(0), \dots] \quad (9.10)$$

koji predstavlja distribuciju vjerovatnoća početnog stanja sistema. Stanje nekog sistema, koji vrši prelaske iz jednog stanja u drugo u nekom trenutku n , može se opisati jednačinom:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(0)\mathbf{A}^n \quad (9.11)$$

koja predstavlja distribuciju vjerovatnoća stanja nakon n koraka. Ako se pak posmatraju dva uzastopna vremenska trenutka, tada vrijedi:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{p}(n-1)\mathbf{A} \quad (9.12)$$

Relacije (9.11), odnosno (9.12) predstavljaju jednačine Markovljevog lanca.

Osim početnih vrijednosti, izuzetno značajan pojam u teoriji Markovljevih lanaca su tzv. **stacionarne vrijednosti**. Ako postoji pozitivan cijeli broj n takav da su svi elementi matrice \mathbf{A}^n strogo pozitivni, to znači da se iz svakog stanja može preći u bilo koje drugo stanje. Ako za svako stanje (označeno sa j) postoji limes:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) \quad (9.13)$$

tada se Markovljevi lanci nazivaju *ergodični*. Drugim riječima, nakon n koraka Markovljevog lanca, postoji povezanost između svakog para stanja. Ta se povezanost izražava vjerovatnoćama π_j koje se nazivaju *stacionarne vrijednosti*, i sačinjavaju vektor stacionarnih vrijednosti $\boldsymbol{\pi}$. Stacionarne vrijednosti određuju vjerovatnoću da će se sistem nalaziti u stanju j nakon beskonačno mnogo koraka (u nekom dalekom trenutku).

Vrijednosti π_j se mogu izračunati i sljedećom konstrukcijom:

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n \quad (9.14)$$

Posljednji izraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n$ se u literaturi naziva i *stacionarna matrica prelaza*, koji zapravo nije matrica već reprezentacija vjerovatnoća kod koje su svi elementi pojedinih kolona međusobno jednaki, npr.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

$$\boldsymbol{\pi} = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \cdots \quad \pi_N] \quad (9.16)$$

Također, vektor stacionarnih vrijednosti $\boldsymbol{\pi}$ zadovoljava relaciju:

$$\boldsymbol{\pi} \mathbf{A} = \boldsymbol{\pi} \quad (9.17)$$

Jasno je da postupak određivanja matrice \mathbf{A}^n za Markovljev lanac s većim brojem stanja nije jednostavan, no ipak vektor stacionarnih vrijednosti može se naći direktno iz matrice \mathbf{A} za ergodične Markovljeve lance. Pa tako, na osnovu (9.12) za j -tu komponentu vektora stacionarnih vrijednosti vrijedi:

$$p_j(n) = \sum_{(k)} p_k(n-1)p_{kj} \quad (9.18)$$

odnosno, na osnovu (9.13):

$$\pi_j = \sum_{(k)} \pi_k p_{kj}, \quad \forall j \quad (9.19)$$

Ipak, ovaj sistem jednačina je nedovoljan za određivanje stacionarnih vrijednosti, jer je u pitanju homogeni sistem koji nema jednoznačno rješenje. Potrebno je iskoristiti činjenicu da su elementi vektora $\boldsymbol{\pi}$ vjerovatnoće dolaska u određeno stanje, samim time njihova suma treba biti jednaka jedan:

$$\sum_{(k)} \pi_k = 1 \quad (9.20)$$

Primjer 9.2:

Odrediti stacionarne vrijednosti za Markovljev lanac dat u primjeru 9.1

Rješenje:

Na osnovu matrice prijelaza (9.4), te relacija (9.19) i (9.20), slijedi:

$$\pi_1 = 0.6\pi_1 + 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 \quad (9.21)$$

$$\pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.55\pi_2 + 0.3\pi_3 \quad (9.22)$$

$$\pi_3 = 0.3\pi_1 + 0.25\pi_2 + 0.4\pi_3 \quad (9.23)$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \quad (9.24)$$

Rješavanjem datog sistema jednačina, dobiva se vektor stacionarnih stanja:

$$\pi = [0.3861 \quad 0.2970 \quad 0.3168] \quad (9.25)$$

Rezultati se mogu i eksperimentalno provjeriti korištenjem programskog koda 9.1.

PROGRAMSKI KOD 9.1

```
def HMM_stacionarne_vrijednosti(A, pocetno_stanje, broj_koraka):
    vjerovatnoce = [pocetno_stanje]
    stanje = pocetno_stanje

    for _ in range(broj_koraka):
        stanje = np.dot(stanje, A) # p(n) = p(n-1)*A
        vjerovatnoce.append(stanje)

    return np.array(vjerovatnoce)

# Prijelazna matrica
A = np.array([[0.6, 0.1, 0.3],
              [0.2, 0.55, 0.25],
              [0.3, 0.3, 0.4]])

# Početna raspodjela stanja
pocetno_stanje = np.array([0.0, 0.0, 1.0]) # U početku je sunčano

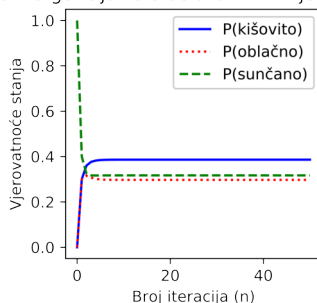
# Broj iteracija
n = 50
t = np.arange(n+1)

# Vjerovatnoće u prvih n prijelaza
vjerovatnoce = HMM_stacionarne_vrijednosti(A, pocetno_stanje, n)

ssp.slprom1D.grafik(t, vjerovatnoce[:, 0],
                   t, vjerovatnoce[:, 1],
                   t, vjerovatnoce[:, 2], stil2 = 'r:', stil3 = 'g--',
                   naslov = 'Konvergencija ka stacionarnim vrijednostima',
                   legenda = ['P(kišovito)', 'P(oblačno)', 'P(sunčano)'],
                   x_labela = 'Broj iteracija (n)', y_labela = 'Vjerovatnoće stanja')
```

```
print(f"Vektor stacionarnih vrijednosti: {np.round(vjerovatnoce[50], 4)}")
```

Konvergencija ka stacionarnim vrijednostima



Vektor stacionarnih vrijednosti: [0.3861 0.297 0.3168]

9.3 Skriveni Markovljevi modeli

Skriveni Markovljev modeli (eng. *Hidden Markov Models* - HMM) predstavljaju proširenje Markovljevih lanaca, gdje promatranja proizlaze iz probabilističke funkcije stanja. Osnovni proces je nevidljiv (skriven) i može se posmatrati samo kroz drugi skup procesa koji zapravo predstavlja niz promatranja. Koncept HMM će biti ilustriran kroz dodatnu analizu primjera 9.1 i 9.2. Neka se posmatraju ista vremenska stanja: sunčano, kišovito i oblačno, kao u primjerima 9.1 i 9.2, no međutim, neka se ta stanja ne mogu direktno opservirati, nego se „mjere” kroz raspoloženje osobe koja živi u tom gradu, kao na slici 9.1. U zavisnosti od toga kakvo je vrijeme, ta osoba može biti vesela ili tužna.

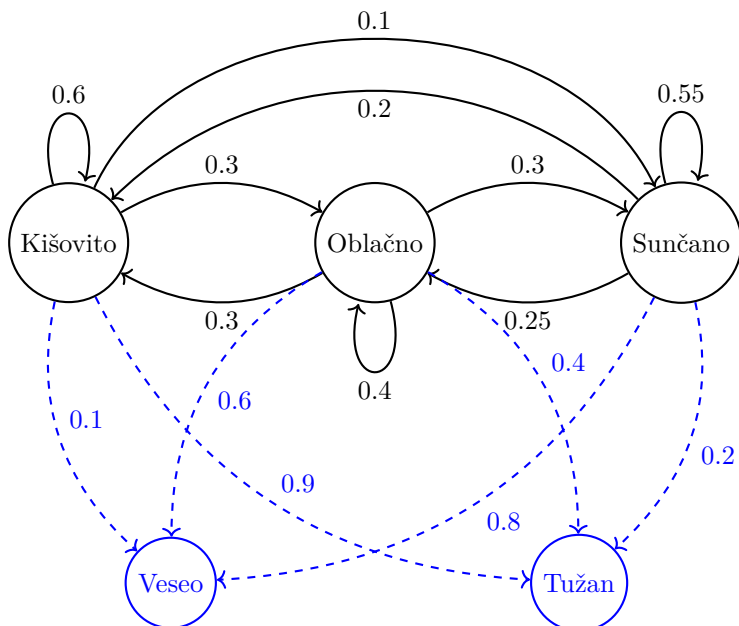
Dakle, stanja Markovljevog lanca su nepoznata, ali su poznata promatranja, tj. u ovom slučaju raspoloženja. Grafički prikaz ovog skrivenog Markovljevog modela dat je na slici 9.1. Kod sistema ovakvog tipa, postavlja se pitanje kako samo na osnovu opservacija dobiti određene informacije o skrivenim stanjima sistema, te s kolikom sigurnošću se može tvrditi da je dati niz opservacija nastao od pretpostavljenih skrivenih stanja.

Kako bi se Markovljev model u potpunosti opisao, potrebno je poznavati 5 elemenata:

- **broj skrivenih stanja modela (N)** - iako su stanja skrivena, obično je moguće na osnovu fizikalnosti modela odrediti koliko stanja ima; stanja su opisana skupom $S = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ pri čemu se stanje u trenutku t označava sa q_t ,
- **broj promatranja/opservacija po stanju (M)** - opservacije su opisane skupom $O = \{O_1, O_2, \dots, O_M\}$,
- **matrica prijelaza (A)**,
- **matrica vjerovatnoća promatranja tzv. emisijska matrica (B)** gdje u stanju j vrijedi:

$$b_j(O_k) = P[O_k | q_t = S_j], \quad 1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq M \quad (9.26)$$

- **vektor stacionarnih vrijednosti π .**



Slika 9.1: Ilustracija Skrivenog Markovljevog Modela

Iako je za opis skrivenog Markovljevog modela (HMM) potrebno 5 parametara, uobičajena je skraćena notacija:

$$\lambda = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi) \quad (9.27)$$

koja označava kompletne parametre HMM-a.

Postoje tri uobičajena tipa HMM-a: model s lijeva na desno (eng. *left-to-right*), dvostruko paralelni model s lijeva na desno (eng. *two parallel left-to-right*) i ergodični model. Kod prvog tipa modela, indeks sljedećeg stanja je uvijek veći ili jednak indeksu trenutnog stanja, tako da se prelazi ostvaruju u jednom smjeru. Dvostruko paralelni model posjeduje dvije paralelne putanje kojima se može kretati u jednom i drugom smjeru. Ergodični model je takav kod kojeg se prelaz iz jednog stanja u drugo može izvršiti u konačnom broju koraka.

9.4 Evaluacija, dekodiranje i treniranje HMM

Postoje tri osnovna izazova, odnosno problema, koja se trebaju riješiti da bi HMM bio koristan u realnim primjenama, a to su problem evaluacije, problem dekodiranja i problem treniranja/učenja. U nastavku će svaki od njih biti detaljnije obrađen.

9.4.1 Problem evaluacije

Evaluacijski problem podrazumijeva određivanje vjerovatnoće da je posmatrana sekvenca proizvedena od strane datog modela. Potencijalna primjena se ogleda u tome da je, uko-

liko postoji više potencijalnih modela, moguće posmatranjem modela odrediti koliko dobro svaki od njih odgovara datoj sekvenci, te odabrati model koji najbolje odgovara posmatranjima. Dakle, ako je data sekvenca promatranja $O = O_1O_2\dots O_T$ i HMM $\lambda = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi)$, kako efikasno izračunati vjerovatnoću sekvence s obzirom na dati model $P(O|\lambda)$?

Za ilustraciju problema, iskoristit će se primjer 9.1. Matrica prelaza je ranije izračunata i data relacijom (9.4). Emisijska matrica se može očitati sa slike 9.1:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

Ona daje vjerovatnoću opservacija u određenim stanjima. Redovi matrice u vezi su sa stanjima (kišovito, sunčano, oblačno), a kolone sa promatranjima (veseo, tužan).

Neka je potrebno izračunati vjerovatnoću pojavljivanja sljedeće sekvence u toku tri dana: veseo-veseo-tužan. Neka je vremenska prognoza (koju u principu nije poznata posmatraču) za ta tri dana bila sunčano-oblačno-sunčano.

U ovom slučaju će se odrediti zajednička vjerovatnoća ove dvije sekvence. Obzirom da su stanja i promatranja međusobno nezavisna, tada vrijedi:

$$P(Y = VVT, X = SOS) = P(S) \cdot P(O|S) \cdot P(S|O) \cdot P(V|S) \cdot P(V|O) \cdot P(T|S) \quad (9.29)$$

gdje su stanja određena sa S (sunčano), O (oblačno) i K (kišovito), dok su promatranja označena V (veseo) i T (tužan).

Prvi faktor ($P(S)$) u prethodnoj relaciji se određuje iz vektora stacionarnih vrijednosti π izračunat u (9.25). Sljedeća dva faktora ($P(O|S)$, $P(S|O)$) se očitavaju iz matrice prelaza (relacija (9.4)), a preostali iz emisijske matrice (relacija (9.28)). Konačno, rješenje je:

$$P(Y = VVT, X = SOS) = 0.2970 \cdot 0.3 \cdot 0.25 \cdot 0.8 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.0014256 \quad (9.30)$$

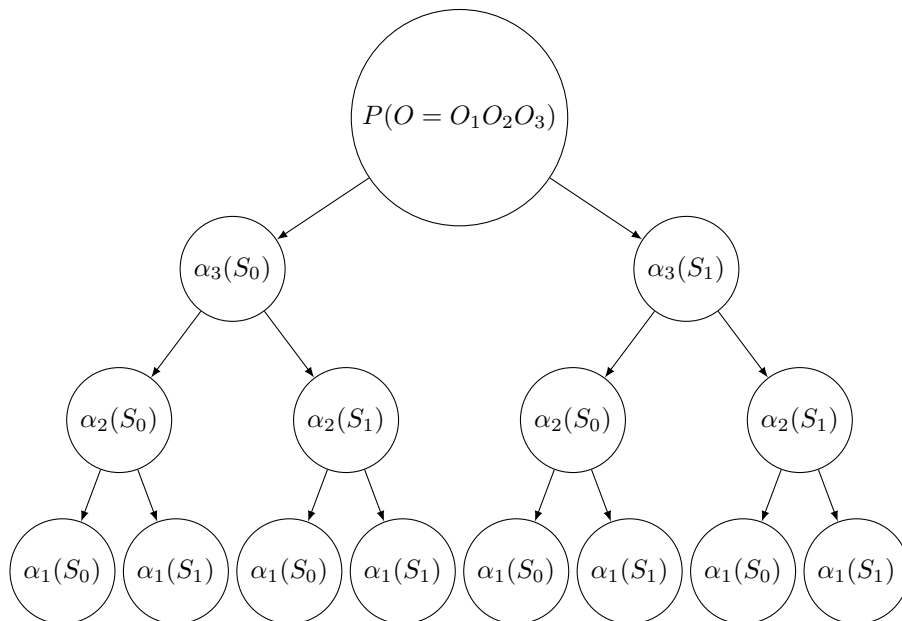
Međutim, jasno je da u slučaju skrivenog Markovljevog modela, stanja nisu poznata (skrivena su) i na ovaj način nije moguće izračunati vjerovatnoću da će dati model generisati određenu sekvencu, u ovom slučaju raspoloženja veseo-veseo-tužan. Oslanjajući se predloženi pristup, intuitivno je jasno da je za određivanje vjerovatnoće date sekvence promatranja potrebno pronaći sumu vjerovatnoća svih mogućih sekvenci stanja koje mogu proizvesti datu sekvencu promatranja. Odnosno,

$$\begin{aligned} P(VVT) &= P(Y = VVT, X = SSS) \\ &+ P(Y = VVT, X = SSO) \\ &+ P(Y = VVT, X = SSK) + \dots \end{aligned} \quad (9.31)$$

Očigledno je ovo rješenje veoma jednostavno, ali ne i efikasno. Za N stanja HMM-a i sekvencu promatranja dužine T postoji N^T mogućih kombinacija stanja koje bi dovele do promatrane sekvence. Iz ovog razloga uvedena su dva algoritma, algoritam unaprijed (eng. *forward*) i unazad (eng. *backward*) koji na efikasniji način računaju ovu vjerovatnoću, čime se kompleksnost izračunavanja smanjuje na $O(T \cdot N^2)$.

„Forward” algoritam

Kada se raspišu svi elementi sume (9.31) pojavit će se mnogo istih faktora u različitim sabircima. „Forward” algoritam, u principu, rascjepljuje sekvencu u manje „podsekvence”.



Slika 9.2: Ilustracija „forward” algoritma, na primjeru HMM sa 2 stanja i sekvencom promatranja dužine 3

Ideja je relativno jednostavna. Kao primjer može se uzeti slučaj sa dva stanja S_0 i S_1 , te sekvencom opažanja $O_1O_2O_3$. To znači da je sekvenca opažanja mogla nastati jednom od sekvenci stanja $S_0S_0S_0$ ili $S_0S_0S_1$. Analogno, ako je određeno posljednje stanje, tada je sekvenca prethodnih stanja S_0S_0 mogla nastati kao S_0S_1 ili S_0S_0 . Svakim narednim korakom se svaka podsekvenca dijeli na jednostavnije, sve dok se ne dođe do krajnje sekvence koja ima samo jedan član (slika 9.2).

Varijable α_t se nazivaju „forward” varijable i definisane su vjerovatnoćom opažanja sekvence $O = O_1O_2 \dots O_T$ u trenutku t , ako je HMM u stanju $q_t = S_i$:

$$\alpha_t(i) = P(O_1, O_2, \dots, O_T, q_t = S_i | \lambda) \quad (9.32)$$

Ovaj algoritam moguće je opisati u tri etape:

Inicijalizacija	$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad 1 \leq i \leq N$
Indukcija	$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1}),$ $1 \leq t \leq T - 1, \quad 1 \leq j \leq N$
Terminacija	$P(O \lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$

„Backward” algoritam

Slično „forward” algoritmu, „backward” algoritam se izvodi na način da se polazi od pretpostavke da se sistem nalazi u stanju $q_t = S_i$ i računa na osnovu vjerovatnoće sekvence od tog vremenskog trenutka. Dakle, logika je nešto drugačija u odnosu na „forward” algoritam, gdje se posmatrala vjerovatnoća sekvence s obzirom na ono što je prethodilo tom stanju. „Backward” varijable se definišu na sljedeći način:

$$\beta_t(i) = P(O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_T | q_t = S_i, \lambda) \quad (9.33)$$

Koraci backward algoritma su:

Inicijalizacija	$\beta_T(i) = 1, \quad 1 \leq i \leq N$
Indukcija	$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j),$ $T > t \geq 1, \quad 1 \leq j \leq N$
Terminacija	$P(O \lambda) = \sum_{i=1}^N \pi_i b_i(O_1) \beta_1(i)$

9.4.2 Problem dekodiranja

Drugi izazov kod HMM predstavlja otkrivanje skrivenog dijela modela, tj. pronalazak „ispravnog” redoslijeda stanja. Ovaj problem se rješava metodama optimizacije, pri čemu odabir kriterija ovisi o tome šta se želi postići sa otkrivenim redoslijedom stanja. Dakle, ako je data sekvenca promatranja $O = O_1 O_2 \dots O_T$ i model λ , kako odabrati odgovarajuću sekvencu stanja $Q = q_1 q_2 \dots q_T$ koja „najbolje” opisuje navedena promatranja? Rješenje ovog problema predstavlja odgovor na pitanje koja sekvenca stanja $Q = q_1 q_2 \dots q_T$ „najbolje” opisuje sekvencu promatranja $O = O_1 O_2 \dots O_T$, pri čemu je atribut „najbolje” potrebno dodatno opisati.

Jedan od pristupa je analizirati odgovor na pitanje „**Koje je najvjerovatnije stanje u kojem sistem može biti u bilo kojem vremenskom trenutku t s obzirom na sekvencu promatranja?**”. U tom smislu se definiše ocjena $\gamma_t(i)$ koja predstavlja vjerovatnoću stanja za datu sekvencu opažanja:

$$\gamma_t(i) = P(q_t = S_i | O, \lambda) \quad (9.34)$$

Ovaj parametar može se izračunati koristeći „forward”/”backward” algoritam na sljedeći način:

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{P(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t(j) \beta_t(j)} \quad (9.35)$$

Nazivnik u relaciji (9.35) se naziva faktorom normalizacije i osigurava da je parametar $\gamma_t(i)$ zaista mjera vjerovatnoće, odnosno da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^N \gamma_t(i) = 1 \quad (9.36)$$

Obzirom na to da se traži najvjerojatnije stanje, potrebno ga je i pronaći korištenjem:

$$q_t = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\gamma_t(i)], \quad 1 \leq t \leq T \quad (9.37)$$

Ovaj pristup omogućava pronalazak najvjerojatnijeg stanja, ali nedostatak je u tome što nekada neće imati upotrebnju vrijednost jer je moguće da se dobije najveća vjerojatnoća za neko stanje sistema, ali da je vjerojatnoća prelaska u to stanje prema datom modelu jednaka nuli.

Drugi pristup je da je potrebno odrediti **koja putanja/sekvencu maksimizira** $P(Q|O, \lambda)$, **odnosno** $P(Q, O|\lambda)$? Odgovor na ovo pitanje daje tzv. Viterbijev algoritam, koji će biti dat u nastavku.

Viterbijev algoritam

Za definisanje „najbolje” sekvence stanja $Q = q_1 q_2 \dots q_T$ za datu sekvencu promatranja $O = O_1, O_2, \dots, O_T$, definiše se parametar:

$$\delta_t(i) = \max_{q_1, q_2, \dots, q_{t-1}} P(q_1, q_2, \dots, q_t = S_i, O_1, O_2, \dots, O_t | \lambda) \quad (9.38)$$

Parametar $\delta_t(i)$ daje odgovor na pitanje koja od putanja (sekvenci stanja) ima najveću vjerojatnoću da se pojavi za prvih t promatranja, tako da model završi u stanju S_i , pri čemu je opservirana data sekvenca promatranja. Na osnovu indukcije, vrijedi:

$$\delta_{t+1}(j) = \left[\max_i \delta_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1}) \quad (9.39)$$

Ono što je kod ovog algoritma drugačije u odnosu na „forward” i „backward” algoritme jeste što se mora voditi računa o parametru i koji maksimizira rezultat u svakom koraku, što se radi uvođenjem varijable $\psi_i(i)$. Koraci za ovaj algoritam su:

Inicijalizacija	$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1)$ $\psi_i(i) = 0$
Indukcija	$\delta_t(i) = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}] b_j(O_t), \quad 2 \leq t \leq T$ $\psi_t(j) = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) a_{ij}], \quad 1 \leq j \leq N$
Terminacija	$P^* = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_T(i)]$ $q_T^* = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_T(i)]$
Određivanje putanje	$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*), \quad t = T - 1, T - 2, \dots, 1$

Može se primijetiti da je Viterbijev algoritam sličan „forward” algoritmu u koraku indukcije, pri čemu je razlika u tome što se kod Viterbijevog algoritma traži maksimalna

vjerovatnoća sekvence do trenutka t , dok „forward” algoritam sumira sve moguće ishode. Viterbijev algoritam se primjenjuje u raznim oblastima, kao što su obrada prirodnog jezika (eng. *natural language processing* - NLP), prepoznavanje govora, biologija i sl.

9.4.3 Problem treniranja

Problem treniranja odnosno učenja HMM se veže za optimizaciju parametara modela, kako bi se mogle sintetizirati sekvence promatranja sa određenim vjerovatnoćama. Rješenje ovog problema je ključno za realne primjene, jer se omogućava optimalno prilagođavanje parametara modela, te odgovara na pitanje „Kako modificirati parametre modela $\lambda = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi)$ da bi se maksimizirala vjerovatnoća $P(O|\lambda)$?”

Sequencia promatranja koja se koristi za treniranje HMM-a se naziva trening sequencia (eng. *training sequence*). Problem treniranja, odnosno problem učenja je najteži problem skrivenog Markovljevog modela. Razlog ovome jeste činjenica da ne postoji analitičko rješenje za model koji bi maksimizirao vjerovatnoću sekvence promatranja. Odnosno, ne postoji, ni za jednu konačnu sekvencu promatranja, optimalan način procjene parametara modela. Uprkos tome, moguće je odabrati model tako da se lokalno maksimizira ova vjerovatnoća koristeći neke od iterativnih procedura, kao što je Baum-Welch algoritam, koji je objašnjen u nastavku.

Baum-Welch algoritam

Varijabla $\xi_t(i, j)$ označava vjerovatnoću da se u trenutku t sistem nalazi u stanju S_i i da se u trenutku $t + 1$ nalazi u stanju S_j :

$$\xi_t(i, j) = P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j | O, \lambda) \quad (9.40)$$

Na osnovu „forward”-”backward” algoritma, moguće je odrediti $\xi_t(i, j)$ kao:

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)} \quad (9.41)$$

Slično kao u (9.35), nazivnik je faktor normalizacije koji osigurava da ova varijabla zaista može predstavljati vjerovatnoću:

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)} \quad (9.42)$$

Također, vrijedi:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \xi_t(j) \quad (9.43)$$

Vjerovatnoća da se sistem nalazi u stanju S_i u trenutku t data je preko $\gamma_t(i)$. Ukoliko se ova varijabla sumira za svako t , dobija se broj koji se može tretirati kao „očekivani broj posjeta” stanju S_i .

$$\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i) = \text{očekivani broj posjeta stanju } S_i \quad (9.44)$$

S druge strane, $\xi_t(i, j)$ je vjerovatnoća prelaska iz stanja S_i u stanje S_j , te ukoliko se ova varijabla sumira za svako t , dobija se broj koji se može tretirati kao „broj očekivanih prelazaka” iz S_i u S_j .

$$\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j) = \text{očekivani broj prelaza iz } S_i \text{ u } S_j \quad (9.45)$$

Na osnovu parametara $\alpha_t(i)$, $\beta_t(i)$, $\gamma_t(i)$, i $\xi_t(i, j)$, koji su dobijeni iz modela $\lambda(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi) = \lambda_r(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \pi)$, uvodi se novi optimizirani model $\lambda_{r+1}(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{B}}, \overline{\pi})$, i to na sljedeći način:

$$\overline{\pi}_i = \gamma_1(i) = \text{očekivani broj posjeta stanju } S_i \text{ u trenutku } t = 1 \quad (9.46)$$

$$\overline{a}_{ij} = \frac{\text{očekivani broj prijelaza iz } S_i \text{ u } S_j}{\text{očekivani broj posjeta } S_i} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)} \quad (9.47)$$

$$\overline{b}_j(k) = \frac{\text{očekivani broj posjeta stanju } j \text{ promatrajući } v_k}{\text{očekivani broj posjeta stanju } j} = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)} \quad (9.48)$$

Za ovako dobijeni model, postupak se iterativno nastavlja ($r = 1, 2, \dots$), što konvergira prema lokalnom optimumu.

Zadaci za samostalan rad

1. Svaki dan (npr. u podne), vrijeme se opaža kao jedno od tri stanja: kišovito, oblačno i sunčano. Prijelazne vjerovatnoće između stanja date su matricom:

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

- (a) Ako se trenutno zna da je sistem u oblačnom stanju, potrebno je izračunati vjerovatnoću da će sistem biti sunčan nakon tačno 3 dana.
- (b) Ako je vrijeme prvog dana ($t = 1$) sunčano (stanje 3), kolika je vjerovatnoća da će vrijeme u narednih 7 dana slijediti sekvencu:

Sunčano \rightarrow Sunčano \rightarrow Kišovito \rightarrow Kišovito \rightarrow Sunčano \rightarrow Oblačno \rightarrow Sunčano?

- (c) Ako se sistem nalazi u stanju sunčano, kolika je vjerovatnoća da će ostati u tom stanju tačno 10 dana?
- (d) Pokazati da je očekivano trajanje boravka u stanju i dato sljedećim izrazom:

$$E(T_i) = \frac{1}{1 - A_{ii}}$$

Izračunati očekivano vrijeme do povratka u početno stanje, ako sistem počinje u stanju sunčano (3). Koliko je očekivano trajanje za svako stanje?

- (e) Ako se sistem nalazi u stanju i , kolika je vjerovatnoća da će ostati u tom stanju tačno d dana?
- (f) Ako se posmatra period od 100 godina, izračunati koliko je dana bilo sunčanih, koliko oblačnih i koliko kišovitih.

2. Data su dva automata za bombone, jedan označen kao $q = 1$ i drugi kao $q = 2$. Prvi automat sadrži 60% mentol bombona i 40% karamela, dok drugi automat sadrži 90% karamela i samo 10% mentol bombona. Svaka bombona košta pola marke.

Mario baca novčić kako bi odlučio koji će automat koristiti prvi. Nakon što koristi neki automat, Mario ponovo baca dva novčića i mijenja automat samo ako oba novčića padnu na glavu. Mario je kupio tri bombone koristeći tri kovanice od pola marke. Bombone koje je dobio su redom: ($x_1 = K, x_2 = M, x_3 = K$).

Da li je moguće odrediti u kojem od automata je završila druga kovanica?

3. Merlinova magična radnja se otvara i zatvara nasumično. Naime, ako je trenutno zatvorena, vjerovatnoća da će se otvoriti u narednom satu iznosi 10%. Ako je trenutno otvorena, vjerovatnoća da će se zatvoriti u narednom satu također iznosi 10%.

Radnja se nalazi u prometnom dijelu grada - kada je radnja otvorena, okolina postaje još užurbanija. Ako je radnja zatvorena, područje je bučno s vjerovatnoćom 40%, dok je, ako je radnja otvorena, područje bučno s vjerovatnoćom 70%.

U 13h poslijepodne primijetite da je područje bučno, pa odlučite provjeriti - ali radnja je zatvorena. U 14h okolina je i dalje bučna, ali smatrate da nije baš vjerovatno da se radnja otvorila. U 15h buka i dalje traje, kao i u 16h, pa u 17h. Koliko sati zaredom područje mora biti bučno da biste mogli pretpostaviti, s vjerovatnoćom većom od 50%, da je radnja sada otvorena?

Literatura

- [1] Melita Ahić-Dokić. *Signali i sistemi*. Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 2010.
- [2] Melita Ahić-Dokić i Branislava Peruničić. *Analiza signala i sistema*. Institut zaštite od požara i eksplozije, 1999.
- [3] Branislava Kljuić. *Analiza signala i sistema*. Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 1972.
- [4] Zoran Salčić i Branislava Kljuić. *Analiza signala i sistema - Problemi*. Elektrotehnički fakultet u Sarajevu, 1973.
- [5] Željko Jurić. *Diskretna matematika za studente tehničkih nauka*. 2011.
- [6] Henry Stark and John W Woods. *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing: International Edition*. Pearson Higher Ed, 2014.
- [7] Donald G Childers. *Probability and random processes: using MATLAB with applications to continuous and discrete time systems*. IRWIN, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1997.
- [8] Scott Miller and Donald Childers. *Probability and random processes: With applications to signal processing and communications*. Academic Press, 2012.
- [9] John A. Gubner. *Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers*. Cambridge University Press, 2012.
- [10] G.J. Dolecek. *Random Signals and Processes Primer with MATLAB*. Springer, 2013.
- [11] Bruce Hajek. *Random Processes for Engineers*. Cambridge University Press, 2015.
- [12] Wim van Drongelen. *Introduction to Random Signals and Noise*. Academic Press, 2012.
- [13] Shaila D. Apte. *Random Signal Processing*. CRC Press, 2018.
- [14] H. Vincent Poor. *Fundamentals of Stochastic Signals, Systems and Estimation Theory*. Springer, 2013.
- [15] Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 4th edition, 2012.
- [16] Andrew H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Dover Publications, 2011.
- [17] Roy D. Yates and David J. Goodman. *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*. Wiley, 2014.
- [18] Richard Brown. *Random Signals for Engineers Using MATLAB*. Springer, 2016.
- [19] Eric Matthes. *Python Crash Course*. No Starch Press, 2019.
- [20] Al Sweigart. *Automate the Boring Stuff with Python*. No Starch Press, 2019.
- [21] Allen B. Downey. *Think DSP: Digital Signal Processing in Python*. Green Tea Press, 2012.
- [22] Maurice Charbit. *Digital Signal Processing (DSP) with Python Programming*. Wiley-ISTE, 2017.
- [23] José Unpingco. *Python for Signal Processing*. Springer, 2016.

Indeks pojmova

- ansambl, 15
- autokorelaciona funkcija (slučajnog procesa), 118
- autokorelaciona funkcija po vremenu (slučajnog procesa), 124
- autokovarijantna matrica, 97

- backward* algoritam, 218
- Baum-Welch algoritam, 220
- Bayesov teorem (za događaje), 23
- bijeli šum, 129
- Box-Muller transformacija, 88
- brzina prenosa informacija, 205

- Centralna granična teorema, 100
- centralni mješoviti momenti, 76
- centralni momenti slučajne promjenljive, 38

- dispersija (varijansa) slučajne promjenljive, 40
- događaj, 14
- dvodimenzionalna gustina vjerovatnoće slučajnog procesa, 108

- eksperiment, 13
- eksponencijalna raspodjela vjerovatnoće, 36
- elementarni događaj, 14
- emisijska matrica, 214
- entropija (skupa događaja), 193
- entropija (zajedničkih događaja), 197
- entropija izvora, 202
- entropija sekvence, 201
- ergodičnost (slučajnog procesa), 124

- forward* algoritam, 216
- funkcija gustine uslovne vjerovatnoće, 64
- funkcija gustine vjerovatnoće (slučajne promjenljive), 30
- funkcija raspodjele uslovne vjerovatnoće, 64

- funkcija raspodjele vjerovatnoće (slučajne promjenljive), 29
- funkcija raspodjele vjerovatnoće slučajnog procesa, 107

- Gaussova (normalna) raspodjela vjerovatnoće, 33

- HMM - skriveni Markovljevi modeli, 214

- informacija, 193
- ishod, 14

- jednodimenzionalna gustina vjerovatnoće slučajnog procesa, 107

- Kalmanov filter, 183
- kapacitet kanala veze, 206
- karakteristična funkcija, 31
- korelacija, 76
- korelaciona matrica, 96
- koreliranost slučajnih vektora, 97
- kovarijansa, 77
- kovarijantna matrica, 96
- kroskorelaciona funkcija (slučajnog procesa), 120
- kroskorelaciona funkcija po vremenu (slučajnog procesa), 124
- kroskorelaciona matrica, 96

- marginalna funkcija raspodjele vjerovatnoće, 54
- marginalna gustina vjerovatnoće, 55
- Markovljev proces, 130
- Markovljevi izvori informacija, 202
- Markovljevi lanci, 208
- matrica disperzije, 97
- matrica prelaza, 208
- matrica varijansa-kovarijansa, 97
- medijana, 45

međusobna informacija, 198
 međusobna stacionarnost slučajnih procesa, 111
 mješoviti momenti (indikator), 76
 modalna tačka, 45
 momenti slučajne promjenljive, 38

 nezavisnost slučajnih promjenljivih, 75

 obojeni šum, 129
 optimalni prediktor, 179
 ortogonalnost slučajnih promjenljivih, 76
 ortogonalnost slučajnih vektora, 97
 očekivana kvadratna vrijednost (slučajnog procesa), 115
 očekivana vrijednost (funkcije) slučajne promjenljive, 38
 očekivana vrijednost (slučajnog procesa), 114
 očekivana vrijednost (slučajnog vektora), 96
 očekivana vrijednost slučajne promjenljive, 39

 Pearsonov korelacioni koeficijent, 77
 potpun skup, 14
 prilagođeni filter, 161
 prostor elementarnih događaja, 14
 protok informacija, 206

 Rayleighova raspodjela vjerovatnoće, 35
 redundanca, 203

 slučajna promjenljiva, 28
 slučajni proces, 105
 slučajni vektor, 95
 SNR - odnos signal-šum, 153
 spektralna gustina (slučajnog procesa), 128

 srednja vrijednost po vremenu (slučajnog procesa), 123
 srednjekvadratna vrijednost slučajne promjenljive, 39
 stacionarna matrica prelaza, 212
 stacionarne vrijednosti (Markovljevih lanaca), 212
 stacionarnost (slučajnog procesa), 109
 standardna devijacija, 34

 transferzalni filter, 166
 transformacije slučajnih promjenljivih, 81

 uniformna raspodjela vjerovatnoće, 32
 uslovna entropija, 196
 uslovna gustina vjerovatnoće slučajnog procesa, 110
 uslovna vjerovatnoća, 63
 uslovna vjerovatnoća (događaja), 21

 varijansa (Gaussove raspodjele), 34
 varijansa (slučajnog procesa), 119
 Viterbijev algoritam, 219
 višedimenzionalna gustina vjerovatnoće slučajnog procesa, 108
 vjerovatnoća, 18

 Wiener-Hopfova jednačina, 174
 Wienerov filter, 169

 zajednička funkcija gustine vjerovatnoće, 55
 zajednička funkcija raspodjele vjerovatnoće, 54
 zajednička gustina vjerovatnoće slučajnog procesa, 111
 zajednička vjerovatnoća (događaja), 21
 Zakon velikih brojeva, 98
 zavisni događaji, 21